مركز دراسات الوحدة العربية

مؤسسة عبد الحميد شومان

سلسلة تاريخ العلوم العربية (٤)

موسوعة
تاريخ العلوم العربية

الجزء الثاني

الرياضيات والعلوم الفيزيائية

الرياضيات [illegible] الجبر • الهندسة • المثلثات • الرياضيات التحليلية

[illegible] • الستاتيكا • المناظر والبصريات

إشراف : رشدي راشد

موسوعة
تاريخ العلوم العربية

الجزء الثاني

الرياضيات والعلوم الفيزيائية

تم ترجمة هذه الموسوعة إلى العربية ونشرها

بدعم من المؤسسة الثقافية العربية

ومن مؤسسة عبد الحميد شومان

مؤسسة عبد الحميد شومان

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم العربية (٤)

موسوعة تاريخ العلوم العربية

الجزء الثاني

الرياضيات والعلوم الفيزيائية

الرياضيات العددية • الجبر • الهندسة • المثلثات • الرياضيات التحليلية

الموسيقى • الستاتيكا • المناظر والبصريات

إشراف : رشدي راشد

بمعاونة : ريجيس مورلون

الفهرسة أثناء النشر ـ إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

موسوعة تاريخ العلوم العربية/ إشراف رشدي راشد، بمعاونة ريجيس مورلون.

٣ ج. ـ (سلسلة تاريخ العلوم العربية؛ ٤)

يشتمل على فهارس.

محتويات: ج ١. علم الفلك النظري والتطبيقي. ـ ج ٢. الرياضيات والعلوم الفيزيائية. ـ ج ٣. التقانة ـ الكيمياء ـ علوم الحياة.

١. العلوم عند العرب ـ الموسوعات. أ. راشد، رشدي. ب. مورلون، ريجيس. ج. السلسلة.

503

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «سادات تاور» شارع ليون ص.ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣ ـ بيروت ـ لبنان
تلفون: ٨٦٩١٦٤ ـ ٨٠١٥٨٢ ـ ٨٠١٥٨٧
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت
فاكس: ٨٦٥٥٤٨ (٩٦١١)

حقوق الطبع والنشر محفوظة للمركز

الطبعة الأولى

بيـــروت، ١٩٩٧

المحتويات

الجزء الثاني
الرياضيات والعلوم الفيزيائية

١٠ ـ الأعداد وعلم الحساب ....أحمد سعيد سعيدان ٤٤٣

١١ ـ الجبر .... رشدي راشد ٤٦٣

١٢ ـ التحليل التوافيقي، التحليل العددي،

التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد .... رشدي راشد ٤٩١

١٣ ـ التحديدات اللامتناهية في الصغر، وتربيع الهلاليات

ومسائل تساوي المحيطات .... رشدي راشد ٥٣٩

١٤ ـ الهندسة .... بوريس أ. روزنفيلد

أدولف ب. يوشكفيتش ٥٧٥

١٥ ـ علم المثلثات: من الهندسة إلى علم المثلثات .... ماري تيريز ديبارنو ٦٢٧

١٦ ـ تأثير الرياضيات العربية في الغرب في القرون الوسطى ..... أندريه آلار ٦٦٩

١٧ ـ علم الموسيقى ....جان كلود شابرييه ٧٣٧

١٨ ـ علم السكون (الستاتيكا) ....ماريا م. روزنسكايا ٧٨٣

١٩ ـ علم المناظر الهندسية .... رشدي راشد ٨٢٣

٢٠ ـ نشأة علم البصريات الفيزيولوجي .... غول أ. راسل ٨٥٩

٢١ ـ الاستقبال الغربي لعلم المناظر العربي .... دايفيد ليندبرغ ٩١١

المراجع ٩٢٩

ـ ١٠ ـ
الأعداد وعلم الحساب

أحمد سعيد سعيدان(*)

تعود أوائل الأعمال التي كتبت بالعربية في علم الحساب، إلى محمد بن موسى الخوارزمي في القرن التاسع للميلاد. وهي عبارة عن رسالتين صغيرتين: الرسالة الأولى لم تصل إلينا إلا عبر ترجمتها اللاتينية[١]، أما الثانية وعنوانها الجمع والتفريق فمشار إليها في المراجع العربية[٢]، وقد ورد ذكرها في أحد الأعمال العربية[٣] في الحساب. وأولى الكتابات العربية في علم الحساب والتي وصلتنا سليمة هي من أعمال أحمد بن إبراهيم الإقليدسي من القرن العاشر للميلاد[٤]. في هذا العمل يناقش المؤلف نظاماً هندياً للحسابات، كما يرجع إلى نظامين آخرين: الحساب الإصبعي والنظام الستيني. إنّ هذه النظم الثلاثة، إضافة إلى عِلم الحساب اليوناني ـ الذي يحتوي في الواقع بدايات نظرية

(*) متوفى، كان أستاذاً في جامعة الأردن ـ عمان.

قام بترجمة هذا الفصل نقولا فارس.

(١) انظر: Kurt Vogel, ***Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das Früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern*** (Aalen: Otto Zeller Verlagsbuchhandlung, 1963)

(انظر: الفصل الذي كتبه أندريه آلار (André Allard)، ملحوظة الناشر).

(٢) أبو الفرج محمد بن إسحق بن النديم، **الفهرست**. هناك طبعات عديدة من هذا المؤلف، والتي استخدمناها هنا طبعة قديمة غير مؤرخة منشورة في القاهرة.

(٣) انظر: أبو منصور عبد القاهر بن طاهر البغدادي، **التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة**، تحقيق أحمد سليم سعيدان (الكويت: معهد المخطوطات العربية، ١٩٨٥).

(٤) أبو الحسن أحمد بن إبراهيم الإقليدسي، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أحمد سعيد سعيدان، تاريخ علم الحساب العربي؛ ٢، ط ٢ (حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلوم العربية، ١٩٨٦)، ص ٣٤٩. الترجمة الإنكليزية:

Abu al-Hassan Ahmed Ibn Ibrahim al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, english translation by Ahmad S. Saidan (Dordrecht; Boston: D. Reidel, 1978).

الأعداد ـ شكّلت العناصر الأساسية لعِلم الحساب، وأفسحت المجال لامتزاجات ولتطورات لاحقة.

النظام الستيني

يُشار إلى هذا النظام، في الأعمال العربية، على أنه النظام الحسابي لعلماء الفلك، الذي يحوي القِسم الأكبر مِن العمليات الحسابية في النظام الستيني. وهذا النظام ينحدر من قدماء البابليين وقد وصل إلى العالم العربي عبر أقنية سريانية وفارسية. وليس لدينا أعمال سابقة مكرسة لهذا النظام، لكننا نجده حاضراً في كل الأعمال الحسابية ممزوجاً مع أحد، أو مع كلا النظامين، الهندي أو الإصبعي. أما في الأعمال اللاحقة فلا يوجد إلا في مظهره الحسابي البحت ومن دون ما يشير إلى تطوراته العربية. ويعتبره الاختصاصيون حالياً أكثر ملاءمة من النظام العشري فيما يتعلق بالحسابات الفلكية في القرون الوسطى. ولكنه الآن أضحى خارج التداول عامة إلا فيما خص أجزاء الساعة أو درجات الزوايا.

الحساب الإصبعي

يسمى هذا النظام في الأعمال العربية حساب «الروم» (أي البيزنطيين) والعرب. ونجهل تاريخ وكيفية دخوله إلى العالم العربي. لكن بالإمكان الافتراض بأن التجار والباعة العرب، حتى قبل الإسلام، قد تعلموا من جيرانهم العدّ بواسطة الأصابع. ونجد في بعض الأحاديث الشريفة ما يشير إلى استخدام الرموز الإصبعية للإشارة إلى الأعداد مما ميّز هذا النظام.

إنه نظام يعتمد الذاكرة أساساً، ليس فيه من صعوبة فيما يتعلق بعمليتي الجمع أو الطرح. لكن عمليات الضرب والقسمة وإقامة النسب ترتدي، بالمقابل، صعوبات وتعقيدات أكبر بكثير؛ وحول هذه العمليات تدور أغلب الأعمال المتعلقة بهذا النظام. وبالنسبة إلى الضرب، نجد عروضاً عديدة تدور غالبيتها حول الوسائل السريعة التي ما برحت تستعمل إلى الآن. أما بالنسبة إلى حسابات النسب والقسمة فقد استخدمت الطريقة المعروفة بطريقة «الوضعية الخاطئة» أو «الوضعية المزدوجة الخاطئة»(٥). مما يستدعي مبدأ الاستكمال الخطي (الداخلي) (Interpolation Linéaire). أما استئصال الجذور التربيعية فقد كان يتم بوسائل تقريبية غير متقنة.

والاحتساب في هذا النظام كان يجري ذهنياً. لكن ذلك يستدعي حِفظ بعض النتائج الوسيطة. وهذا ما كان يقوم به المحتسب بواسطة طي أصابع يديه في وضعيات مختلفة

(٥) «قاعدة الخطأين». (المترجم).

تسمح بتمثيل الأعداد من ١ إلى ٩٩٩٩. هذه الوضعيات المختلفة موجودة في «حساب» الإقليدسي[٦]. تسمى هذه الوضعيات «العقود» (نسبة إلى عقد الإصبع)، وامتداداً، سُمِي هذا النظام «حساب العقود».

والأعداد في هذا النظام تتمثل بأحرف عربية مأخوذة حسب ترتيب يقال له «الجُمَّل» مما أعطى لهذا النظام اسماً آخر: «حساب الجُمَّل». والجدول التالي يورد الأحرف الأبجدية العربية في هذا النظام، يقابل كل منها العدد الذي يُمثِّله:

ا	1	A	ح	8	H	س	60	S	ت	400	T
ب	2	B	ط	9	I	ع	70	O	ث	500	U
جـ	3	C	ي	10	J	ف	80	P	خ	600	V
د	4	D	ك	20	K	ص	90	Y	ذ	700	Z
هـ	5	E	ل	30	L	ق	100	Q	ض	800	W
و	6	F	م	40	M	ر	200	R	ظ	900	I'
ز	7	G	ن	50	N	ش	300	X	غ	1000	O'

الجدول رقم (١٠ ـ ١)

وهكذا، من أجل تمثيل العدد ١١١١ نكتب «غقيا»؛ والعدد ٢٠٠٠ يتمثل كتابياً بـ«بغ» والعدد ١٠٠٠٠٠٠ بـ«غغ». فيمكننا بالتالي، نظرياً، كتابة كل الأعداد في هذا النظام.

لكننا لا نصادف الأعداد الكبيرة في الأعمال التي وصلتنا حول هذا النظام، لأن هذه الأعمال تستخدم بشكل واسع النظام الستيني لهذه الغاية، وتتداول بالتالي الأحرف من أ إلى ن.

ويتغير ترتيب نظام الجُمَّل في الغرب الإسلامي، لكن هذا التغير لا يطال سوى الأحرف التي تلي النون مما لا يؤثر في كتابة السُلم الستيني.

ويعود العمل الأقدم الذي نعرفه حول نظام الجُمَّل لأبي الوفاء البوزجاني (القرن العاشر)[٧]. وبعده بقليل نجده عند الكرجي في **الكافي في الحساب**[٨]. وليس هناك من

---

(٦) انظر: المصدر نفسه.

(٧) عنوان هذا المؤلف هو فيما يحتاج إليه الكُتاب من علم الحساب. ويُلقب بكتاب المنازل السبع لأنه يحتوي على سبعة فصول. انظر: أبو الوفاء محمد بن محمد البوزجاني، **حساب اليد: تحقيق لكتاب المنازل السبع**، نشر أحمد سليم سعيدان، تاريخ علم الحساب العربي؛ ج ١ (عمان: [د.ن.]، ١٩٧١).

(٨) الكرجي المعروف أيضاً تحت اسم الكَرْخي، متوفى حوالى عام ١٠١٦. انظر: أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، **الكافي في الحساب**، شرح وتحقيق سامي شلهوب، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٥ (حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلم العربي، ١٩٨٦)، مع ترجمة ألمانية.

عمل جدي آخر تناول هذا النظام الذي بدأ استعماله يتضاءل مع التوسع في استخدام النظام الهندي، بحيث لم يبق منه سوى وسائل عملية في القسمة والضرب إضافة إلى مفهوم عربي في الكسور.

وقد وصل النظام الإصبعي إلى الناطقين بالضاد عبر الشعوب ذات اللغة السريانية أساساً حسب ما نستنتجه من أعمال أبي الوفاء والكرجي. وعلى الرغم من ذلك نجد هذا النظام يتلاءم جيداً مع إمكانات اللغة العربية، وخاصة فيما يتعلق بالكسور. فاللغة العربية تحوي تسعة ألفاظ فقط للتعبير عن الكسور التي صورتها الواحد: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$، . . . $\frac{١}{١٠}$. وهي «الكسور» الوحيدة في هذا النظام، كل منها هو «كَسْر». نشير إلى أن كلاً من $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٢}{٣}$، . . . هو «كسور» (جمع كسر). بينما $\frac{١}{١٥}$ يعبر عنه كجزء من ١٥، ويُستبدل في الحسابات بـ $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٥}$. أما الكسور التي تحوي أعداداً غير الأعداد ٢، ٣، ٥، ٧ مثل $\frac{١}{١١}$ و $\frac{٣}{١٣}$ فكانت تعتبر «صماء»، يتوجب تحويلها بواسطة التقريب إلى الكسور المعروفة «المُنْطَقة». وقد كرس أبو الوفاء في حسابه العديد من الصفحات من أجل تقديم أفضل الطرق لتحويل هذه «الأجزاء» إلى كسور. والطريقة الأساس لذلك كانت استخدام السلم الستيني. فالكسر $\frac{٧}{١٥}$ يكتب مثلاً:

$$\frac{٧}{١٥} = \frac{٧}{١٥} \times ٦٠^{\circ} = ٢٨' = ٢٠' + ٨' = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٣} .$$

نشير هنا إلى أن الكسر الوحيد المقبول ذا الصورة التي تختلف عن الواحد هو $\frac{٢}{٣}$. هذه الطريقة تسهل الحسابات العملية، ولكنها تمثيل ساذج غير رياضي وغير قابل للتعميم.

وتوجد عدة أنظمة للكسور في النظام الإصبعي، أهمها السلم الستيني: الدرجة الثانية. . . . لكن أي نظام قياس للأطوال أو المساحات أو الأحجام أو للعمليات التجارية من شأنه استدعاء الكسور. فإذا كان الدرهم يساوي ٢٤ قيراطاً فإن القيراط يساوي $\frac{١}{٢٤}$ من الدرهم.

هذه الأنظمة قد اختفت. وظهر المفهوم العام للكسر $\frac{a}{b}$ في العصر الإسلامي مع توسع وانتشار النظام الهندي. لكن الميل للتعبير عن الكسر $\frac{١}{١٥}$ بـ $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٥}$ مثلاً قد عاش طويلاً حيث ما زال يستخدم من قبل غير المتعلمين إلى أيامنا.

النظام الهندي

ندين لهذا النظام بالكثير فيما يخص التمثيل الكتابي العادي للأعداد. ويبدو أنه سابق للقرن التاسع وهو القرن الذي كتب فيه الخوارزمي. ففي القرن السابع للميلاد، وفي دير كِنشر على الفرات، عاش أسقف عالم اسمه سفيروس سبوخت. وقد كتب هذا الأسقف في مواضيع عدة. وفي بعض المقاطع من كتاباته التي وصلتنا والمؤرخة في العام ٦٦٢م، يعبِر عن إعجابه بالهندوس مقارنة مع الإغريق على الشكل التالي:

«لن أتحدث عن علم الهندوس... عن اكتشافاتهم الحذقة،... الاكتشافات الأكثر براعة من تلك العائدة للإغريق أو للبابليين؛ عن طرقهم الحسابية القيمة وعن براجهم الحسابية التي تفوق كل تصور. لكني أشير فقط إلى أن هذه الحسابات تجري فقط بواسطة تسعة رموز»(٩).

ومن المحتمل أن يكون هذا النظام قديم جداً وأن يكون قد ولد في الهند ووصل إلى سوريا عبر التجارة. إلا أننا لا نجد في الكتابات الهندية السابقة للخوارزمي ما يشير إلى هذا النظام.

ويعود الفضل للإقليدسي في وصف عملية تستحق (على الأقل للوهلة الأولى) أن يُشار إليها: لقد كان العمل يتم بواسطة الغبار أو الرمل، يرشه الكاتب على لوحة، ثم يرسم فوقه، بإصبعه أو بقضيب صغير منحنٍ، الأرقام التي يحتاج إليها. ومن ثم يمحو هذه الأرقام مستبدلاً إياها بالتتابع وحسب الحاجة بأعداد أخرى إلى أن لا يبقى في النهاية سوى النتيجة النهائية للعملية الحسابية المطلوبة.

هذه اللوحة تحمل التسمية الفارسية «التخت». وهذا لا يعني كون العرب قد اقتبسوا هذا النظام من بلاد فارس. فقد يكون وصلهم عبرها أو عبر أحد الفرس من أوائل الذين استخدموه. ومهما يكن من أمر، فإن هذه الأمور المتعلقة باللغة هي من التعقيد بحيث لا تدع مجالاً لاستنتاج مؤكد. إلا أن ما يهمنا هنا هو أن الذين اقتبسوا هذا النظام وأدخلوه إلى العالم العربي قد أسموه النظام «الهندي».

يتميز هذا النظام بقدرته على تمثيل أي عدد، مهما كان كبيراً بواسطة أرقام تسعة إضافة إلى الصفر، في السُلم العشري الذي كان يُستخدم في الحياة اليومية. ويتم هذا التمثيل بفضل الفكرة التي نسبت قيمة لكل منزلة من منازل الرقم: فالرقم ١ يساوي الواحد عند وضعه في منزلة الآحاد ويساوي عشرة عند وجوده في منزلة العشرات ومئة عند وضعه في منزلة المئات... وهكذا دواليك.

وقد احتوى النظام الستيني البابلي إشارتين كما عرف القيمة المنوطة بمكان وضعهما (حسب السلم الستيني). كان على الكاتب أن يُسجل الأعداد في النظام العشري، وأن يحولها إلى النظام الستيني، وأن يقوم بالحسابات ويجد الجواب، وأن يعيد النتيجة إلى النظام العشري. وعلى الرغم من أن النظام الستيني هو من اختراع البابليين إلا أنه بقي غريباً عن حياتهم اليومية إلى أن حل مكانه النظام الهندي. لكنه، وحتى ذلك التبديل كان الأكثر استخداماً في الرياضيات.

سمح هذا النظام بالقيام بالحسابات بشكل أسهل. وكان اليونانيون قد طوروا علم

---

(٩) انظر: David Eugene Smith, *History of Mathematics* (Boston; New York: Ginn and Co., 1923-1925), vol. 1, pp. 166-167.

الهندسة بشكل يثير الإعجاب. إلا أن الرياضيات كانت بحاجة إلى أدوات جديدة من أجل دفعها إلى الأمام: إلى الجبر وإلى وسائل احتساب متطورة. وهنا كان الإسهام العربي بفضل إدخال الحساب الهندي.

أشكال الأرقام

يمكن أن نجد في أغلبية الأعمال المكرسة لتاريخ الرياضيات في القرون الوسطى وصفاً كافياً لأشكال الأعداد. ونقدم هنا حصيلة أبحاث في حوالى الثلاثين من المخطوطات الشرقية أو الغربية الإسلامية.

(١) ـ (الرقم «واحد»). ظهر في الكتابات الأولى على الشكل $\bar{1}$ والخط الأفقي الصغير الموضوع فوقه كان لتمييزه عن بقية الكلمات؛ وهذا من التقاليد الهندية. وعند كتابة أعداد جنباً إلى جنب كانت الخطوط الأفقية فوقها تساعد على تمييز أحدها عن الآخر. فمثلاً $\bar{1}\ \bar{1}$ كتابة تتميز عن $\overline{11}$. وقد اختفى هذا الخط الأفقي تدريجياً عند النساخ العرب الذين كانوا يعمدون إلى إطالة الواحد: «|» لتمييزه عن الألِف.

(٢، ٣) ـ (الرقمان«الاثنان»و«الثلاثة»). في بلادالشرق، الباكستان وإيران وأفغانستان، أخذ هذان العددان على التوالي الشكلين ʔ و Ȝ ؛ وفي العراق وسوريا الشكلين: ٢ و ٣ ؛ وفي البلدان الغربية المسلمة الشكلين 2 وَ3 تقريباً.

(٤) ـ (الرقم «أربعة»). كان شكله الأول في الشرق ۴ وتتطور من ثم تدريجياً ليصبح ٤ . وقد أخذ في الغرب الشكل ٤ . ولكن النساخ كتبوه ٤ على شكل 3 مقلوبة.

(٥) ـ (الرقم «خمسة»). في المخطوطات الأقدم كان يشبه الـ ꟹ أو الحرف اللاتيني B. وتطورت من ثم كتابته ليصبح على الشكل B وفي الشرق ٥ . وكان يكتب في الغرب المسلم على الشكل ٥.

(٦) ـ (الرقم «ستة»). كان يكتب على الشكل ٦ في الشرق وعلى الشكل 6 في الغرب المسلم.

(٧، ٨، ٩) ـ (الأرقام «سبعة»، «ثمانية» و«تسعة») كانت هذه الأرقام تكتب على التوالي ٧، ٨، ٩ في الشرق و7، 8، 9 في الغرب المسلم.

(٠) ـ (الصفر). في البداية كان يكتب على شكل دائرة صغيرة، شرقاً وغرباً. لكن، في الشرق أضحت «الخمسة» تكتب على شكل دائرة صغيرة بينما أصبح يشار إلى الصفر بنقطة.

نشير إلى أن هذه الأشكال كانت تسمى عند العرب «حروف الهند» وكانت تستخدم في الكتابات السرية(١٠).

---

(١٠) انظر: الإقليدسي، الفصول في الحساب الهندي، ص ٤٤٢.

محتوى الحساب الهندي

ليس باستطاعتنا التأكيد بأن الصيغة اللاتينية لمؤلف الخوارزمي تحوي كامل علم الحساب الهندي كما عرفه العالم الإسلامي. كما لا يمكننا التأكيد بأن القسم الأول من مؤلف الإقليدسي يمثل الحساب الهندي دون إضافة عربية. ولا بد أن الحقيقة تقع بين هذين الاحتمالين. وقد لا نستطيع التأكيد بأن مؤلف الخوارزمي يقدم بالكامل الحساب الهندي كما انتشر في العالم العربي لكننا نستطيع بحق أن نؤكد أن العرب اقتبسوا من الهند السلم العشري، مع عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستئصال الجذر التربيعي للأعداد الصحيحة، وكذلك العمليات الحسابية المذكورة عينها فيما يخص النظام الستيني. قد يكون العلم الهندي قد تناول عملياً وبشكل أساسي الأعداد الصغيرة وقد لا يكون بهذا الإتقان؛ إلا أن الفكرة العامة والأسس لعلم الحساب هذا وتنظيمه تعود إلى الهند. هذا العلم، الذي أضيف إلى المعارف الحسابية الأخرى التي عاشت واستمرت إلى أن وصلت إلى علماء جنديسابور، شكّل القاعدة لعلم الحساب الذي بنى عليه العالم العربي رياضيات منظمة متميزة. وقبل أن نبدأ بدراسة علمَ الحساب العربي، لنلقِ نظرة على طبيعة هذا العلم الهندي الذي تمكن من غزو الفكر العربي واجتذابه.

طبيعة الحساب الهندي

نعود للتذكير بأن هذا النظام قد تبناه العالم الإسلامي، بلوحته الغبارية وبنظام استبداله للأعداد الممحية. ومن أجل إلمام أفضل به لنأخذ مثل ضرب العددين ٩٢٣٤ و٥٦٨، ولننظر إلى الطريقة المقدمة في كل النصوص المتعلقة بالحساب الهندي:

يوضع العددان على اللوحة، على الشكل التالي:

٩٢٣٤
٥٦٨ (الرقم الأول من العدد الثاني تحت الرقم الأخير من العدد الأول).

مما يعني أن علينا ضرب العدد ٩ على التوالي بـ ٥، ٦ و٨، بحيث يوضع كل حاصل ضرب فوق الرقم الذي ضرب به الرقم ٩. نكتب إذن العدد ٤٥ فوق الرقم ٥ . ومن ثم عند ضرب الـ ٩ بـ ٦ نحصل على ٥٤ فنكتب الرقم ٤ فوق الـ ٦ ولكن الرقم ٥ يجب إضافته حينئذٍ إلى الـ ٤٥ لتعطي ٥٠؛ فنمحي العدد ٤٥ ونكتب مكانه العدد ٥٠. ومن ثم نضرب الـ ٩ بـ ٨ فنحصل على العدد ٧٢ الذي يأخذ مكانه فيما فوق، على الشكل التالي: يأخذ الرقم ٢ مكان الرقم ٩ ويجمع الرقم ٧ إلى الرقم ٤ فيعطي ١١. فنمحو الرقم ٤ ونبدله بالواحد. أما الرقم ١ الآخر فنضيفه إلى الصفر، فنمحو الصفر إذن ونبدله بالرقم ١. فنحصل على النتيجة: ٤ ٣ ٢ ٢ ١ ١ ٥.
٥ ٦ ٨

حينئذٍ ينبغي إزاحة العدد ٥٦٨ مرتبة واحدة إلى اليمين بحيث تقع آحاده تحت الرقم التالي الذي ينبغي الضرب به. فنحصل على الشكل:

٥ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٤
٥ ٦ ٨

مما يعني أن علينا ضرب الرقم ٢ (الفوقي) تتالياً بالأرقام ٥، ٦ و٨. وعند ضرب الرقم ٢ بالأرقام ٥، ٦ و٨ وإضافة حواصل الضرب إلى الخط الأعلى نحصل على:

٥ ٢ ٢ ٥ ٦ ٣ ٤
٥ ٦ ٨

فنعمد على إزاحة العدد ٥٦٨ مرتبة إلى اليمين بحيث يقع الرقم ٨ تحت الرقم ٣. ونعيد العملية نفسها ما يكفي من المرات إلى أن نضرب بجميع أرقام العدد الفوقي (٩٢٣٤) فنحصل في الخط الفوقي على النتيجة النهائية. لكن العدد المضروب به يكون قد اختفى نهائياً مما لا يسمح بأية إعادة تدقيق في العملية. أضف إلى ذلك ما يحدثه محو الغبار من اتساخ للأصابع أو للثياب. لذا، على الرغم من بساطة هذه الخوارزمية كان لا بد من تحسينها.

إسهام عربي في تطوير علم الحساب

إن أول الإنجازات العربية تمثل في تطوير هذا النظام الحسابي. ويشير مؤلف الإقليدسي جزئياً إلى أولى المحاولات التي بذلت في هذا المجال: استبدال اللوحة الحسابية بالورق والحبر مما يسمح بحفظ مختلف مراحل العملية الحسابية وذلك للتمكن من مراجعتها. وقد يبدو لنا هذا التطور سهلاً؛ ولكنه لم يكن كذلك في الواقع. فقد لعب البطء في الاتصالات بين البشر كما لعبت العقليات المحافظة لدى من تأصل لديهم استخدام لوحات الغبار، دوراً أساسياً في تأخير هذا التبدل أجيالاً بأكملها. ولقد بدأ هذا التبدل، حسب الإقليدسي، في دمشق في القرن العاشر، من دون أن يكون معروفاً في بغداد. وفي القرن الثالث عشر نجد تلميحات إلى استعمال اللوحة الغبارية في كتابات ابن البناء (١٢٥٦ ـ ١٣٢١م). وبابتعاد قليل شرقاً، إلى مراغة، نجد الرياضي العظيم نصير الدين الطوسي المتوفى عام ١٢٧٤م، يُكرِس مؤلفاً بأكمله حول استعمال اللوحات الغبارية[١١]. ومن قبله بنصف قرن تقريباً، قام سلفه شرف الدين الطوسي[١٢] بمجهود كبير لحل

---

(١١) انظر: نصير الدين الطوسي، «جوامع الحساب بالتخت والتراب،» تحرير أحمد سليم سعيدان، الأبحاث، السنة ٢٠، الجزء ٢ (حزيران /يونيو ١٩٦٧)، ص ٩١ و ١٦٤، والسنة ٢٠، الجزء ٣ (أيلول / سبتمبر ١٩٦٧)، ص ٢١٣ ـ ٢٢٩.

(١٢) انظر: الفصل الحادي عشر: «الجبر،» ضمن هذا الجزء من الموسوعة، وانظر أيضاً شرف الدين الطوسي في المراجع.

معادلات الدرجة الثالثة بواسطة حساب اللوحات الغبارية. لكن نظام اللوحات هذا انتهى إلى الزوال. ولم يبق من هذا النظام سوى العمليات الحسابية التي درسناها في المدارس، التي لم يطوها النسيان بعد، على الرغم من استعمال الحاسبات الالكترونية.

إن أهمية تحرير النظام الحسابي الهندي من اللوحات الغبارية لا تقل عن أهمية تفضيل العرب هذا النظام وتبنيهم له على حساب النظام الإصبعي، الذي كما سبق أن أشرنا، استمر طويلاً عبر المفهوم العربي للكسور.

الكسور العادية والكسور العشرية في النظام الهندي

إن مفهوم الكسر $\frac{a}{b}$ هندي. لكنه كان يكتب في الهند $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$.

كما أن العدد $a\frac{b}{c}$ كان يكتب (عمودياً) $\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$، حيث إن الأعداد a وb وc كانت تبقى على هذا الشكل، على اللوحة الغبارية بعد قسمة العدد $ac+b$ على العدد c.

مثلاً ١٩ ÷ ٤ تعطي النتيجة النهائية $\begin{matrix}٤\\٣\\٤\end{matrix}$.

ولقد تعلم العرب هذه التقنية، إلا أنهم احتفظوا بتقنيتهم الخاصة بإبدال الكسر بمجموع عدة كسور صورتها الرقم ١. فقد فهموا مثلاً معنى الكسر $\frac{٣}{٤}$ إلا أنهم فضلوا كتابته على الشكل $\frac{١}{٢}+\frac{١}{٤}$، وهذا ما كتبوه على الصورة الهندية: $\begin{matrix}١\\٢\\١\\٤\end{matrix}$.

لكن هذا الشكل الأخير يترك مجالاً للخلط حيث تجوز قراءته $\frac{١}{٢}\div\frac{١}{٤}$، مما استعجل الميل لاستخدام الشكل العام $\frac{a}{b}$.

إن أولى المراحل التي استطعنا التعرف إليها في هذا التطور كانت تقوم على كتابة $\frac{٣}{٤}$ ٤ مثلاً على الشكل $\frac{٤}{\begin{matrix}٣\\٤\end{matrix}}$، حيث يفصل الخط الأفقي بين العدد الصحيح والكسر. إلا أنه يتوجب أيضاً إبدال $\frac{٣}{٤}$ بـ $\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}$. وحتى $\frac{١}{٢}$ وحده ينبغي أن يكتب $\begin{matrix}\cdot\\١\\٢\end{matrix}$.

ولقد كان ابن البناء، أو من أتوا قبله بقليل في الغرب، أول من تبنوا فكرة الشكل العام للكسر العادي $\frac{a}{b}$ الذي كتبه على الشكل $\frac{a}{b}$ (بخط أفقي يفصل الصورة عن المخرج) لكنه كان يكتب $4\frac{3}{4}$ على الشكل $4\frac{3}{4}$ دون أن يكترث للقيمة المعطاة لكل منزلة.

أما الطوسي، الأبعد باتجاه الشرق فقد فضل مفهوم الكسر $\frac{a}{b}$، مهملاً الفكرة التي تقول بضرورة كون الصورة مساوية للواحد، لكنه استخدم الخط الأفقي الصغير فقط لفصل العدد الصحيح. وعند رياضيين متأخرين، يبدو أنهم لم يؤلفوا أعمالاً خاصة إنما تركوا ملحوظات على هوامش مؤلفات تعود للآخرين، نجد الشكل $a\frac{b}{c}$. ونشير هنا إلى أن الشكل b/c هو تجديد أوروبي متأخر. ويبدو أن الإقليدسي هو أول من كتب حول هذه الكسور في العام ٩٥٢ من عصرنا(١٣).

إن إحدى أهم الفكر في «حساب» الإقليدسي كانت استخدام الكسور العشرية(١٤). ولقد أوحى الإقليدسي بهذا المفهوم كوسيلة عملية حسابية واستعمل إشارة عشرية، وهي إشارة يتوجب استعمالها في كل الحالات. فلقد أدخل أكثر من أربعة عشر كسراً عشرياً، إلا أن الناسخ لم يدون منها سوى اثنين بالإشارة العشرية. وقد وسع استخدام الكسور العشرية إلى أجزاء العشرة على غرار معالجة أجزاء الستين في النظام الستيني. وهذا ما نجد في معالجته المسائل التالية:

أ - عندما يقسم العدد ١٩ على العدد ٢ تكراراً يحصل على:

١٩
٩'٥
٤'٧٥
٢'٣٧٥
١'١٨٧٥
٠'٥٩٣٧

ويقرأ هذه النتيجة النهائية: ٥٩٣٧٥ جزءاً من مئة ألف. ومن ثم، بواسطة مضاعفات متتالية يُرجع العدد الأخير إلى العدد ١٩، مهملاً الأصفار اليمنى لأنها لا تدل على شيء.

ب - عند قسمة العدد ١٣ يحصل بالتتالي على ٦'٥، ٣'٢٥، ١'٦٢٥، ٠'٨١٢٥.

ج - لكي يزيد على العدد ١٣٥ عُشرَهُ ويعيد الكرة على الحاصل مرات عديدة يقوم بما يلي: يضرب العدد بـ ١١ ويقسمه على عشرة فيحصل على ١٤٨'٥. فيمكنه إذ ذاك القول بأنه يضرب بـ ١'١. أما المرحلة الثانية فتعطي ١٤٨'٥ × ١'١ = ١٦٣'٣٥ وهنا يضرب ١٤٨ بـ ١١ وَ ٠'٥ بـ ١'١ ويجمع حاصلي هذين الضربين. وهذه هي الطريقة التي تبناها من أجل ضرب عدد كسري بعدد صحيح. ويتابع حساباته فيحصل على التتالي على: ١٧٩'٦٨٥؛ ١٩٧'٦٥٣٥؛ ٢١٧'٤١٨٨٥. ويقرأ هذه الأعداد مشيراً إلى قيمتها العشرية.

د - لكي ينقص من العدد ١٣ عُشرَهُ ومن الحاصل عُشرَهُ وهكذا دواليك، يبدأ بإبدال

---

(١٣) انظر: الإقليدسي، الفصول في الحساب الهندي، ص ٤٨١ - ٤٨٨. انظر أيضاً الترجمة الإنكليزية: Al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*.

(١٤) انظر الفصل المتعلق بالتحليل العددي وهو الفصل الثاني عشر من هذا الجزء من الموسوعة.

العدد ١٣ بـ ١٣٠ عِشراً ينقص منها من ثم عشرها (أي ١٣ عشراً) مما يعطي ١١٧. ومن ثم يبدل هذا العدد بـ ١١٧٠ جزءاً من مئة يُنقص منها ١١٧... ويُكمل على هذا المنوال حتى الوصول إلى النتيجة النهائية: ٧٦٧٦٣٧' ٧ التي يقرأها ٧ و٦٧٦٣٧ جزءاً من مئة ألف.

التأثير الإغريقي على علم الحساب العربي

بعد الإقليدسي نقل علماء آخرون إلى العربية كل المعارف العلمية الإغريقية التي صادفوها: هللينية كانت أم هلينستية أو رومانية أو حتى بيزنطية. كانت غالبية هذه الأعمال هندسية. إن أهم الأعمال هذه في علم الحساب كانت أجزاءً من **أصول** إقليدس ومقدمة علم الحساب لنيقوماخوس الجرشي (حوالى العام ١٠٠م للميلاد) وأعمال هيرون الإسكندري (حوالى العام ٦٢ للميلاد) وكتاب **في قياس الدائرة** لأرخميدس (٢٨٧ ـ ٢١٢ ق.م).

وسنتعرض في هذه الفقرة لتطور علم الحساب بالاستناد إلى مثل خاص يتعلق بالمتتاليات (Suites) العددية.

تحوي النصوص العربية العديد من أنواع المتواليات (Progressions) العددية مرفقة بالقواعد التي تعطي حد المتوالية مهما كانت منزلته أو التي تعطي مجموع حدودها إلى أي مرتبة. ومن الواضح أن هذه المسائل إغريقية في الأصل. ولقد عالج الهنود متواليات عددية. إلا أن العرب فهموا سريعاً خصائص العلم الإغريقي وأعطوه الأفضلية على ما تبقى من أنظمة. وذلك يعود إلى تميزه بالبراهين المنطقية الصارمة خلافاً للأنظمة الأخرى التي كانت تكتفي بإعطاء القواعد العملية التي ينبغي اتباعها. ويبدو أن العرب قد شغفوا بالبراهين إلى حد كبير حيث نجد عندهم فلسفات أو نماذج فكرية معبرة في هذا المجال، يمكن تسميتها بفلسفات الـ«لماذا؟» أو الـ«كيف؟» أو الـ«ماذا؟».

وهناك متواليات عددية معينة مثل متوالية المضاعفة $(2^n)_{n\in N}$ نجدها في عدد كبير من المؤلفات الحسابية، التي نختار منها:

١ ـ **التكملة**[١٥] لابن طاهر حيث نجد قواعد المجاميع

$$\sum_{r=1}^{n} r,\quad \sum_{r=1}^{n} r^2,\quad \sum_{r=1}^{n} r^3,\quad \sum_{r=1}^{n} r^4$$

بالإضافة إلى بعض الأعداد الشكلية.

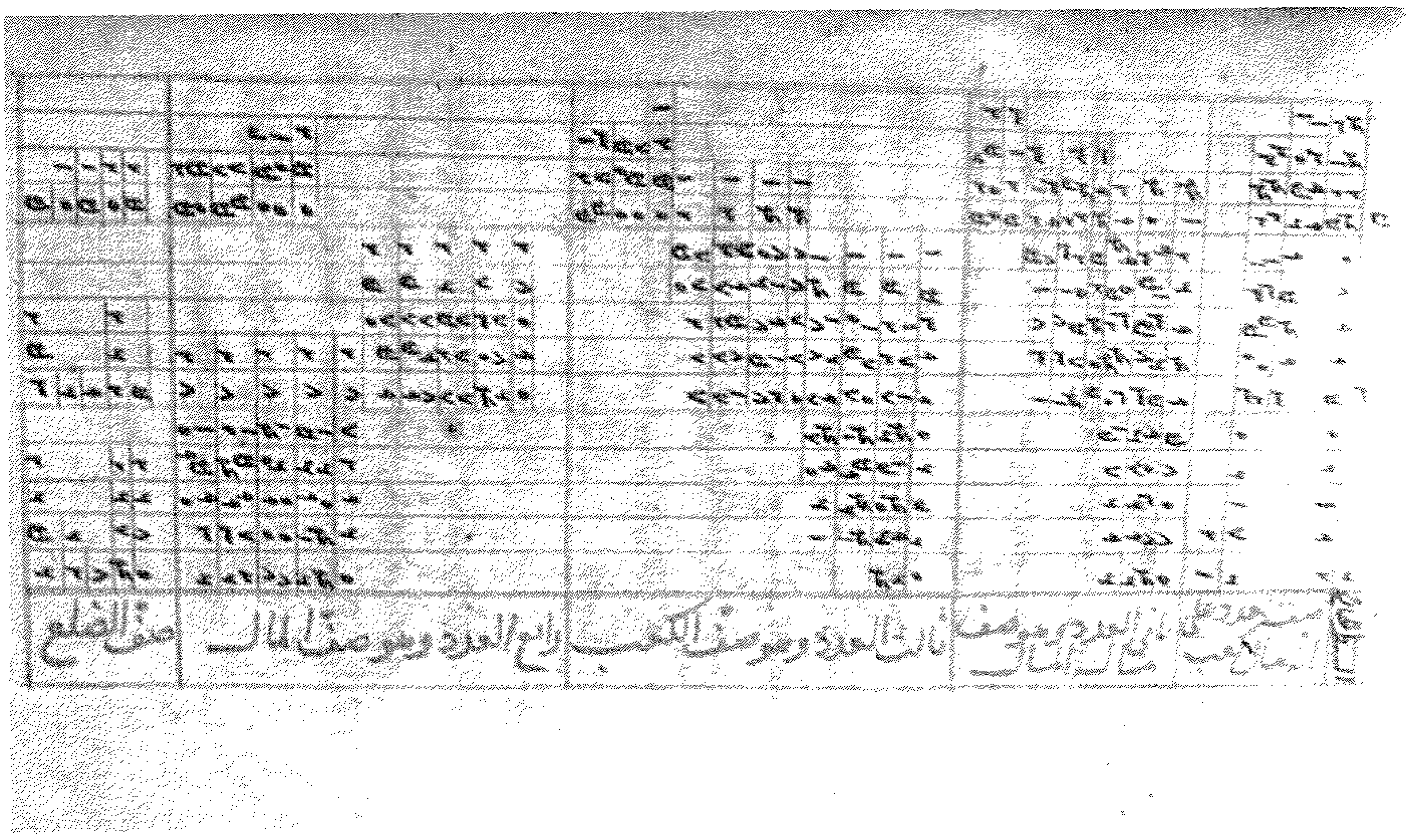
٢ ـ **المراسم**[١٦] للأموي الذي يعرض القواعد نفسها لكنه أكثر تماماً وتماسكاً.

---

(١٥) انظر: البغدادي، **التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة**.

(١٦) هو يحيى بن يعيش الأموي، من الأندلس، عاش في دمشق في القرن الرابع عشر. =

٣ ـ **مفتاح الحساب**(١٧) للكاشي، الذي يقدم لمتهني الحساب خمسين قاعدة، وهي تضم غالبية القواعد المقدمة في المؤلفين السابقين وأحياناً بشكل أكثر انتظاماً؛ وينسب إلى نفسه اكتشاف هذه القواعد وإن كان بعضها يرجع إلى إقليدس حتى.



الصورة رقم (١٠ ـ ١)

غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي، مفتاح الحساب

(توبكابي سراي، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٧٩).

بعد أن اكتشف الكرجي في أواخر القرن العاشر مثلث باسكال والصيغة المعروفة بفك ذي الحدين استطاع الرياضيون استخراج الجذر لعدد صحيح، من أي قوة كان، ووضعوا بعض الصيغ التقريبية للجذور الصم. وهذا يرجع في الحالة الأولى إلى حل المعادلة العددية $x^n = a$ حيث $a \in N$.

وفي هذه الصورة نجد جدول الكاشي لاستخراج الجذر الخامس للعدد:

٤٤ ٢٤٠ ٨٩٩ ٥٠٦ ١٧٩

= انظر: أبو عبد الله يعيش بن إبراهيم الأموي، **مراسم الانتساب في علوم الحساب**، نشر أحمد سليم سعيدان، مصادر ودراسات في تاريخ الحساب العربي؛ ٢ (حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلوم العربية، ١٩٨١).

(١٧) انظر: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 7, pp. 531-533.

ونقدم فيما يلي موجزاً للمجاميع التي نجدها في التكملة مضيفين إليها إكمالات نجدها في المراسم:

١. $$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n}{2}(n+1);$$

$$\sum_{m=a}^{n} m = (a+n).\frac{1}{2}(n-a+1).$$

٢. $$1+3+5+.....+l = \left(\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\right)^2$$

٣. $$2+4+6+...+l = \left(\frac{1}{2}l\right)^2+\frac{1}{2}l$$

٤. $$\sum_{r=2}^{2n+1} 2^r = 2^2+2^3+....+2^{2n+1} = (2^{n+1})^2-4$$

$$\sum_{r=2}^{2n+2} 2^r = 2^2+2^3+.....+2^{2n+2} = 4.(2^{2n+1}-1)$$

٥. $$2.1+2.3+2.5+...+2(2n-1) = 2n^2$$

٦.أ $$\sum_{m=1}^{n} m^2 = n(n+1)\left(\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}\right) = n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1).\frac{1}{3}$$

$$= (n^2+n)\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\right)$$

٦.ب $$\sum_{m=1}^{n} m^2 / \sum_{m=1}^{n} m = \frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$$

٧. $$\sum r^3 = \left(\sum r\right)^2$$

٨. **أعداد المضلعات (Nombres polygonaux):**

في المتوالية الحسابية العامة (١) التالية:

$$1,\ (1+a),\ (1+2a), ...,\ 1+(n-1)\ a... \qquad (١)$$

الحد العام هو $1+(n-1)a$ ومجموع الحدود هو: $n+\frac{1}{2}n(n-1)a$. وعندما نعطي لِ a على التوالي القيم التالية: 1، 2، 3، 4، نحصل (على التوالي) على المتواليات:

$$1, 2, 3, 4, ...$$

وهي متتالية الأعداد الصحيحة،

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

وهي متتالية الأعداد الفردية،

$$1, 4, 7, 10, \ldots$$

$$1, 5, 9, 13, \ldots$$

فإذا جمعنا حدود المتوالية (١) (الأول، ثم الأول والثاني، ثم الأول والثاني والثالث. . .) نحصل تدريجياً على:

$$1,\ (2+a),\ (3+3a),\ (4+6a), \ldots \qquad (٢)$$

وهي متسلسلة جديدة، من السهل أن نرى أن حدّها ذا المرتبة n هو مجموع حدود المتسلسلة (١) حتى المرتبة n، أي $n + \frac{1}{2}n(n-1)a$. وقد أعطى الإغريقيون لحدود هذه المتسلسلة (٢) اسم «الأعداد المضلعة» أو «أعداد المضلعات».

وعند إعطاء التدرج a في المتوالية (٢) القيم 1، 2، 3، 4، نحصل بالتوالي على المتسلسلات:

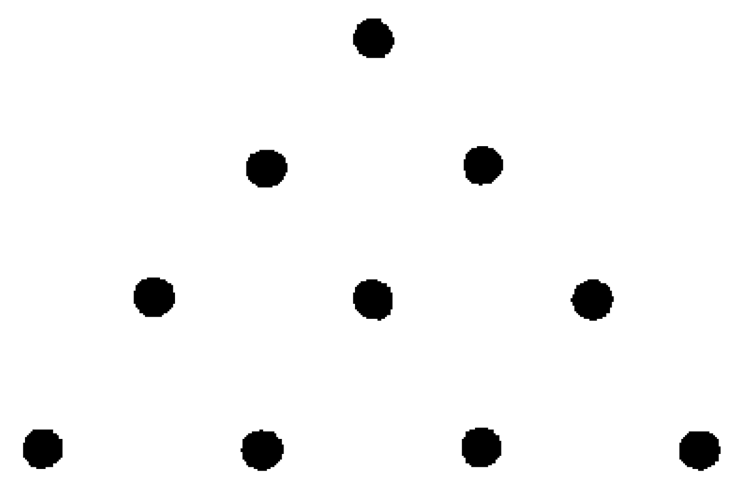
$$1, 3, 6, 10, \ldots \qquad (٢.أ)$$

$$1, 4, 9, 16, \ldots \qquad (٢.ب)$$

$$1, 5, 12, 22, \ldots \qquad (٢.ج)$$

$$1, 6, 15, 28, \ldots \qquad (٢.د)$$

وهذه الفكرة يونانية الأصل، تعود إلى أيام فيثاغورس (القرن السادس ق.م). وهي كمجمل المفاهيم الرياضية اليونانية ذات أصل هندسي، حيث نفترض أن المتسلسلة (٢.أ) قد أنشئت انطلاقاً من بنية كالتالية:



نسمي عناصرها الأعداد المثلثية، (نسبة إلى شكل المثلث) أما المتسلسلة (٢.ب) فتعطي «أعداد المربعات» والمتسلسلة (٢.ج) أعداد المضلعات الخماسية. . . .

ولكن السؤال يطرح حول تحديد الحد العام لكل من هذه المتسلسلات. فبالنسبة إلى (٢) علينا إيجاد المجموع:

$$\sum_{r=1}^{n} \left[r + \frac{1}{2} r(r-1)a \right].$$

ولدينا:

$$\sum_{r=1}^{n}\left[r+\frac{1}{2}r(r-1)a\right]=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)a$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\left[1+\frac{1}{3}(n-1)a\right]$$

بحيث، إذا أعطيت a القيمة 1 نحصل على الأعداد المثلثية:

$$\frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\right).$$

وإذا أعطيت القيمة 2 نحصل على أعداد المربعات.... وهكذا دواليك.

ويُعطي ابن طاهر في التكملة بأسلوب لفظي منمق بالطبع، قواعد حساب جمع n حد من متسلسلات الأعداد «المثلثية» و«المربعية» و«المخمسية»...:

.٩
$$\sum_{m=1}^{n}m^4=\sum_{m=1}^{n}m^2\left[\frac{1}{5}\left(\sum_{1}^{n}m-1\right)+\sum_{1}^{n}m\right]$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

١٠. الأعداد الهرمية (Nombres pyramidaux):

جمع الإغريقيون حدود كل من المتسلسلات (٢.أ)، (٢.ب)... الخ، تدريجياً فحصلوا على متسلسلات جديدة سموا حدودها الأعداد الهرمية. فعند الجمع التدريجي لحدود المتسلسلة (٢) مثلاً، نحصل على المتسلسلة:

(٣) $1,\ (3+a),\ (6+4a),\ (10+10a),\dots$

وهي متسلسلة الأعداد الهرمية. فإذا أُعطيت a على التوالي القيم 1، 2، 3 و4، نحصل توالياً على المتسلسلات (٣.أ)، (٣.ب)، (٣.ج) و (٣.د) التالية:

(٣.أ) $1, 4, 10, 20, \dots$

وهي متسلسلة المجسم الثلاثي؛

(٣.ب) $1, 5, 14, 30, \dots$

وهي متسلسلة المجسم الرباعي؛

(٣.ج) $1, 6, 18, 40, \dots$

وهي متسلسلة المجسم الخماسي؛

(٣.د) $1, 7, 22, 50, \ldots$

وهي متسلسلة المجسم السداسي.

ويعالج ابن طاهر متسلسلات من هذا القبيل فيحصل على نتائج نقدم بعضاً منها فيما يلي:

أ ـ الحد ذو المرتبة n من (٢.ج) هو: $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

ب ـ الحد ذو المرتبة n من (٢.د) هو: $2n^2 - n$

١١. يقدم ابن طاهر العلاقات بين أعداد المضلعات على الشكل التالي:

أ ـ المربع من المرتبة n = المثلث من المرتبة n + المثلث من المرتبة $(n-1)$ أي:

$$n^2 = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1)$$

ب ـ خماسي الأضلاع من المرتبة n = (رباعي الأضلاع من المرتبة n + المثلث من المرتبة $(n-1)$)، أي:

$$\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = n^2 + \frac{1}{2}n(n-1)$$

ج ـ سداسي الأضلاع من المرتبة n = (المربع من المرتبة n + ضعف المثلث من المرتبة $(n-1)$)، أي:

$$2n^2 - n = n^2 + n(n-1)$$

د ـ بشكل عام:

المضلع من المرتبة n − المضلع من المرتبة $(n-1) = (n-1)a + 1$

والفكرة في الأصل يونانية، إلا أن ابن طاهر قام بتوسيعها وتعميمها. أما الأموي فقد ذهب إلى أبعد من ذلك حيث حسب مجموع المتالية (٣):

$$S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)a$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\left[1 + \frac{1}{4}(n-1)a\right].$$

مما يسمح باحتساب المتاليات (٣.أ)، (٣.ب)، (٣.ج) و (٣.د) بإعطاء a القيمة المناسبة.

ويلخص الأموي القواعد المتعلقة بالأعداد المضلعة والهرمية كما يلي:

أ ـ في المتاليات المضلعة يعادل الحد من المرتبة n القيمة: $\frac{1}{2}n[2 + (n-1)a]$

ومجموع الحدود هو:

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)\ [3+(n-1)a].$$

ب - يعادل الحد ذو المرتبة n في المتتاليات الهرمية القيمة:

$$\frac{1}{6}n(n+1)[3+(n-1)a],$$

ومجموع الحدود حتى هذه المرتبة هو:

$$S_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[4+(n-1)a].$$

ويقوم بتصنيف لجميع المتواليات حسب قيمة حدها العام وقيمة مجموع حدودها:

(١) المتواليات العددية: حيث الفرق بين حد والحد التالي ثابت.

(٢) المتواليات الطبيعية: حيث الفرق بين حد والحد التالي ثابت ومساوٍ لِ 1.

(٣) المتواليات الهندسية: حيث نسبة حد إلى الحد السابق ثابتة.

(٤) المتواليات المضاعفة: حيث نسبة حد إلى الحد السابق تساوي 2.

(٥) المتواليات الصُوَرية: متواليات الأعداد المضلعة والهرمية.

(٦) المتواليات الصاعدة: مثل المتوالية $r(r+1)$، أي مثل:

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4, \ldots$$

وفيما يتعلق بالمتواليات من هذا النوع الأخير، يُعطي القواعد التالية:

(أ)
$$1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(ب)
$$1.3+3.5+5.7+\ldots.+N(N+2) = \frac{1}{3}N\left(\frac{N+2}{2}\right)(N+4)+\frac{1}{2}$$

حيث يكون N عدداً مفرداً.

(ج)
$$2.4+4.6+6.8+\ldots.+M(M+2) = \frac{1}{3}M\left(\frac{M+2}{2}\right)(M+4)$$

عندما يكون M عدداً زوجياً.

وهي قواعد يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$1.3+3.5+\ldots+(2n-1)(2n+1) = \frac{1}{6}(2n-1)(2n+1)(2n+3)+\frac{1}{2}\ ,$$

$$2.4+4.6+\ldots+2n(2n+2) = \frac{4}{3}n(n+1)(n+2).$$

أما الكاشي فيعالج نفس هذه الأنواع من المتواليات تقريباً ولكن أفكاره بهذا الخصوص أكثر وضوحاً ووعيه للمسائل أكثر عمقاً حيث يقدم تعميمات أفضل.

ونظن أننا وصلنا في هذا العرض إلى حد ينبغي أن نلقي عنده نظرة تاريخية إلى بعض النقاط. نشير هنا إلى أن الفصل المتعلق بالمجاميع والموجود في **الباتيغانيتا** *(Patiganita)*(١٨)، لا يعالج سوى المتواليات وهو موضوع عالجه الأموي في فصل مشابه. وقد عالجت الرياضيات الهندية مجاميع المتسلسلات 2^r وr^2 وr^3 و$\frac{1}{2}r(r+1)$ وتوافيق متفرقة من هذه المتسلسلات. ومن جهة أخرى، فإن وجود المتواليات في المسائل الرياضية البابلية هو أمر مؤكد. ونكرر القول بأن اليونانيين أعطوا قواعد جمع المتواليات العددية. فلقد حددها هيبسيكليس (Hypsicles) في حوالى العام ١٧٥ قبل عصرنا. وقد أعطى ثيون السميرني (Théon de Smyrne)، في القرن الثاني من عصرنا، قاعدة المجموع $\sum r^2$ وقواعد خاصة ببعض المتتاليات المضلعة. وقد عالج نيقوماخوس الجرشي (حوالى ١٠٠م) الأعداد المضلعة بشكل يُمَهد لتكملة ابن طاهر. كما أن ديوفنطس قد كتب مؤلَّفاً في الأعداد المضلعة وصلتنا بعض أجزائه.

ولكن نيقوماخوس يكتفي بمعالجة عرضية للأعداد الهرمية بينما يعالج «جمبليق» (Jambliqu) (بين العامين ٢٨٤ و٣٣٠م) بعمق الأعداد المضلعة والأعداد الهرمية.

ويبدو أن ابن طاهر والأموي قد استقيا من مصادر يونانية. كما يبدو من الصعب تحديد ما قدماه من أعمال أصيلة في هذا المجال. لكن تقديم النتائج اليونانية حسب العرض الذي يقدمه فيها ديكسون (Dickson)(١٩) يدعو إلى التفكير بأن العرب قاموا بدرس المتتاليات بطريقة أصيلة. ومهما يكن من أمر، وحتى لو كان الإسهام الخلاق العربي في هذا المجال ضعيفاً، إلا أن مجرد جنيهم للمعارف السابقة وجمعها وتقديمها للعالم ككل حي ومتماسك، جاهز للتطوير المستقبلي، يُعتبر إنجازاً فائق الأهمية. وهذه النتيجة تصح في مجالات رياضية أخرى مثل مجال حسابات النسب وحسابات الأعداد غير المنطقة، وهي مجالات لا غنى عن معالجتها في فصول أخرى من هذا المؤلَّف ولا مجال للتعرض لها في حدود دراستنا هذه. إلا أننا فيما تبقى من هذه الدراسة، سنعرض بعضاً من المسائل الحسابية العائدة للقرون الوسطى التي بناها الرياضيون ترويضاً للفكر وأحياناً للتسلية، ونقدمها في حلة حسابية هي غير حلتها المسرحية الأصلية.

---

(١٨) انـظـر: Sridhara, *The Pātīganita of Śrīdharâcârya,* edited with english translation by Kripa Shankar Shukla, Hindu Astronomical and Mathematical Texts Series; no. 2 (Lucknow, India: Lucknow University, Department of Mathematics and Astronomy, 1959),

وقد عاش المؤلف بين العامين ٨٥٠ و٩٥٠ من عصرنا.

(١٩) انظر: Leonard Eugene Dickson, *History of Theory of Numbers,* Carnegie Institution of Washington; Publication no. 256, 3 vols. (New York: Chelsea, 1952), vol. 2, p. 4, reprinted (1966).

المسألة الأولى: راجع ابن طاهر في التكملة[٢٠].

لدينا ثلاثة أعداد a وb وc معطاة. جد عدداً $N(N \leq 105)$ بحيث يكون:

$$N \equiv a(mod\ 5) \equiv b(mod\ 7) \equiv c(mod\ 3).$$

الجواب: العدد هو $N = 21a + 15b + 70c - 105k$، حيث يكون k أي عدد بشرط أن تكون النتيجة N أقل من 105.

قبل أن نلقي نظرة على برهان المؤلف، نلاحظ ما يلي:

$$21a + 15b + 70c - 105k \equiv a(mod\ 5) \equiv b(mod\ 7) \equiv c(mod\ 3) \quad (١)$$

$$21.a = 3.7.a \equiv a(mod\ 5); \quad 15.b = 3.5.b \equiv b(mod\ 7); \quad 70.c = 2.7.5.c \equiv c(mod\ 3) \quad (٢)$$

يشرح المؤلف طريقته على الشكل التالي: لكي نجد عدداً مجهولاً N بحيث يكون مثلاً:

$$N \equiv a(mod\ 10) \quad و \quad N \equiv b(mod\ 13) \quad و \quad N \leq 130$$

(حيث 10 و13 عددان ليس لهما قاسم مشترك غير الواحد)، بإمكاننا أن نأخذ:

$$13ma + 10nb - 130k\ .$$

حيث يحقق العددان m و n الشرطين: $13m \equiv 1(mod\ 10)$ و $10n \equiv 1(mod\ 13)$

فنأخذ مثلاً $m = 7$ و $n = 4$ (اللذان يحققان هذين الشرطين) فيكون لدينا:

$$N = 91a + 40b - 130k\ .$$

هذه المسألة هي بديهياً مسألة تطابق (Congruence) حسابي «بقياس». والتطابق الحسابي من المفاهيم التي ظهرت مبكراً جداً في العالم العربي والتي استخدمت للتدقيق في بعض النتائج الحسابية (كحذف الرقم ٩ عند التدقيق في عمليات ضرب الأعداد الصحيحة). وحسب نيدهام (Needham)[٢١]، نجد في أحد المؤلفات الصينية العائدة إلى القرن الرابع قبل عصرنا معالجة لمسألة إيجاد عدد يعطي بقية تعادل ٢ عند قسمته على ٣ و ٣ عند قسمته على ٥ و ٢ عند قسمته على ٧. والحل المقدم لهذه المسألة يشبه إلى حد بعيد حل ابن طاهر. لكن هذا التشابه لا يمكننا من الاستنتاج بأن فكرة هذا الرياضي مقتبسة من الصين. وذلك لأن نيقوماخوس الجرشي، في القرن الأول من عصرنا كان قد عالج موضوعاً مشابهاً، كما قام براهماغوبتا في القرن السابع بعمل مماثل.

---

(٢٠) انظر: البغدادي، التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة.

(٢١) Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, with the research assistance of Wang Ling, 6 vols. in 12 (Cambridge, [Eng.]: Cambridge University Press, 1954-1986), vol. 3, p. 119.

ويبدو أن مسائل «الرياضيات المبسطة» أو «المسلية» كانت تشيع بسرعة وتهم عدداً كبيراً من الناس في مختلف الأماكن. ولم تكن الحلول المقدمة لهذه المسائل من قبل الشعوب المختلفة تتفق دائماً أو تختلف دائماً. ونسوق من هذه المسائل اثنتين:

المسألة الثانية: جد العدد الأصغر من الأوزان التي تتضاعف متوالية بحيث يكون وزنها مجتمعة أربعين وحدة؛ والجواب هو: ٤ أوزان مؤلفة من ١، ٣، ٩ و٢٧ وحدة.

وعلى حد علمنا، لا توجد هذه المسألة إلا في مخطوطة واحدة هي تلك العائدة لابن غازي المكناسي[٢٢].

المسألة الثالثة: قاض كان عليه تقسيم إرث هو عبارة عن ١٧ جملاً بين ٣ أشخاص بحيث يأخذ الأول نصفها والثاني ثلثها والثالث تُسعها، وأما الباقي فيأخذه القاضي، علماً بأنه من غير المقبول نحر أو اقتسام أي من هذه الجمال. والحل يكمن في أن يضيف القاضي جَمَلَهُ إلى هذا الإرث فيصبح ١٨ جملاً، فيأخذ الوريث الأول ٩ والثاني ٦ والثالث ٢ ويستعيد القاضي الجمل الذي أضافه. والحل ليس رياضياً إلا أنه يرضي الجميع.

(٢٢) يشرح ابن غازي المكناسي الفاسي في كتابه مؤلَفاً أكثر قدماً مكتوب شعراً. انظر: أبو عبد الله محمد بن أحمد بن غازي، بغية الطلاب في شرح منية الحساب، لابن غازي المكناسي الفاسي، تحقيق ونشر محمد السويسي، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٤ (حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨٣).

ـ ١١ ـ

الجبـــر

رشدي راشد(*)

بداية الجبر: الخوارزمي

إن ظهور كتاب الخوارزمي في بداية القرن التاسع ـ ما بين ٨١٣ و٨٣٠م[١] ـ حدث مميز في تاريخ الرياضيات. فللمرة الأولى تظهر كلمة «الجبر» في عنوان[٢]، وذلك للدلالة على مادة رياضية متميزة تمتلك تعابيرها التقنية الخاصة. عن هذا الكتاب يقول المؤلف نفسه، محمد بن موسى الخوارزمي، الرياضي والفلكي والعضو المرموق من أعضاء بيت الحكمة في بغداد: «ألفت من حساب الجبر والمقابلة كتاباً مختصراً حاصراً للطيف الحساب وجليله»[٣].

(*) مدير مركز تاريخ العلوم والفلسفات العربية والعصر الوسيط (المركز القومي الفرنسي للبحث العلمي) وأستاذ في جامعة طوكيو.

قام بترجمة هذا الفصل نقولا فارس.

(١) يستهل الخوارزمي كتابه بذكر بذل وتشجيع الخليفة المأمون للآداب والعلوم مما حثه على تأليف هذا الكتاب. ولقد تولى المأمون الخلافة بين عامي ٨١٣ و٨٣٣م. فلا بد أن يكون الكتاب قد ألف خلال هذه الفترة. انظر: أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي، **كتاب الجبر والمقابلة**، تحقيق ونشر علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد (القاهرة: الجامعة المصرية، كلية العلوم، ١٩٣٩).

(٢) عنوان الكتاب هو **كتاب الجبر والمقابلة**. نُذكر هنا بأن تعبيري «الجبر» و«المقابلة» يشيران في الوقت نفسه إلى مادة علمية وإلى عمليتين يمكن فهمهما استناداً إلى المثل التالي: إذا أخذنا المعادلة:

$x^2 + c - bx = d$ حيث $c > d$؛

فإن الجبر هو عملية نقل الحد المطروح إلى الطرف الآخر بحيث تصبح المعادلة: $x^2 + c = bx + d$
وبالمقابلة تختزل الحدود المتشابهة فتصبح على الشكل التالي:

$$x^2 + (c - d) = bx.$$

(٣) انظر: المصدر نفسه، ص ١٦.

إنه لحدث عظيم، باعتراف مؤرخي الرياضيات، القدامى منهم والمحدثون. ولم تخفَ أهمية هذا الحدث على رياضيي ذلك القرن[٤] أو القرون التي تلته. وما انفك كتاب الخوارزمي هذا يشكل مصدر إلهام، لا للرياضيين بالعربية والفارسية فحسب، إنما أيضاً باللغة اللاتينية وبلغات أوروبا الغربية، حتى القرن الثامن عشر للميلاد. لكن هذا الحدث يأتي بمفارقة ظاهرية. فإن الجدة في مفاهيم وفي تعابير الكتاب، كما في تنظيمه، لم تترافق مع أية صعوبة في التقنيات الرياضية المستخدمة، وذلك قياساً على ما نرى في المؤلفات الرياضية الضخمة كتلك العائدة لإقليدس وديوفنطس على سبيل المثال. لكن هذه البساطة التقنية تعود بالتحديد إلى الإدراك الرياضي الجديد للخوارزمي. إن جذور أحد عناصر مشروعه تمتد إلى ما قبله بحوالى العشرين قرناً، في الرياضيات البابلية، ويوجد عنصر ثانٍ من هذا المشروع في أصول إقليدس وعنصر ثالث في حساب ديوفنطس. لكننا لا نجد في أي عمل سابق إعادة تأليف لهذه العناصر بمثل هذا الأسلوب. فما هي هذه العناصر وما هو هذا التنظيم؟

إن هدف الخوارزمي واضح، لم يكن إطلاقاً في تصور من سبقه؛ ويتلخص هذا الهدف بإنشاء نظرية معادلات قابلة للحل بواسطة الجذور، يمكن أن تُرجَع إليها مسائل علمَي الحساب والهندسة على السواء، وبالتالي يمكن استخدامها في مسائل الاحتسابات والتبادلات التجارية ومسائل الإرث ومسح الأراضي... إلخ. يستهل الخوارزمي القسم الأول من كتابه، بتحديد ما نسميه اليوم «التعابير الأولية» لنظريته؛ هذه النظرية اقتصرت على معالجة المعادلات من الدرجة الأولى والثانية وذلك انسجاماً مع متطلبات الحل بواسطة الجذور ومع مستوى معارفه في هذا المجال. وهذه التعابير الأولية كانت: المجهول الذي سماه «الجذر» أو «الشيء» ومربع المجهول والأعداد العقلانية (المنطقة) الموجبة والقوانين الحسابية $\pm$، $\times$، $\div$، $\sqrt{}$، وعلاقة المساواة. ومن ثم أدخل الخوارزمي مفاهيم: معادلة الدرجة الأولى، ومعادلة الدرجة الثانية وثنائيات الحدود وثلاثياتها الملازمة لهذه المعادلات والشكل المنتظم للمعادلة[٥] والحلول الطرائقية (Algorithmiques)[٦] وبرهان صيغة الحل. إن

---

(٤) فقد كتب أبو كامل بخصوص الخوارزمي: «هو أول من توصل لكتاب الجبر والمقابلة وهو من بدأه واخترع جميع ما فيه من أسس». انظر: أبو كامل، مخطوطة قرة مصطفى، ٣٧٩، الورقة ٢ ظ. ولقد كتب أبو كامل أيضاً: «لقد أثبتُّ في كتابي الثاني، الوصايا بالجبر، الحجة على أن السطوة والأسبقية في الجبر والمقابلة هي لمحمد بن موسى الخوارزمي ورددت طيش المدعو ابن برزة الذي ينسبه لعبد الحميد والذي يدعي بأنه جده». انظر: مصطفى بن عبد الله حاجي خليفة، كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون، عني بتصحيحه محمد شرف الدين يالتقايا ورفعت بيلكه الكليسي، ٢مج (استانبول: طبع بعناية وكالة المعارف، ١٩٤١ ـ ١٩٤٣)، مج ٢، ص ١٤٠٧ ـ ١٤٠٨. وبإمكاننا تقديم المزيد من الشهادات التي تكثر في هذا المعنى. فسنان بن الفتح الذي لا يذكر في مقدمة كتيبه سوى الخوارزمي، يؤكد أن الجبر يعود له: «ألف محمد بن موسى الخوارزمي كتاباً أسماه الجبر والمقابلة».

(٥) نقول اليوم أيضاً الشكل «الطبيعي» أو «القانوني» (Canonique). (المترجم).

(٦) الكلمة غربية مشتقة من اسم الخوارزمي، التعبير بالعربية: «الخوارزميات». (المترجم).

مفهوم المعادلة يظهر في كتاب الخوارزمي لكي يدل على فئة لانهائية من المسائل، لا كما يظهر مثلاً عند البابليين، في مجرى حل هذه أو تلك من المسائل. ومن جهة أخرى، فإن المعادلة لا تُولد في مجرى حل المسائل المطروحة كما عند البابليين أو عند ديوفنطس لكنها تتقدم منذ البدء انطلاقاً من تعابير أولية، تنتج عن ترتيبها وتوفيقاتها جميع الصيغ الممكنة لهذه المعادلة. فقد أعطى الخوارزمي، مباشرة بعد تقديمه للتعابير الأولية، الأصناف الستة التالية للمعادلات:

$$ax^2 = bx \quad , \quad ax^2 = c \quad , \quad bx = c \ ,$$

$$ax^2 + bx = c \ , \quad ax^2 + c = bx \ , \quad ax^2 = bx + c$$

ومن ثم أدخل مفهوم ما نسميه اليوم «الصيغة المنتظمة»(٧) فارضاً إرجاع كل من هذه المعادلات إلى الصيغة الطبيعية التي تقابلها، حيث تأخذ المعادلات ثلاثية الحد مثلاً الأشكال التالية:

$$x^2 + px = q \quad , \quad x^2 = px + q \quad , \quad x^2 + q = px. \qquad (١)$$

بعد ذلك، يُدخِل الخوارزمي خوارزميات الحلول. وهنا يعالج كل حالة على حدة ويحصل على صيغ مكافئة للتعابير التالية:

$$x = \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2} \ , \ x = \frac{p}{2} + \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} \ , \ x = \frac{p}{2} \pm \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]^{\frac{1}{2}}$$

إذا كان $q < \left(\frac{p}{2}\right)^2$

وفي الحالة الأخيرة هذه يحدِد(٨) أنه إذا كان $q = \left(\frac{p^2}{2}\right)$، «فجذر المال (أي المربع) مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان»؛ وإذا كان $q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$ «فالمسألة مستحيلة».

كما أن الخوارزمي قد برهن مختلف صيغ الحلول، لا جبرياً بل عن طريق مفهوم تساوي المساحات. وفي هذا المجال، من المحتمل أن يكون قد استوحى معرفة حديثة العهد له بـ أصول إقليدس الذي ترجمه إلى العربية زميله في «بيت الحكمة» الحجاج بن مطر. وقدم الخوارزمي كلاً من هذه البراهين بوصفها «علة» الحل. ولم يكتف باشتراط تقديم برهان لكل من الحالات المطروحة، بل اقترح أحياناً برهانين مختلفين لنفس الصنف من المعادلات. إن هذا التطلب يظهر بوضوح المسافة التي أضحت تفصل الخوارزمي لا عن البابليين فحسب،

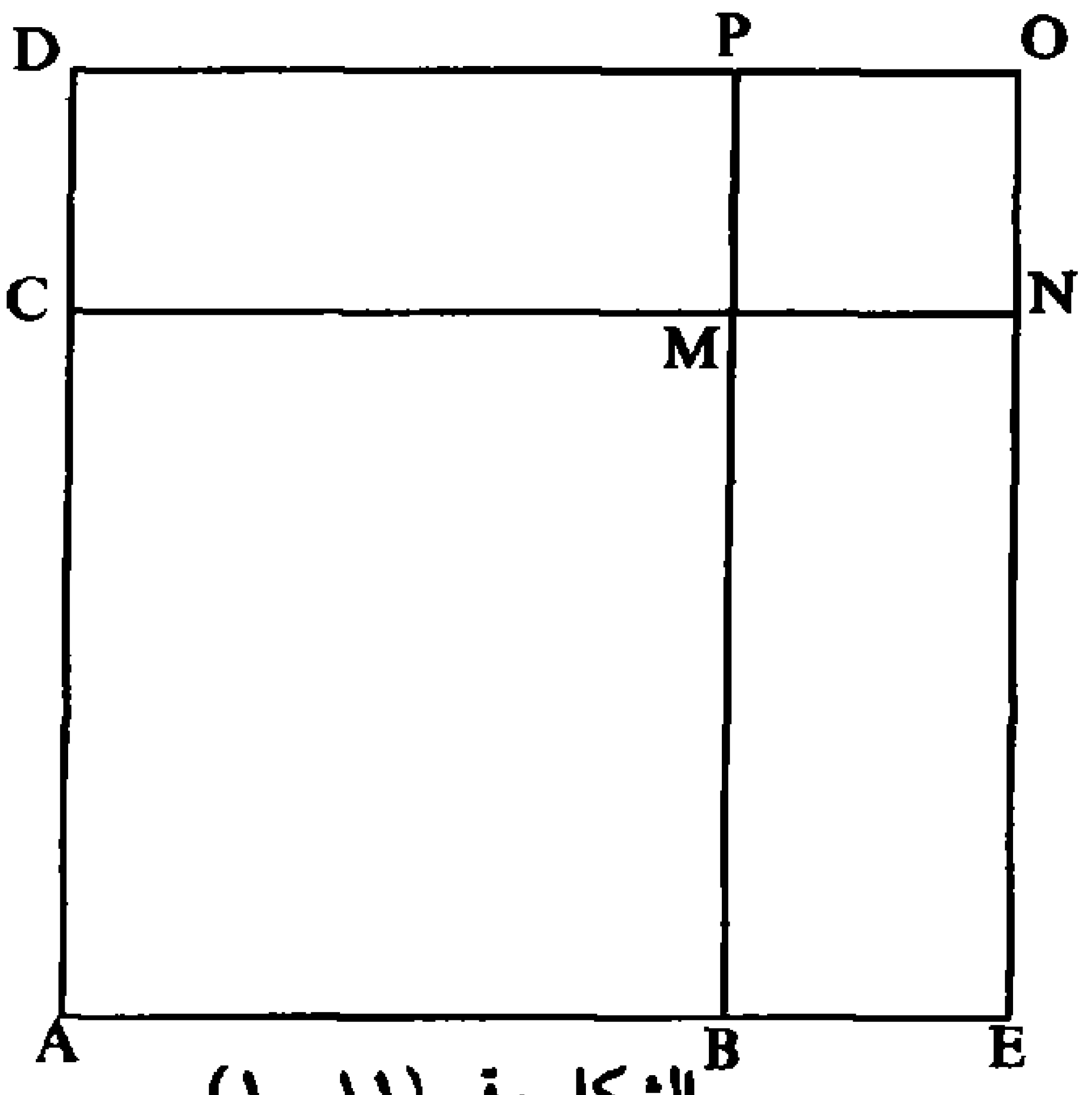
(٧) انظر الهامش رقم (٥) السابق.

(٨) انظر: الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ص ٢٠ ـ ٢١.

وإنما، استناداً إلى المظهر المنهجي لهذا التطلب، عن ديوفنطس أيضاً.

فبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + px = q$ مثلاً، يأخذ قطعتين مستقيمتين متعامدتين: $AB = AC = x$ ومن ثم يأخذ $CD = BE = \frac{p}{2}$ الشكل رقم (١١ ـ ١). فإذا كان مجموع المساحات $ABMC$ و $BENM$ و $DCMP$ يساوي q فمساحة المربع $AEOD$ تساوي $(\frac{p}{2})^2 + q$ ويكون بالتالي[٩]:

$$x = \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2}.$$



الشكل رقم (١١ ـ ١)

إن مفاهيم هذا الميدان الرياضي الجديد، وخاصة مفهوم «الشيء» أي المجهول، لا تشير عند الخوارزمي إلى كائن محدد خاص، إنما إلى كائن مجرد يمكن أن يكون رقمياً أو هندسياً دون أي فارق. أضف إلى ذلك أن طرق حلوله (خوارزمياته) هي أيضاً مواضيع مجردة في عملية الحل. وهنا تكمن العناصر الأساسية من إسهام الخوارزمي. فلقد بات من المتوجب، بالنسبة إليه، إرجاع أي مسألة يعالجها الجبر، حسابية أكانت أم هندسية، إلى مسألة بمجهول واحد، من الدرجة الثانية على الأكثر، معاملاتها أعداد منطقة موجبة. بعد ذلك يتوجب تطبيق العمليات الجبرية ـ المناقلة والاختزال ـ لكي توضع المعادلة على شكلها المنتظم، وعند ذلك تجوز فكرة الحل كإجراء تنفيذي بسيط للخوارزمية المناسبة لهذا الشكل. بعد ذلك يبرر صيغة الحل رياضياً، عن طريق نموذج برهان هندسي أولي. وبوصوله إلى هذا الحد يستطيع الخوارزمي أن يكتب أن: «كل ما يُعمل به من حساب الجبر والمقابلة، لا بد أن يُخرجك إلى أحد الأبواب الستة التي وصفت في كتابي هذا»[١٠].

وبعد هذه المعالجة للمعادلات يقوم الخوارزمي بدراسة مقتضبة لبعض خصائص تطبيق القوانين الابتدائية لعِلم الحساب على التعابير الجبرية الأبسط، فيدرس ضرب العوامل من النوع:

$$(a \pm bx).(c \pm dx)$$

(٩) المصدر نفسه، ص ٢١ ـ ٢٢.
(١٠) المصدر نفسه، ص ٢٧.

حيث تكون a، b، c، وd أعداداً منطقة (ضمن المجموعة Q_+).

ومهما بدت هذه الدراسة بدائية فهذا لن ينقص من كونها المحاولة الأولى المكرسة للحساب الجبري، بصفته الجبرية. ذلك لأن عناصر هذا الحساب توجد عنده كمواضيع لفصول قائمة بذاتها نسبياً. وقد أَتْبَعَ الخوارزمي هذه الفصول بأخرى يعمد فيها إلى تطبيق النظرية التي أنشأها من أجل حل المسائل العددية والهندسية قبل معالجته في النهاية المسائل المتعلقة بالإرث والتعاقب، حيث يلاقي بعض مسائل التحليل السيال (غير المحدد).

هكذا يبدو الجبر إذن في بدايته، كنوع من الحساب أكثر شمولية مما سُمِي «باللوجستية»، لأنه يسمح بحل مسائلها بمزيد من الدقة والصرامة وذلك بفضل مفاهيمه، كما أنه أيضاً أكثر شمولية من هندسة مِترية (قياسية). هذا الحقل العلمي الجديد هو في الواقع نظرية للمعادلات الخطية والتربيعية ذات المجهول الواحد القابلة للحل بواسطة الجذور، تتناول الحسابات الجبرية على التعابير الجبرية الملازمة لهذه المعادلات، دون أن تكون فكرة الحدوديات (Polynômes، أو كثيرات الحدود) قد أُدركت بعد.

خلفاء الخوارزمي وتطور الحساب الجبري

ولكي نُدرك جيداً الفكرة التي كوّنها الخوارزمي حول هذا الحقل العلمي الجديد ومدى خصوبة هذا الحقل ينبغي بالطبع ألا نكتفي بمقارنة كتابه مع المؤلفات الرياضية القديمة، بل أن نتفحص أيضاً تأثيره في معاصريه ومن أتوا بعده. عند ذلك فقط سيتصب هذا الكتاب بكل هامته مرتدياً بعده التاريخي. ونشير هنا إلى أن أحد الملامح الأساسية لهذا الكتاب هو كونه قد أثار، فور صدوره، تياراً من الأبحاث الجبرية. فابن النديم كاتب **الفهرست** قد ترك، ومنذ القرن العاشر، لائحة طويلة بمعاصري الخوارزمي وخلفائه الذين تابعوا بحثه. تضم هذه اللائحة ابن ترك وسند بن علي، والصيدناني، وثابت بن قرة، وأبا كامل وسنان بن الفتح والحبوبي وأبا الوفاء البوزجاني. وعلى الرغم من ضياع العديد من مؤلفات هؤلاء إلا أن ما توصل منها إلى يومنا يكفي لإعادة رسم الخطوط الكبرى لهذا التقليد. ولا شك بأن حدود هذا الفصل لن تسمح لنا بتحليل كل من هذه الإسهامات، إلا أننا سنحاول فقط إظهار أبرز المحاور لتطور الجبر من بعد الخوارزمي.

لقد شهدت الفترة التي عاش خلالها الخوارزمي والفترة التي تلتها مباشرة، توسعاً في الأبحاث التي بدأها والتي تناولت ميادين: نظرية المعادلات التربيعية، الحسابات الجبرية، التحليل غير المحدد وتطبيق الجبر على مسائل الإرث والاقتسام... إلخ. ولقد تطورت الأبحاث التي تناولت نظرية المعادلات نفسها، في اتجاهات متعددة. أول هذه الاتجاهات هو ذلك الذي رسمه الخوارزمي نفسه، لكن مع تحسن في البراهين المعتمدة على نموذج

هندسي: وهو الاتجاه الذي اتبعه ابن ترك(١١)، الذي لم يضف جديداً إلى البراهين إنما استعادها بمزيد من التركيز. أما الاتجاه الذي اتخذته أبحاث ثابت بن قرة بعد ذلك بقليل فأكثر أهمية من التي قام بها سابقه. ذلك أن ابن قرة قد عاد في الواقع إلى **أصول** إقليدس محققاً هدفين: تحقيق براهين هندسية أشد صلابة وتقديم ترجمة هندسية لمعادلات الدرجة الثانية. والجدير بالذكر هنا أن ابن قرة هو أول من ميز بوضوح بين الطريقتين الجبرية والهندسية، وأنه سعى ليبرهن أنهما تؤديان إلى النتيجة نفسها، وذلك بتفسيره الهندسي للطرائق الجبرية. فإن ابن قرة يبدأ بتبيان أن المعادلة $x^2 + px = q$ يمكن أن تحل بواسطة القضية السادسة في المقالة الثانية من **الأصول**. وفي نهاية برهانه يقول: «وهذا المسلك موافق لمسلك أصحاب الجبر»(١٢). ويعيد الكرة بالنسبة إلى المعادلتين $x^2 + q = px$ و$x^2 = px + q$ مستخدماً على التوالي القضية الخامسة في المقالة الثانية والقضية السادسة في المقالة الثانية من **الأصول**؛ ويبرهن بالنسبة إلى كل من هاتين المعادلتين توافق هذا الحل مع الحل الجبري ويقول: «وسبيل هذه المسألة سبيل التي قبلها في موافقة طريق استخراجها بالهندسة طريق استخراجها بالجبر»(١٣).

ويؤكد خلفاء ابن قرة هذه النتائج. فقد كتب أحدهم: «وقد تبين مما قدمنا أن التدبير الذي خرجت به أضلاع الأموال المجهولة في كل واحد من هذه المقترنات الثلاثة هو التدبير الذي أورده إقليدس في أواخر المقالة السادسة من كتابه في **الأصول**، وهو إضافة سطح متوازي الأضلاع إلى خط معلوم يزيد على تمامه أو ينقص عنه مربعاً، وذلك أن ضلع المربع الزائد هو ضلع المال المجهول في المقترن الأول، وفي المقترن الثاني هو ضلع المربع الناقص، وفي المقترن الثالث هو مجموع الخط المضاف إليه السطح وضلع المربع الزائد وذلك ما أردنا بيانه»(١٤).

وسوف يكون لنا عودة للتذكير بترجمة ابن قرة الهندسية لمعادلات الخوارزمي، حيث ستظهر أهميتها الخاصة في تطور نظرية المعادلات الجبرية. أما الآن فسوف نشير إلى ترجمة من نوع آخر، تزامنت تقريباً مع الأولى، وأثرت أيضاً بشكل أساسي في تطور النظرية نفسها: نقل مسائل الهندسة بتعابير تعود للجبر. فلم يكتفِ الماهاني، وهو معاصر لابن

---

(١١) انظر: Aydin Mehmed Sayili, *Logical Necessity in Mixed Equations by 'Abd al-Ḥamid Ibn Turk and the Algebra of His Time*, Türk Tarih Yayinlarídan; ser. 7, no. 41 (Ankara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1962), pp. 145 sqq.

(١٢) انظر: ثابت بن قرة، **في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية** (مخطوطة توبكابي سراي، أحمد الثالث، ٣٠٤١)، الورقة ٢٤٥ظ.

(١٣) المصدر نفسه، الورقة ٢٤٦ظ.

(١٤) مخطوطة مجهولة المؤلف، رقم ٥٣٢٥، اسطان قدس، مشهد، الورقة ٢٩و - ظ، وهي مخطوطة منسوبة خطأ إلى أبي كامل، منسوخة عام ٥٨١ هـ/١١٨٥م.

قرة، ببدء ترجمة بعض المسائل التربيعية المضاعفة من الكتاب العاشر لـ **الأصول**، إلى معادلات جبرية. لكنه أيضاً ترجم مسألة مجسمة («صلبة») واردة في كتاب أرخميدس **الكرة والأسطوانة**، إلى معادلة من الدرجة الثالثة(١٥).

ونذكر أيضاً اتجاهاً آخر تطورت فيه نظرية المعادلات في ذلك العصر، هو الاتجاه الذي رسمه البحث في المعادلات التربيعية بشكلها العام:

$$ax^{2n} = bx^n + c \quad , \quad ax^{2n} + c = bx^n \quad , \quad ax^{2n} + bx^n = c.$$

الذي نراه عند أبي كامل وسنان بن الفتح وغيرهما.

وقد تطورت الحسابات الجبرية وتوسعت من بعد الخوارزمي. وقد يكون هذا الموضوع هو الأهم والأوسع انتشاراً الذي شارك فيه الرياضيون الذين أتوا من بعده. فلقد بدأت قوة المجهول بالتزايد إلى أن بلغت السادسة عند أبي كامل وسنان بن الفتح(١٦). وهذا الأخير يحدد قوى المجهول ضربياً بينما يحددها أبو كامل جمعياً(١٧). لكن العمل الجبري لأبي كامل يشكل علامة بارزة في عصره كما في تاريخ الجبر(١٨). فهو يدمج في كتابه، بالإضافة إلى توسيع الحسابات الجبرية فصلاً جديداً في الجبر هو التحليل السيال (غير المحدد) أو التحليل الديوفنطسي المنطق. فبعد أن يعالج مجدداً نظرية المعادلات مقدماً براهين أكثر صرامة من تلك التي قدمها سابقه، نراه يدرس بمزيد من التعمق والاتساع العمليات الحسابية على ثنائيات الحدود وثلاثياتها حيث يبرهن في كل مرة النتيجة الحاصلة. كما أنه يذكّر ويُبرِّر قاعدة الإشارات ويبين قواعد الحساب على الكسور قبل أن ينتقل إلى معالجة أنظمة المعادلات الخطية المتعددة المجهولات وإلى المعادلات ذات المعاملات غير المنطقة كالتالية:

$$\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 4x^2 \quad , \quad \frac{\sqrt{10}x}{(2+\sqrt{3})} = x - 10.$$

ويدخل أبو كامل في «جبره» وسائط عددية مساعدة قد يكون بعضها موجوداً في كتاب مفقود للخوارزمي ومنها:

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} 2k.$$

---

(١٥) انظر: أبو العباس أحمد بن محمد بن البناء، **كتاب في الجبر والمقابلة** (مخطوطة دار الكتب، رياضة م)، الورقة ٢٦و - ظ.

(١٦) حول قوى المجهول عند سنان بن الفتح، انظر: Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes,* collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984), p. 21, note (11).

(١٧) جمعياً: بواسطة عملية الجمع، وضربياً: بواسطة عملية الضرب.

(١٨) انظر: أبو كامل، مخطوطة قرة مصطفى، ٣٧٩، الورقة ٢ظ.

وبعد ذلك يدرس العديد من المسائل التي تتحول إلى معادلات من الدرجة الثانية.

نرى، إذن، أن أبحاث خلفاء الخوارزمي، وأبرزهم أبو كامل، قد ساهمت في نظرية المعادلات كما في توسيع الحساب الجبري إلى حقلي الأعداد المنطقة والأعداد غير المنطقة. ولقد كان لبحث أبي كامل حول التحليل السيال (غير المحدد) أثراً هائلاً على تطور هذا الميدان الذي اكتسب بفضله معنىً جديداً ووضعاً جديداً. فهذا التحليل الذي انطلق من الجبر أضحى يشكل فصلاً من أي عمل يهدف إلى الإحاطة بهذه المادة العلمية.

حَسْبَنة الجبر: الكَرَجي وخلفاؤه

ليس بالإمكان إطلاقاً فهم تاريخ الجبر إذا لم نشِر إلى إسهامات تيارين من الأبحاث تطورا خلال الفترة التي تعرضنا لها في الفقرة السابقة.

أول هذين التيارين درس الكميات غير المنطقة إما عبرَ قراءة الكتاب العاشر من **الأصول**، أو من خلال طريق أخرى مستقلة. ومن بين الرياضيين الذين شاركوا في هذه الأبحاث، نستطيع ذكر بعض الأسماء كالماهاني وسليمان بن عصمة والخازن والأهوازي ويوحنا بن يوسف والهاشمي... ومن البديهي ألا نذكر هنا بإسهاماتهم، لكن لا بد لنا من ملاحظة حدثين تكونا خلال القيام بهذه الدراسات. الأول هو تنشيط الحسابات على الكميات غير المنطقة، أما الثاني فيتلخص ببداية قراءة جديدة لبعض فصول الكتاب العاشر من **الأصول**، على ضوء جبر الخوارزمي. ولكي لا نكثر من سرد الأمثلة، لنأخذ كمثل وحيد الطريقة التي استخدمها الماهاني في البحث عن الجذر التربيعي لخمس «مُنفصلات»[19] (Apotomes)[20]. فلكي يستخرج جذر أول «مُنفصل» (Apotome) يقترح الماهاني أن «نستخدم طريقة الجبر والمقابلة»[21] أي أن نضع: $a = x + y$ و $b = 4xy$ فنتحول إلى المعادلة: $x^2 + \frac{b}{4} = ax$. بعد ذلك نحدد الجذر الموجب x_0 ونستنتج y_0 ونحصل على:

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x_0} - \sqrt{y_0}\,.$$

ومن ثم يعيد الماهاني الكرّة فيما يخص المنفصلات الأربعة التالية، فيتحول، بخصوص

---

(١٩) ترجمها العرب من اليونانية تحت اسم «المنفصلات» مثل الأعداد من الشكل $a - \sqrt{b}$ حيث $\sqrt{b} \notin Q$.

(٢٠) ليكن $a + \sqrt{b}$ مجموع حدين بحيث يكون:

$$a \in Q \qquad b \in Q \qquad a > \sqrt{b} \qquad \sqrt{b} \notin Q \qquad \frac{\sqrt{a^2 - b}}{a} \in Q$$

فنقول إن $a - \sqrt{b}$ هو «المنفصل» (Apotome) الأول.

(٢١) انظر: الماهاني، تفسير المقالة العاشرة من كتاب إقليدس (مخطوطة المكتبة الوطنية، باريس، ٢٤٥٧)، الأوراق ١٨٠ظ ـ ١٨٧و وبخاصة الورقة ١٨٢و.

المنفصل الثاني مثلاً ـ وهو $(\sqrt{b}-a)$، حيث $a=5$ و $b=45$ إلى المعادلة:

$$x^4+\frac{625}{16}=\frac{65}{2}x^2.$$

لذلك فإن أعمال هؤلاء الرياضيين لم تساعد فقط على توسيع الحسابات الجبرية لكي تشمل الأعداد غير المنطقة، لكنها سمحت أيضاً بالتأكيد على شمولية الوسائل الجبرية.

أما التيار الثاني من الأبحاث فقد أثارته ترجمة **علم الحساب** لديوفنطس إلى العربية وخاصة القراءة الجبرية لهذا الكتاب. فلقد ترجم قسطا بن لوقا في العام ٨٧٠م سبعة من كتب **علم الحساب** المذكور تحت عنوان **فن الجبر**[٢٢]، وهو عنوان صارخ الدلالة. ولقد استخدم المترجم لغة الخوارزمي في نقله تعابير ديوفنطس اليونانية لاوياً بذلك محتوى هذا الكتاب نحو المادة العلمية الجديدة. وعلى الرغم من أن حساب ديوفنطس ليس عملاً جبرياً بالمعنى الخوارزمي، إلا أنه يحتوي تقنيات حسابية جبرية شديدة الأهمية قياساً على عصرها: إبدال، حذف، تبديل في المتغيرات... إلخ. ولقد كان **علم الحساب** هذا موضوعاً لتعليقات وشروحات العديد من الرياضيين من أمثال المترجم بالذات، قسطا بن لوقا، في القرن العاشر، وأبي الوفاء البوزجاني في القرن الذي تلاه، لكن هذه النصوص مفقودة مع الأسف. ونعلم فقط أن أبا الوفاء أراد في شروحاته أن يبرهن الحلول الديوفنطسية. كما أنه، في نص وصل إلينا، قد برهن صيغة ذي الحدين التي استُخدِمت كثيراً في حساب ديوفنطس في حال كون القوة n تساوي ٢ أو ٣[٢٣].

إن هذا التقدم الذي شهدته الحسابات الجبرية، إن من حيث توسُّعها لتتناول حقولاً أخرى، أو من حيث كمية النتائج التي توصلت إليها، قد أدى إلى تجديد في هذه المادة العلمية الجديدة التي هي الجبر. فمن بعد الخوارزمي بقرن ونصف من الزمن تصور الرياضي البغدادي الكرجي مشروعاً آخر للبحث. هذا المشروع هو تطبيق علم الحساب على الجبر، أي الدراسة المنهجية لتطبيق قوانين علم الحساب وبعض خوارزميات هذا العلم على التعابير الجبرية وبالأخص على كثيرات الحدود. إن إجراء هذه الحسابات على التعابير الجبرية من الشكل:

$$f(x)=\sum_{k=-m}^{n} a_k\, x^k$$

(حيث m وn أعداد صحيحة موجبة) قد أضحى، بالتحديد، الموضوع الأساسي للجبر. ولا شك أن نظرية المعادلات الجبرية استمرت حاضرة في الأعمال الجبرية ولكنها لم تعد

---

(٢٢) انظر: Diophante, *Les Arithmétiques*, texte établi et traduit par Roshdi Rashed, collection des universités de France (Paris: Les Belles lettres, 1984).

(٢٣) أبو الوفاء البوزجاني، **في جمع أضلاع المربعات والمكعبات وأخذ تفاضلها** (مخطوطة، ٥٥٢١، اسطان قدس، مشهد).

تحتل سوى مكان متواضع في اهتمامات الجبريين. ومن هنا نستطيع أن نفسر التبدُلات التي طرأت على كتب الجبر محتوىً وتنظيماً.

ولقد كرّس الكرجي لهذا المشروع الجديد عدة كتابات منها **الفخري** و**البديع**. وهذان الكتابان شكّلا مواضيع لدراسات وشروحات وتعليقات الرياضيين منذ ذلك الحين وحتى القرن السابع عشر. هذا يعني أن عمل الكرجي احتل المكان المركزي من البحث في مجال الجبر الحسابي خلال قرون طويلة، بينما أضحى كتاب الخوارزمي بمثابة عرض تاريخي هام تتناوله فقط تعليقات الرياضيين من المرتبة الثانية. ومن دون أن نسترجع هنا تاريخ قرون ستة من الجبر، نستطيع تسليط الضوء على الأثر البالغ لعمل الكرجي وذلك عن طريق الالتفات إلى أحد خلفائه من القرن الثاني عشر وهو السموأل (ت ١١٧٤م). يدمج هذا الأخير في مؤلفه الجبري **الباهر** الكتابات الأساسية للكرجي وخاصة الكتابين السابقي الذكر.

يبدأ السموأل بتحديد مفهوم القوة الجبرية بكل عمومياتها[٢٤]. وبفضل التحديد $x^0 = 1$، يعطي القاعدة المكافئة للصيغة $x^m.x^n = x^{m+n}$ حيث $m \in Z$ و $n \in Z$. تأتي بعد ذلك العمليات الحسابية على الحدود (المفردة) وعلى كثيرات الحدود (الحدوديات)؛ وهنا نخص بالذكر عملية قسمة الحدوديات وكذلك تقريب كسورها بعناصر من الحلقة التي تؤلفها مجموعة هذه الحدوديات، كالتقريب التالي:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{20x^2+30x}{6x^2+12} \approx \frac{10}{3} + \frac{5}{x} - \frac{20}{3x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{40}{3x^4} + \frac{20}{x^5} - \frac{80}{3x^6} - \frac{40}{x^7},$$

فيحصل على توسيع محدود للكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ لا يصح إلا عند اتخاذ x قيمة كبيرة بما يكفي.

بعد ذلك نجد مسألة استئصال الجذر التربيعي للحدوديات ذات المعاملات المنطقة. وقد كرس الكرجي لكل هذه الحسابات على الحدوديات كتاباً مفقوداً إلى اليوم، لكنه لحسن الحظ مذكور من قبل السموأل. في هذا الكتاب يتصدى الكرجي لتبيان صيغة توسيع «ذي الحدين» وجدول معاملاته:

(٢٤) إليكم ما يكتب السموأل بعد تسجيل القوى في جدول، من الجهتين التي يقع بينهما x^0: «كما أن المراتب المتناسبة المبتدئة من الآحاد تتوالى على نسبة العشر بغير نهاية؛ كذلك نتوهم في الجهة الأخرى مراتب الأجزاء [من العشر تتوالى] على تلك النسبة ومرتبة الآحاد كالواسطة بين مراتب العدد الصحاح التي تتضاعف آحادها على نسبة العشر وأمثاله بغير نهاية وبين مراتب الأجزاء المتجزئة بغير نهاية»... «فإن كانا في جهتين مختلفتين [من الواحد] عددنا من مرتبة أحد المضروبين بقدر بُعدِ المضروب الآخر عن الواحد، ويكون العدد من جهة الواحد وإن كانا في جهة واحدة عددنا في خلاف جهة الواحد». انظر: السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، **الباهر في الجبر**، ملحوظات وتقديم ونشر صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية؛ ١٠ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣)، ص ١٩.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad n \in N.$$

وقد شكل سعيه لبرهان هذه الصيغة مناسبة ظهر خلالها مبدأ الاستقراء التام المحدود (في شكل بدائي) كوسيلة في مجرى عملية الحل في الرياضيات. ومن بين وسائل الحساب المساعد يعطي السموأل، على خطى الكرجي حصائل جمع العديد من المتواليات الحسابية مثل:

$$\sum_{k=1}^{n} k \text{ ،} \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ ،} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \text{ ،} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \text{ ،} \ldots$$

مضيفاً ما يلزم من براهين.

بعد ذلك يُطرح السؤال التالي: «كيف يمكن إجراء الضرب والقسمة والجمع والطرح واستخراج الجذور على المقادير الصماء»؟[٢٥] والجواب عن هذا السؤال يقود الكرجي وخلفاءه إلى قراءة جبرية للكتاب العاشر من الأصول وإلى تعميم لانهائي للحدود ولثنائيات الحدود المستعملة في هذا الكتاب وإلى اقتراح قواعد نجد من بينها قواعد الماهاني مصوغة بشكل صريح:

$$x^{\frac{1}{m}} = (x^n)^{\frac{1}{mn}} \quad \text{و} \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

إضافة إلى قواعد أخرى كالتالية:

$$\left(x^{\frac{1}{m}} \pm y^{\frac{1}{m}}\right) = \left[y^{\frac{1}{m}}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{m}} \pm 1\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}$$

ونجد أيضاً فصلاً هاماً حول التحليل الديوفنطسي المنطق وآخر حول حل أنظمة المعادلات الخطية المتعددة المجهولات. ونشير هنا إلى أن السموأل يقدم نظاماً من ٢١٠ معادلات خطية، في عشرة مجاهيل.

فانطلاقاً من أعمال الكرجي، نلاحظ إذن تشكل تيار من البحث في الجبر وتكون تقليد يسهل التعرف عليه من حيث محتوى وتنظيم أي من الأعمال التي تنتمي إليه. وهي أعمال لا تحصى تقريباً حسب تعبير ابن البناء[٢٦]. وبين الذين ينتمون إلى هذا التقليد نجد أساتذة السموأل: الشهرزوري، ابن أبي تراب، وابن الخشاب، كما نجد السموأل نفسه وابن الخوام، والتنوخي، وكمال الدين الفارسي، وابن البناء، وفيما بعد الكاشي واليزدي... إلخ.

---

(٢٥) المصدر نفسه، ص ٣٧.

(٢٦) ابن البناء، كتاب في الجبر والمقابلة، الورقة ١.

وعلى الرغم من أن الفصل المتعلق بنظرية المعادلات لم يكن في مركز اهتمامات هذا التيار إلا أنه لم يراوح مكانه بل حقق بعض التقدم. فلقد عالج الكرجي، على خطى أسلافه، المعادلات التربيعية. أما من أتوا بعده فقد حاولوا دراسة المعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة. فلقد تعرض السُلَمي، في القرن الثاني عشر للمعادلة التكعيبية محاولاً إيجاد حل لها بواسطة الجذور(٢٧).

ويشكل هذا النص للسُلَمي شهادة على اهتمام رياضيي عصره بحل معادلات الدرجة الثالثة عن طريق الجذور. وفي هذا المجال يعتبر السلمي أن الصنفين التاليين:

$$x^3 + ax^2 + bx = c \quad , \quad x^3 + bx = ax^2 + c$$

هما صنفان قابلان للحل؛ ولكنه يضيف الشرط $a^2 = 3b$ ومن ثم يعطي حلاً لكل منهما:

$$x = \left(\frac{a^3}{27} + c\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3} \quad , \quad x = \left(c - \frac{a^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3}.$$

ويمكن تلخيص مسعى السلَمي كما يلي: يبدأ برَد المعادلة إلى شكلها المنتظم عن طريق تحويل أفيني؛ لكنه بدل أن يبحث عن مميز المعادلة يُعدم معامل القوة الأولى للمجهول لكي يرد الحل إلى مسألة استخراج لجذر تكعيبي. فالتحويل الأفيني $x \to y - \frac{a}{3}$، يحوِل المعادلة الأولى إلى:

$$y^3 + py - q = 0$$

حيث:

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{و} \quad q = c + \frac{a^3}{27} + \left(b\frac{a}{3} - \frac{a^3}{9}\right)؛$$

وبوضع $b = \frac{a^2}{3}$، نحصل على:

$$y^3 = c + \frac{a^3}{27},$$

ومنها نحصل على y وبعدها على x.

إن هذه المحاولات المنسوبة إلى المعلم داردي(٢٨)، وهو رياضي إيطالي من القرن الرابع

(٢٧) السُلَمي، المقدمة الكافية في حساب الجبر والمقابلة (مجموعة بول سباث، رقم ٥)، الورقتان ٩٢ظ - ٩٣و.

(٢٨) انظر: W.van Egmond, «The Algebra of Master Dardi of Pisa,» *Historia Mathematica*, vol. 10 (1983), pp. 399-421.

عشر، هي من المحاولات التي ترددت كثيراً في التقليد الجبري للكرجي. فلقد حاول الرياضي ابن البناء[٢٩] العمل في هذا الاتجاه، على الرغم من اعترافه الصريح بصعوبة حل بواسطة الجذور للمعادلات التكعيبية باستثناء المعادلات ذات الشكل $x^3 = a$.

فقد أخذ المعادلة

$$x^4 + 2x^3 = x + 30, \qquad (*)$$

التي حلها بتحويلها إلى:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + x + 30,$$

ومن ثم إلى:

$$(x^2 + x)^2 = x^2 + x + 30,$$

وبوضع $y = x^2 + x$، يكون لدينا:

$$y^2 = y + 30,$$

ذات الحل (الموجب) $y = 6$. بعد ذلك تحل المعادلة $x^2 + x = 6$ فتعطي $x = 2$ كحل (مُوجب) للمعادلة (*).

إن المعرفة الدقيقة لإسهامات رياضيي هذا التقليد في حل المعادلات التكعيبية ومعادلات الدرجة الرابعة، بحاجة لمزيد من الدراسة والوقت. لكن، خلافاً للاعتقاد الذي كان سائداً، فإن ما تقدم من شهادات يدل على أن بعض خلفاء الكرجي قد حاول الذهاب إلى أبعد مما توصل إليه هذا الرياضي.

هندسة الجبر: الخيام

حاول الجبريون «الحسابيون»[٣٠] حل المعادلات بواسطة الجذور وأرادوا تبرير خوارزميات حلولهم. وقد نجد أحياناً، عند بعضهم (مثل أبي كامل) تبريرين، أحدهما هندسي والآخر جبري. وفيما يتعلق بالمعادلة التكعيبية، لم يكن ينقصهم الحل بواسطة الجذور وحسب، إنما أيضاً تبرير الخوارزمية المتبعة، وذلك لتعذر بناء الحل بواسطة المسطرة والبركار. ولقد وعى رياضيو ذلك التقليد تماماً هذا الواقع، فكتب أحدهم في العام ١١٨٥م: «وذلك لأن المجهول الذي يُحتاج إلى استخراجه ومعرفته في كل واحد من هذه المقترنات هو ضلع المكعب المذكور فيها ويؤدي تحليله إلى إضافة مجسم متوازي السطوح

---

(٢٩) ابن البناء، كتاب في الجبر والمقابلة، الورقة ٢٦و - ظ.

(٣٠) من التقليد الحسابي: الكرجي ـ السموأل...

معلوم إلى خط معلوم يزيد على تمامه أو ينقص مكعباً ولا يتركب ذلك إلا باستعمال القطوع المخروطية»[٣١].

واللجوء الصريح إلى القطوع المخروطية، بهدف حل المعادلات التكعيبية، قد تبع، من دون إبطاء، الترجمات الجبرية الأولى للمسائل المجسمة. ولقد أتينا فيما تقدم على ذكر تَعَرُض الماهاني في القرن التاسع للميلاد لِ **مقدمة أرخميدس**[٣٢]. ولم تتأخر بعد ذلك كتابة المسائل المجسمة الأخرى، مثل تثليث الزاوية ومسألة المتوسطين، وخاصة مسألة المسبع المنتظم، بواسطة تعابير جبرية. لكن الصعوبات التي تقدم ذكرُها بما فيها حل معادلة الدرجة الثالثة بواسطة الجذور، حَدَت بالرياضيين من أمثال الخازن وابن عراق وأبي الجود بن الليث والشني. . . إلى ترجمة هذه المسألة إلى لغة الهندسة[٣٣]. فإذا بها تتحول إلى مسألة يستطيعون

---

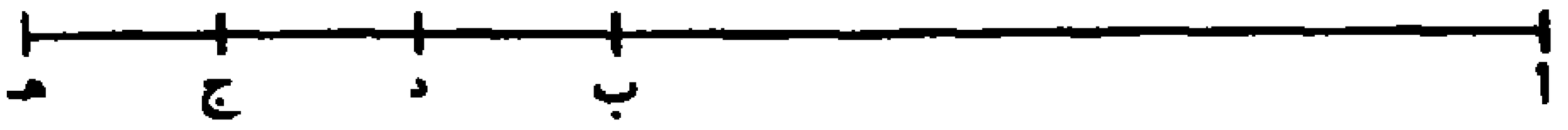
(٣١) انظر: مخطوطة مجهولة المؤلف، رقم ٥٣٢٥، اسطان قدس، مشهد، الورقة ٢٥ . وهي مخطوطة منسوبة خطأ إلى أبي كامل.

(٣٢) يقدم الخيام بأسلوبه الخاص تاريخ هذه القضية على الشكل التالي، في مؤلفه الجبري الشهير:

«وإن فيها [أي في صناعة الجبر والمقابلة] أصنافاً يُحتاج فيها إلى أصناف من المقدمات معتاصة جداً، متعذر حلها على أكثر الناظرين فيها. أما المتقدمون فلم يصل إلينا منهم كلام فيها. لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب والنظر أو لم يضطر البحث إياهم إلى النظر فيها أو لم ينقل إلى لساننا كلامهم فيها، وأما المتأخرون فقد عن للماهاني منهم تحليل المقدمة التي استعملها أرشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه **في الكرة والأسطوانة** ـ بالجبر، فتأدى إلى كعاب وأموال وأعداد متعادلة فلم يتفق له حلها بعد أن أفكر فيها ملياً. فجزم القضاء بأنه ممتنع حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية، ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين إلى عدة أصناف منها، فبعضهم حل البعض، وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يعتد به إلا على صنفين سأذكرهما. وإني، < و > لم أزل، كنت شديد الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييز الممكن من الممتنع في أنواع كل صنف ببراهين لمعرفتي بأن الحاجة إليها في مشكلات المسائل ماسة جداً. ولم أتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخير والمواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقني عنه من صروف الزمان، فإنا قد منينا بانقراض أهل العلم، إلا عصابة قليلي العدد كثيري المحن، همهم افتراص غفلات الزمان ليتفرغوا في أثنائها إلى تحقيق وإتقان علم». إن هذا النص أساسي في تاريخ المعادلات التكعيبية؛ انظر: عمر الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، تحقيق وتحليل رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص ١١ ـ ١٢ (ص ١ ـ ٢ من النص العربي).

(٣٣) المصدر نفسه، ص ٨٢ ـ ٨٤ (ص ٩٠ ـ ٩١ من النص العربي):

«وأما المتقدمون الرياضيون من غير أهل لساننا فلم ينبهوا على شيء من هذا، أو لم يصل إلينا ولم ينقل إلى لساننا. وأما المتأخرون من أهل لساننا فأول من اضطر إلى صنف ثلاثي من هذه الأصناف الأربعة عشر هو الماهاني المهندس، فإنه كان يحل المقدمة التي أخذها أرشميدس مسلمة في شكل د من مقالة ب من كتاب **الكرة والأسطوانة**. وهي هذا الذي أذكره. قال أرشميدس: إن خطي أ ب، ب جـ معلوما القدر ومتصلان على استقامة، ونسبة ب جـ إلى جـ هـ معلومة فيكون جـ هـ معلوماً على ما تبين في المعطيات. ثم قال: ونجعل نسبة جـ د إلى جـ هـ كنسبة مربع أ ب إلى مربع أ د.



أن يطبقوا في دراستها تقنية درج استخدامها في عصرهم في معالجة المسائل المجسمة وهي تقنية القطوع المخروطية. وهنا بالتحديد يكْمن السبب الأساسي في ما نسميه «هندسة» نظرية المعادلات الجبرية (أي تحويلها إلى مسائل هندسية). إن الرياضيين لا يترجمون هذه المرة المعادلات الجبرية هندسياً لكي يجدوا الحل الهندسي الذي يقابل الحل الجبري الذي سبق وحصلوا عليه، على غرار ما فعل ثابت بن قرة، لكنهم يسعون، عن طريق الهندسة إلى تحديد الجذور الموجبة للمعادلة التي لم يتمكنوا بعد من تحديد جذورها بوسيلة أخرى. وفي هذا المجال بقيت مساعي الخازن والقوهي وابن الليث والشني والبيروني... إسهامات جزئية إلى أن صيغ مشروع الخيام: بناء نظرية هندسية للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون. فلقد أراد الخيام (١٠٤٨ ـ ١١٣١م) أولاً تجاوُز الأبحاث الجزئية، أي التي تعود لهذه الصيغة أو تلك من صِيغ المعادلة التكعيبية، إلى بناء نظرية للمعادلات، مقترحاً في الوقت نفسه طريقة جديدة في الكتابة. فهو يدرس جميع أنواع معادلات الدرجة الثالثة، التي يصنفها حَسَب تَوَزع حدودها (الثابتة وذات الدرجات الأولى والثانية والثالثة) على طرفي المعادلة. ويجد الخيام، لكل من هذه الأصناف من المعادلات بناء لجذر موجب بواسطة تقاطع القطوع المخروطية. فبالنسبة إلى المعادلة: «مكعب يعادل أضلاعاً وعدداً» أي:

$$x^3 = bx + c \qquad (*)$$

حيث b وc عددان موجبان، لا يعتبر الخيام سوى الجذر الموجب. ولتحديد هذا الجذر يعمد

= ولم يقل كيف نعلم هذا، لأن هذا محتاج إلى قطوع المخروط باضطرار ولم يورد في الكتاب شيئاً مبنياً على القطوع إلا هذا، فأخذ هذا أيضاً مسلماً. والشكل الرابع هو في قسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة. وكان الماهاني يستعمل ألفاظ الجبريين للتسهيل، فلما أدى التحليل إلى أعداد وأموال وكعاب متعادلة ولم يمكنه/ أن يستخرجه بقطوع المخروطات جزم القول بأن هذا ممتنع. فهذا الفاضل مع فضله وتقدمه في هذه الصناعة استبهم عليه حل صنف من هذه الأصناف، حتى نبغ أبو جعفر الخازن وتنبه على طريقه وأتى به في رسالة، وأبو نصر بن عراق مولى أمير المؤمنين من أهل خوارزم كان يحل المقدمة التي أخذها أرشميدس في استخراج ضلع المسبع في الدائرة، وهي < تقوم على > المربع بتلك الصفة المذكورة، وكان يستعمل ألفاظ الجبريين فأدى التحليل إلى مكعب وأموال يعدل أعداداً فاستخرجه بالقطوع، وهذا الرجل لعمري كان من متعالي الطبقة في الرياضيات. والمسألة التي أعجزت أبا سهل الكوهي، وأبا الوفاء البوزجاني، وأبا حامد الصاغاني، وجماعة من أصحابهم الذين كانوا منقطعين إلى جناب عضد الدولة بمدينة السلام هي هذه: عشرة قسمتها قسمين فكان مجموع مربعيهما مع الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين وسبعين عدداً، وكان يؤدي التحليل إلى أموال تعدل مكعباً وجذوراً وأعداداً. وهؤلاء الأفاضل كانوا متحيرين في هذه المسألة مدة مديدة حتى استخرجها أبو الجود، وخزنوها في دار كتب الملوك السامانية. فهذه ثلاثة أصناف: اثنان منها ثلاثيان، وواحد رباعي من المركبات والمفردة الواحدة أعني المكعب الذي يعدل الأعداد، فإنها قد استخرجها من تقدمنا من الأفاضل، ولم يصل إلينا منهم كلام في العشر البواقي ولا في هذا التفصيل. فإن تراخت المدة وصحبني التوفيق، أودعتُ هذه الأصناف الأربعة عشر بجميع شُعبها وفروعها وتميز الممكن منها من الممتنع ـ فإن بعض أصنافه مفتقر إلى شرائط حتى يصح ـ رسالةً شاملة على عدة مقدمات لها، عظيمة المنفعة في أصول هذه الصناعة».

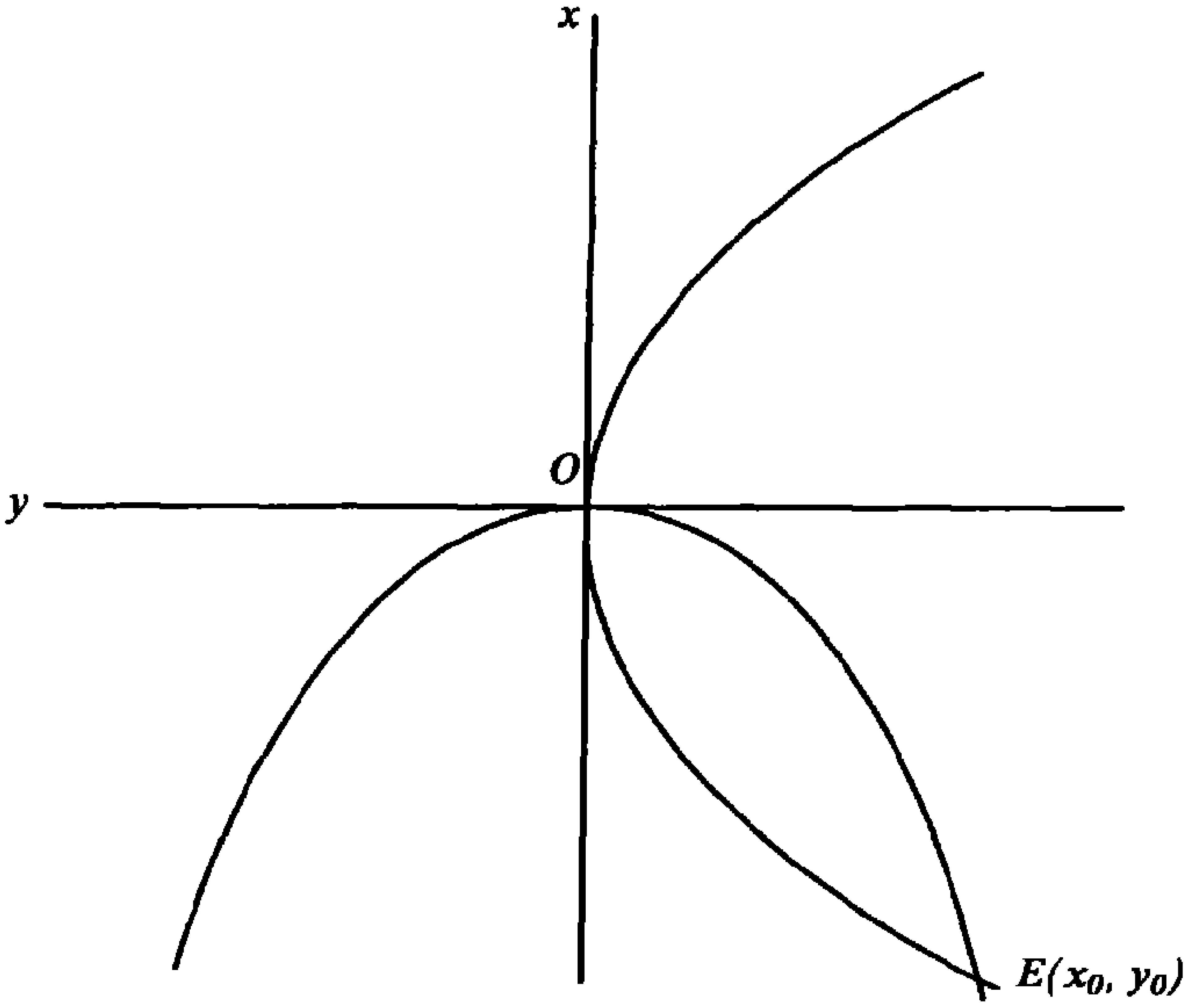
إلى تقاطع نصف القطع المكافىء:

$$P = \left\{(x,y) \in R_+ \times R_+ ; b^{\frac{1}{2}}y = x^2\right\}$$

والفرع من القطع الزائد

$$H = \left\{(x,y) \in R_+ \times R_+ ; y^2 = \left(\frac{c}{b} + x\right)x\right\}$$

فيظهر أن لهما نقطة التقاء ثانية تقابل الجذر الموجب. نشير إلى أن القطعين كاملين يعطيان (بقيم مناسبة لِ b ولِ c) نقاط الالتقاء التي تقابل الجذرين السالبين.



الشكل رقم (١١ ـ ٢)

ونشير هنا إلى أننا إذا أدخلنا الحل المبتذل $x = 0$، فإن المعادلة السابقة (*) تكتب:

$$\frac{x^4}{b} = x^2 + \frac{c}{b}x,$$

ومن هنا اختيار المنحنيين السابقين، اللذين يحقق تقاطعهما (x_0, y_0) العلاقة التالية:

$$\frac{b^{1/2}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

ومنها:

$$\frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

فيكون x_0 حلاً للمعادلة (*).

وفي سبيل الإعداد لبناء هذه النظرية الجديدة كان على الخيام أن يتصور بشكل أفضل العلاقات المستجدة بين الهندسة والجبر لكي يصوغ بشكل أفضل هذه العلاقات. ونذكر هنا بأن المفهوم المركزي بالنسبة إليه، الذي أدرجه في هذا السياق، هو مفهوم وحدة القياس. هذا المفهوم الذي بتحديده المناسب وبعلاقته بمفهوم البُعد، يسمح بتطبيق الهندسة على الجبر. لكن هذا التطبيق قاد الخيام في اتجاهين قد يبدوان متناقضين للوهلة الأولى: فبينما أضحى الجبر عنده عبارة عن نظرية المعادلات الجبرية، بدأت هذه النظرية، ولو بشيء من الخجل، تتعالى فوق الحدود الفاصلة بين الجبر والهندسة. فإذا بنظرية المعادلات، أكثر من أي وقت مضى، تشكل مكاناً يتلاقى فيه الجبر والهندسة، إضافة إلى استدلالات وطرائق تحليلية تتزايد يوماً بعد يوم. إن التعبير الملموس عن هذه الوضعية قد ظهر من خلال كتابة العديد من الرسائل والمذكرات المكرسة لنظرية المعادلات بالذات على غرار ما قام به الخيام. فخلافاً للجبريين «الحسابيين»، يزيح الخيام من رسالته الفصول المخصصة للحدوديات ولحساب الحدوديات ولدراسة الأعداد الصماء (غير المنطقة) الجبرية. . . إلخ.

ولكنه في المقابل يبني أنموذجاً جديداً للكتابة: إنه يبدأ بمناقشة مفهوم العِظم الجبرية لكي يصل إلى تحديد وحدة القياس. ومن ثم يقدِم تصنيفه الصُوَري للمعادلات ـ تبعاً لعدد حدودها ـ ويطرح المقدمات الضرورية، لكي يعالج أخيراً وبالترتيب، حسب تصاعد درجات صعوبتها: معادلات الدرجة الثانية ذات الحدين، معادلات الدرجة الثالثة ذات الحدين، معادلات الدرجة الثانية ثلاثية الحدود، معادلات الدرجة الثالثة ثلاثية الحدود، فرباعية الحدود والمعادلات التي تحوي عكس المجهول. ويصل الخيام في رسالته إلى نتيجتين مرموقتين درج مؤرخو الرياضيات على نسبهما إلى ديكارت: حل عام لكل معادلات الدرجة الثالثة بواسطة قطعين مخروطيين، وحسابات هندسية أضحى إجراؤها ممكناً عن طريق انتقاء وحدة قياسية للأطوال، على الرغم من بقائه، خلافاً لديكارت، أميناً لقاعدة التجانس.

وتجدر الإشارة إلى أن الخيام لم يتوقف عند هذا الحد، إنما حاول إعطاء حل عددي تقريبي للمعادلة التكعيبية. ففي رسالة له «في قسمة ربع الدائرة»[٣٤] حيث يُفصح للمرة الأولى عن مشروعه حول نظرية المعادلات، توصل إلى حل عددي تقريبي عن طريق جداول علم المثلثات.

التحول في نظرية المعادلات الجبرية: شرف الدين الطوسي

حتى الأمس القريب ساد الاعتقاد بأن عمل الخيام قد شكل نهاية لإسهامات رياضيي ذلك العصر في نظرية المعادلات الجبرية. لكن هذا الاعتقاد قد خاب كما ستتبين فيما يلي. فلم يشكل عمل الخيام افتتاحاً لتقليد، بكل ما تعنيه الكلمة، فحسب، لكنه أيضاً تعرض

(٣٤) المصدر نفسه، ص ٨٠.

لتحولات عميقة بعد حوالى النصف قرن على وفاته.

فالشهادات التاريخية تدل على أن شرف الدين المسعودي[٣٥] وهو تلميذ الخيام، قد ألف كتاباً في نظرية المعادلات وفي حلول المعادلات التكعيبية. ولا نستطيع، بعد، الجزم بوجود هذا الكتاب لعدم وصوله أو وصول أية فقرة منه إلينا. وبعد وفاة الخيام بجيلين نجد العمل الأهم في هذا التيار: رسالة شرف الدين الطوسي حول المعادلات[٣٦]. هذه الرسالة (عام ١١٧٠م تقريباً) تقدم تجديدات هامة بالنسبة إلى عمل الخيام. فخلافاً لمسعى هذا الأخير، لم يعد مسعى الطوسي عاماً وجبرياً إنما موضعياً وتحليلياً. إن هذا التحول الجذري، ذا الأهمية الخاصة في تاريخ الرياضيات الكلاسيكية، يستحق مزيداً من التوقف عنده.

يفتتح الطوسي رسالته بدراسة قطعين مخروطيين يستخدمهما لاحقاً، هما: القطع المكافىء والقطع الزائد. هذان المنحنيان، إضافة إلى الدائرة التي يفترض أنها غنية عن الدراسة، هي كل ما يلجأ إليه المؤلف من منحنيات. ويبدو أنه يفترض بالقارىء في عصره الاعتياد على التعامل مع معادلة الدائرة الحاصلة انطلاقاً من قوة (Puissance) نقطة بالنسبة إلى هذه الدائرة. ومن ثم يستخدم هذا القسم التحضيري الذي يبدأ به رسالته لإيجاد معادلة القطع المكافىء ومعادلة القطع الزائد متساوي الأضلاع بالنسبة إلى نظامين من المحاور.

يلي ذلك تصنيف للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون. وخلافاً للخيام، لم يعتمد معياراً داخلياً، بل خارجياً، لأجل هذا التصنيف. فبينما يرتب الخيام المعادلات انطلاقاً من عدد حدودها، يختار الطوسي تراتبيتها حسب وجود أو عدم وجود جذور (موجبة) لها. هذا يعني أن المعادلات منتظمة حسب احتوائها أو عدم احتوائها لـ«حالات مستحيلة». تبعاً لهذا التقسيم نستطيع أن نفهم سبب احتواء كتاب الطوسي هذا على جزءين وحسب. في الجزء الأول يعالج الطوسي حل عشرين معادلة. وفي كل من هذه الحالات يعمد إلى البناء الهندسي للجذور، وإلى تحديد المميز (Discriminant)، فقط فيما يخص المعادلات التربيعية، وأخيراً يعمد إلى الحل العددي بواسطة الطريقة التي تسمى طريقة روفيني - هورنر (Ruffini-Horner). ولقد احتفظ بتطبيق هذه الطريقة للمعادلات الكثيرة الحدود (Equations polynomiales) وليس فقط لاستخراج جذر عدد ما.

بعدما تقدم أصبح من الممكن تحديد العناصر التي تؤلف نظرية المعادلات في القرن

---

(٣٥) انظر: Roshdi Rashed, «Résolution des équations numériques et algèbre: Šaraf-al-Dīn al-Ṭūsī, Viète,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 12, no. 3 (1974), pp. 244-290, réimprimé dans: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, pp. 147-194.

(٣٦) انظر: Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XII^e siècle*, texte édité et traduit par Roshdi Rashed, 2 vols. (Paris: Les Belles lettres, 1986).

الثاني عشر حسب التقليد الذي أرساه الخيام: بناء هندسي للجذور، حل عددي للمعادلات وأخيراً تذكير بحل معادلات الدرجة الثانية بواسطة الجذور، الحل المكتشف هذه المرة انطلاقاً من البناء الهندسي.

في الجزء الأول، بعد دراسته لمعادلات الدرجة الثانية وللمعادلة $x^3 = c$، يتفحص الطوسي ثماني معادلات من الدرجة الثالثة. لكل من المعادلات السبع الأولى منها جذر موجب واحد، أما في حال وجود جذر سالب فقد كان الطوسي لا يعترف به. وعند دراسة كل من هذه المعادلات، كان يختار منحنيين (أو بالأحرى، قسمين من منحنيين) من الدرجة الثانية. وكان يبرهن بواسطة اعتبارات هندسية صرفة أن أقواس هذين المنحنيين لها نقطة التقاء تحقق إحداثيتها السينية المعادلة المدروسة، (كان من الممكن وجود نقاط التقاء أخرى). والخصائص الهندسية التي قدمها الطوسي كانت (بإضافة بعض التدقيقات التي لم يُشِر إليها الطوسي والتي تحققها المعطيات على كل حال) خصائص مميزة، تؤدي بالتالي إلى معادلات المنحنيات المستعملة. وبفضل استعمال تعبيرَي «الداخلي» و«الخارجي»، يستدعي الطوسي تواصل المنحنيات وتحدبها. ونستطيع كما يلي ترجمة طريقته بالنسبة إلى المعادلة:

$x^3 - bx = c$، حيث $b > 0$ و $c > 0$؛

فهو يأخذ العبارتين:

$$g(x) = \left[x\left(\frac{c}{b}+x\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{b}},$$

ويبرهن أن وجود عددين α و β يحققان: $(f-g)(\beta) < 0$ و $0 < (f-g)(\alpha)$ $(f-g)(\alpha) > 0$ ينتج عنه وجود $\gamma \in]\alpha, \beta[$ يحقق $(f-g)(\gamma) = 0$.

وعند قراءة الجزء الأول هذا، نرى أن الطوسي يدرس، كما فعل الخيام، البناء الهندسي للجذور الموجبة لهذه المعادلات العشرين؛ وهذا يغني عن دراسة جميع المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون، لأن المعادلات المتبقية يمكن إرجاعها إلى إحدى المعادلات المدروسة بواسطة تحويلات أفينية.

وعلى غرار الخيام، يعتمد البناء الهندسي المسطح إذا كانت المعادلة (بعد اختزالها بقدر الإمكان) من الدرجة الأولى أو الثانية. كما كان يعتمد البناء الهندسي بواسطة اثنين من القطوع المخروطية الثلاثة المذكورة، إذا كانت المعادلة (المختزلة بقدر الإمكان) تكعيبية.

وعلى الرغم من تعلق الجزء الأول من «الرسالة»، بشكل كبير، بإسهام الخيام، يمكن إيجاد فروقات لا تظهر نتائجها إلا في الجزء الثاني. فلقد برهن الطوسي وجود نقطة التقاء للمنحنيين المتعلقين بكل من المعادلات التي درسها. أما الخيام فلم يقم بمثل هذه الدراسة إلا بالنسبة إلى المعادلة العشرين. كما أدخل الطوسي وسائل لجأ إليها بشكل مكثف في الجزء الثاني، كالتحويلات الأفينية والمسافة من نقطة إلى مستقيم.

الجزء الثاني من الكتاب مخصص لدراسة المعادلات الخمس التي تحوي (حسب تعبير الطوسي) «حالات مستحيلة»، أي حالات لا يوجد فيها أي جذر موجب، وهي المعادلات:

$$(1)\quad x^3 + c = ax^2;$$
$$(2)\quad x^3 + c = bx;$$
$$(3)\quad x^3 + ax^2 + c = bx;$$
$$(4)\quad x^3 + bx + c = ax^2;$$
$$(5)\quad x^3 + c = ax^2 + bx.$$

وخلافاً للخيام، لم يستطع الطوسي الاكتفاء بملاحظة وجود «حالات مستحيلة». فلقد دفعه انشغاله بمسألة برهان وجود نقاط لالتقاء المنحنيات، وبالتالي بمسألة وجود الجذور، للتعرف إلى هذه الحالات ومعرفة أسبابها. إن التعرض لهذه المسألة التقنية وما ينجم عنها من تساؤل، هو بالتحديد ما قاد الطوسي ليقطع مع نهج الخيام ويحور في مشروعه الأولي. لكن، ولكي نستوعب هذا التحول العميق، يجب تحليل مسعى الطوسي. فإن كلاً من المعادلات الخمس السابقة يمكن أن تكتب على الشكل $f(x) = c$، حيث f دالة متعددة الحدود. ولكي يميز «الحالات المستحيلة» ويحددها، كان على الطوسي دراسة التقاء المنحني الذي يمثل $y = f(x)$ مع المستقيم $y = c$. بالنسبة إلى الطوسي كان «المنحني» يعني القسم من هذا المنحني المتمثل بالجزء $x > 0$ و $y = f(x) > 0$ وهو جزء من المنحني يمكن عدم وجوده أصلاً. يجدر أن نسجل هنا، أن المسألة بالنسبة إليه لا معنىً لها إلا في حال كون $x > 0$ وكون $f(x) > 0$، وإنه في كل حالة من الحالات كان يضع الشروط، التي تكون ضمنها $f(x)$ موجبة قطعاً. ففي المعادلة (1) وضع الشرط $0 < x < a$، وفي المعادلة (2) الشرط $0 < x < \sqrt{b}$؛ ويعطي هذا الشرط نفسه في المعادلة (3)، مع العلم بأنه غير كافٍ.

كان الطوسي، إذن، مضطراً لتفحص العلاقة بين وجود الحلول وبين وضعية الثابت c بالنسبة إلى النهاية العظمى للدالة الحدودية. وفي هذه المناسبة أدخل مفاهيم جديدة، ووسائل جديدة ولغة جديدة؛ وقد ذهب إلى أبعد من ذلك بتحديده كائناً رياضياً جديداً.

فهو يبدأ بصياغة مفهوم النهاية العظمى لِعبارة جبرية معينة، وهو ما يشير إليه بـ«العدد الأعظم». فإذا فرضنا أن $f(x_0) = c_0$ هي هذه النهاية العظمى، فإنها تعطي النقطة (x_0, c_0). بعد ذلك يحدد الطوسي جذور $f(x) = 0$، أي تقاطع المنحني $f(x)$ مع المحور السيني؛ من ثم يخلص إلى استنتاج حصر جذور المعادلة $f(x) = c$ (Encadrement).

يصل الطوسي في دراسته، إذن، إلى المرحلة التي تنحصر فيها كل المسألة في قضية وجود القيمة x_0 التي تعطي النهاية العظمى $f(x_0)$. ومن أجل هذا، يعتمد معادلة لا تختلف إلا من حيث الشكل مع المعادلة $f'(x) = 0$؛ لكن، وقبلَ مُواجهة هذه المسألة المركزية

المتعلقة بالمشتق (Dérivée)، يُستحسن أن نسجل التغيُر في منحى عمله، وإدخال التحليل الموضعي. ولنبدأ باستعراض النتائج التي توصل إليها.

بالنسبة إلى المعادلة (1) يوجد للمشتق جذران هما الصفر و$\frac{2a}{3}$ مما يعطي بالتالي نهاية صغرى هي $f(0) = 0$ ونهاية عظمى هي $f(\frac{2a}{3}) = c_0$. من جهة أخرى يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ جذر مزدوج هو $\lambda_1 = 0$ وجذر موجب $\lambda_2 = a$. يستنتج الطوسي، إذن، أن في حال كون $c < c_0$ يكون للمعادلة (1) جذران موجبان x_1 و x_2 يحققان العلاقة:

$$\lambda_1 = 0 < x_1 < x_0 < x_2 < \lambda_2 = a \, .$$

نلاحظ أن لهذه المعادلة جذر ثالث سالب x_3 لا يأخذه الطوسي بالاعتبار.

فيما يخص المعادلات (2)، (3) و(5) يعتمد الطوسي تحليلاً مشابهاً. في هذه الحالات الثلاث يكون للمشتق جذران أحدهما سالب والآخر موجب. الجذر الموجب x_0 يعطي النهاية العظمى $c_0 = f(x_0)$ ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور بسيطة (مختلفة) أحدها سالب والآخران هما $\lambda_1 = 0$ و λ_2؛ وهذا ما يوصله إلى النتيجة المذكورة.

ولكي نُلقي المزيد من الضوء على مسعى الطوسي، نُلَخِص مناقشته للمعادلة (1). فهذه المعادلة تكتب على الشكل التالي:

$$c = x^2(a - x) = f(x) \, .$$

وهنا يأخذ الطوسي حالات ثلاثاً:

- $c > \frac{4a^3}{27}$؛ وفي هذه الحالة يُعلِن أن المسألة مستحيلة (إذ إن لها جذراً سالباً)؛
- $c = \frac{4a^3}{27}$؛ وفي هذه الحالة يحِدد الطوسي الجذر المزدوج $x_0 = \frac{2a}{3}$ (لكنه لا يعترف بالجذر السالب)؛
- $c < \frac{4a^3}{27}$؛ وفي هذه الحالة يعلن الطوسي أن للمعادلة جذرين موجَبين x_1 وx_2 يحقِقان العلاقة:

$$0 < x_1 < \frac{2a}{3} < x_2 < a \, .$$

وبعد ذلك يدرس النهاية العظمى لِ $f(x)$ حيث يبرهن أن $f(x)$ تأخذ قيمتها العظمى عندما يأخذ x القيمة $x_0 = \frac{2a}{3}$، $(0 < x < a)$؛ فيبرهن أولاً أن:

$$(1) \quad x_1 > x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0) \, ,$$

ومن ثم أن:

$$(2) \quad x_2 < x_0 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_0) \, ;$$

مما يوصله إلى أن $f(x_0)$ هي النهاية العظمى لِ $f(x)$ في الفسحة $0 < x < a$.

ولإيجاد $x_0 = \frac{2a}{3}$، يحل الطوسي المعادلة $f'(x) = 0$، ومن ثم يحتسب:

$$f(x_0) = f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27} ,$$

مما يسمح له بتبرير الحالات الثلاث التي سبق أن أشار إليها.

بعد ذلك يحدِد الطوسي الجذرين الموجبين لهذه المعادلة، x_1 و x_2. يبدأ بالجذر الأكبر x_2 حيث يضع $x_2 = x_0 + y$، فيقوده هذا التحويل الأفيني إلى المعادلة:

$$y^3 + ay^2 = k ,$$

حيث $k = c_0 - c = \frac{4a^3}{27} - c$؛ وهي من الأصناف التي حلها في القسم الأول من «رسالته»؛ وبعد ذلك يبرر هذا التحويل الأفيني. ويعمد كذلك إلى تحويل أفيني آخر: $x = y + (a - x_2)$ لتحديد الجذر الأصغر x_1؛ فيحصل على معادلة بالمجهول y لها أيضاً جذر موجب، وهي مِن أحد الأصناف التي سبق وحلها في القسم الأول؛ ومن ثم يبرِر أيضاً هذا التحويل الأفيني. ويبرهن أخيراً أن $x_1 \neq x_0$ وأن $x_1 \neq x_2$.

أما فيما يخص المعادلة (4)، فتنشأ صعوبة لأن القيمة العظمى $f(x_0)$ يُمكِن أن تكون سالبة. وهنا يفرض الطوسي شرطاً إضافياً لكي لا يصادف إلا الحالة $f(x_0) > 0$ وينهج من ثم كما فعل بالنسبة إلى المعادلات السابقة؛ عند ذلك يكون للمعادلة $f'(x) = 0$ جذران موجبان x'_0 وx_0 $(x'_0 < x_0)$. يوجد، إذن، بالتتالي قيمة صغرى سالبة وقيمة عظمى موجبة. لا يأخذ الطوسي بعين الاعتبار سوى الجذر x_0 فيحصل على $c_0 = f(x_0)$. من جهة أخرى، يكون للمعادلة $f(x) = 0$، في هذه الحالة، ثلاثة جذور، الصفر وλ_1 و λ_2، $(0 < \lambda_1 < \lambda_2)$؛ من هنا يستنتج الطوسي أنه في حال كون $c < c_0$، يكون للمعادلة (4) جذران موجبان x_1 و x_2 بحيث يكون:

$$0 < \lambda_1 < x_1 < x_0 < x_2 < \lambda_2 .$$

هذه المراجعة السريعة تظهر أن وجود ما نسميه اليوم «المشتق» لم يكن لا عرضياً ولا طارئاً، بل بالعكس كان هذا الوجود مقصوداً. وصحيح، من جهة أخرى، أنها ليست المرة الأولى التي نجد فيها العبارة الجبرية للمشتق في «الرسالة»، فلقد أدخلها الطوسي أيضاً، لإنشاء طريقة حل عددي للمعادلات. فهذه الطريقة تنتظم على الشكل التالي:

يبدأ الطوسي بتحديد الرقم الأول σ_0 من الجذر وبتحديد المنزلة العشرية $r\sigma_0$، لهذا الرقم. عند ذلك يكتب هذا الجذر:

$x = s_0 + y$، حيث يكون: $s_0 = \sigma_0 . 10^r$

ومن ثم يحدد الرقم الثاني من هذا الجذر بواسطة المعادلة بالمجهول y:

$$f(s_0 + y) = 0 \; ;$$

وهنا تدخل الخوارزمية المنسوبة إلى روفيني - هورنر لتحديد معاملات حدود هذه المعادلة التكعيبية بالمجهول y. إن الخوارزمية التي أدخلها الطوسي تُرتِب الحسابات بحيث يستخدم أقل عدد ممكن من عمليات الضرب. وهي ليست سوى تحوير بسيطٍ لخوارزمية روفيني - هورنر، مُكيفاً مع المعادلات التكعيبية. وهنا يُظهر الطوسي $f'(s_0)$ كمعامل y، حيث $f'(s_0)$ هي قيمة المشتق في s_0؛ ويحصل على الرقم الأول من y أي على الرقم الثاني من الجذر x عن طريق أخذه للجزء الصحيح مِن $-f(s_0)/f'(s_0)$؛ وهنا نتعرف على الطريقة المعروفة بطريقة «نيوتن» لحل المعادلات بشكل تقريبي. وبعد أن يُحدِد الرقم الثاني (وهو الأول من y) يُطبق الخوارزمية نفسها على المعادلة بـ y لكي يجد الرقم الثالث، وهكذا دواليك حتى الحصول على الجذر، الذي كان صحيحاً في الأمثلة التي عالجها الطوسي[٣٧]. ونشير هنا إلى أن هذا الجذر، إذا لم يكن صحيحاً، بالإمكان إيجاد أرقامه (بعد الفاصلة)

---

(٣٧) لنأخذ مثلاً الحل العددي للمعادلة $x^3 = bx + N$ حيث يكتب الطوسي:

«وأما استخراج المطلوب فنضع العدد على <التخت ونعد مراتبه> بكعبٍ ولا كعبٍ ولا كعبٍ وكعبٍ ونضع أصفار الكعب، ونعد العدد أيضاً بجذرٍ ولا جذرٍ، إلى أن ننتهي إلى الجذر السمي للكعب الأخير، ثم نضع عدد الجذور ونعد مراتبه بجذرٍ ولا جذرٍ، فالمرتبة السمية للجذر الأخير من هذه الجذور هي آخر مراتب جذر عدد الجذور. فتكون للمسألة الصور التالية:

الصورة الأولى: أن يكون الجذرُ السميُ للكعب الأخير أرفعَ من آخرِ جذر عددِ الجذور، مثلَ قولنا: عدد بهذه الصورة: ٣٢٧٦٧٠٣٨، وتسعُمائة وثلاثة وستون جذراً يعدل مكعباً. فنعد من الجذر السمي للكعب الأخير إلى آخر مراتب عدد الجذور، ونعد من مرتبة الكعب الأخير بتلك العدة في تلك الجهة. فحيث ينتهي ننقل آليه آخرَ عددِ الجذور ونرده إلى الثلث فيكون بهذه الصورة:

٣٢̊ ٧٦ ٧̊٠ ٣٨̊

٣ ٢١

ولأن الجذر السمي للكعب الأخير هو الجذر الثالث، / وهو في مقابلة مرتبة عشرات الألوف وهو أرفع من آخر مراتب عدد الجذور الذي هو في المئات؛ عددنا من مرتبة الجذر السمي للكعب الأخير إلى المئات، وعددنا أيضاً من مرتبة الكعب الأخير بتلك العدة فانتهى إلى عشرات الألوف؛ فوضعنا آخر ثلثِ عددِ الجذور في تلك المرتبة، ثم نضع مطلوب الكعب وهو الثلاثة مكان الصفر الأخير، وننقص مكعبه مما تحته، ونضربه في مراتب ثلث عدد الجذور، ونزيد ثلاثة أمثال كل ضربة على العدد؛ ونضع مربع المطلوب تحت العدد بحذائه على هذه الصورة:

٣

٦٠٥٥̊٩٣٨̊

٣٢١

وننقص ثلث عدد الجذورْ من مربع المطلوب، فنبطل ثلث عدد الجذور فيبقى بهذه الصورة:

٣

٦٠٥٥̊٩٣٨̊

٨٩٦٧٩ =

بالاستمرار في تطبيق الخوارزمية نفسها. ولقد قام خلفاء الطوسي بمثل هذا العمل في حالة كون الجذر غير صحيح، كما يشهد على ذلك نص الأصفهاني[٣٨] في القرن الثامن عشر.

= وينقل الأعلى بمرتبتين والأسفل بمرتبة؛ ثم نضع المطلوب الثاني اثنين وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل، ونضربه في الأسفل، وننقص ثلاثة أمثال كل ضربةٍ من العدد، ونزيد مربعه على الأسفل، ونضربه في المطلوب الأول، ونزيد المبلغ على الأسفل/ ، وننقل الأعلى بمرتبتين والأسفلَ بمرتبةٍ؛ ونضع مطلوباً آخر هو الواحد، وننقص مكعبه من العدد، ونضربه في المطلوب الأول والثاني، ونزيد المبلغ على الأسفل ونضربه في الأسفل وننقص ثلاثة أميال كل ضربةٍ من العدد، فيحصل السطر الأعلى بهذه الصورة ٣٢١ وهو الجذر المطلوب.

الصورة الثانية

أن يكون آخرُ مراتب جذر عدد الجذور أرفعَ من الجذر السمي للكعب الأخير، كما في قولنا: جذور بهذه العدة ١٠٢٠٢١ وعدد بهذه الصورة ٣٢٧٤٢٠ يعدل مكعباً. فنعد عدد الجذور بجذرٍ ولا جذرٍ، ونزيد في العدد مراتبَ بأن نضع قدامه أصفاراً، ونطلب أرفع الجذور المقابلة لعدد الجذور، ثم نضع أصفار الكعب ونطلب الكعب السمي لذلك الجذر < الأخير > ، وننقل المرتبة المحاذية لذلك الجذر من عدد الجذور، إلى محاذاة الكعب السمي له، ونضع سائر مراتب عدد الجذور على الترتيب، فيكون بهذه الصورة: ٠٠٣٢٧٤٢٠ / ١٠٢٠٢١ لأن أرفع الجذور التي تقابلها هو الثالث، وهو في مقابلة عشرات الألوف، وسميُه الكعب الثالث وهو في ألوف الألوف، فنقلنا مرتبة /عشرات الألوف من عدد الجذور إلى محاذاة الكعب الثالث، ونطلب أكثر عددٍ يمكن نقصانُ مربعه من عدد الجذور ـ وهو الثلاثة ـ فنضعه في الكعب الثالث، ونضربه في مراتب عدد الجذور، ونزيد المبلغ على العدد، وننقص مكعبه من العدد، ونرد عدد الجذور إلى الثلث فيكون مبتدئاً من مرتبة المئات على هذه الصورة: ٣ / ٣٩٣٣٧٢٠ / ٣٤٠٠٧ ثم نضع مربع المطلوب بحذائه تحت العدد، وينقص منه ثلث عدد الجذور، ويبطل السطر الذي هو ثلث عدد الجذور، وننقل الأعلى بمرتبتين، والأسفل بمرتبة، ونعمل العمل السابق إلى آخره». انظر: المصدر نفسه، مج ١، ص ٤٩ ـ ٥٢.

(٣٨) المصدر نفسه، مج ١، ص ١١٨ وما يليها.

ومن ناحية أخرى، يقدم الأصفهاني في الرسالة المذكورة سابقاً، طريقة هامة للبحث عن جذر موجب للمعادلة التكعيبية يرتكز على خاصية «النقطة الثابتة»، لا نعلم إن كان قد أخذه عن أسلافه القدماء على غرار اقتباسه لطريقة الطوسي في الحل العددي. لكننا نرجح كفة اقتباس من هذا النوع على الرغم من أننا لا نستطيع حسم هذه المسألة حالياً. ونقدِم في ما يلي عرضاً سريعاً لهذه الطريقة المطبقة على مثل من عند الأصفهاني بالذات، حيث يأخذ المعادلة: $x^3 + 210 = 121x$ (حيث $x \in R_+$)

تُكتب هذه المعادلة على الشكل: $x = (121x - 210)^{\frac{1}{3}} = f(x)$ فيأخذ الأصفهاني $x'_1 = 11$ فيكون:

$$y_1 = f(x'_1) = (1121)^{\frac{1}{3}} < 11$$

ويأخذ قيمة تقريبية لِـ y_1، بالنقصان هي 10,3؛ فيجد: $f(10,3) = (1036,3)^{\frac{1}{3}} < 10,3$ ، وعند ذلك يأخذ $x'_2 = 10,3$ وَ $y_2 = f(x'_2) = (1036,3)^{\frac{1}{3}}$؛ ومن ثم يأخذ قيمة تقريبية بالنقصان لِـ y_2، مثلاً 10,1، فيكون:

$$f(10,1) = (1012,1)^{\frac{1}{3}} < 10,1$$

فيأخذ $x'_3 = 10,1$، وهكذا دواليك، فتكون المتالية: $x'_1 = 11 > x'_2 = 10,3 > x'_3 = 10,1 > ...$

نُشير هنا إلى أن الأصفهاني يختار القيمة ١١ بطريقة تختلف نوعاً ما عن التي عرضنا، فبَدَل الدالة f يأخذ دالة تحدها فوقياً وهي g: $g(x) = (121x)^{\frac{1}{3}}$. ويبحث عن جذرٍ x_1 للمعادلة $x = g(x)$ مما يؤكِد أنه في حال كون x_0 الجذر المطلوب، يكون: $x_1 = 11 > x_0$.

وعلى الرغم من أن حضور تعبير المشتق أمر لا يرقى إليه الشك إلا أن الطوسي لا يشرح الطريق التي قادته إلى هذا المفهوم.

ولكي نستوعب بشكل أفضل أصالة مساعي الطوسي، لنأخذ مثل المعادلة (3) التي يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = x(b - ax - x^2) = c.$$

والمسألة الأساسية هي إيجاد القيمة $x = x_0$ التي بها تصل $f(x)$ إلى نهايتها العظمى.

شرح الطوسي كيفية المرور من المعادلة (3) إلى معادلتين من نوعين سبق أن حلهما، باستعمال تحويلات أفينية:

$$x \to y = x_0 - x \quad \text{و} \quad x \to y = x - x_0$$

وفي سياق شرحه هذا أعطى المتساويتين التاليتين:

$$f(x_0) - f(x_0 + y) = 2x_0(x_0 + a)y - (b - x_0^2)y + (3x_0 + a)y^2 + y^3,$$

وَ

$$f(x_0) - f(x_0 - y) = (b - x_0^2)y - 2x_0(x_0 + a)y + (3x_0 + a)y^2 - y^3.$$

ولا بد أن الطوسي قد قارن بين $f(x_0)$ و $f(x_0 + y)$ وبينها وبين $f(x_0 - y)$ ملاحظاً أنه في الفسحة $]0, \lambda_2[$، يكون التعبيران:

$$y^2(3x_0 + a - y) \quad \text{و} \quad y^2(3x_0 + a + y)$$

موجبين. من ثم استطاع أن يستنتج من المتساويتين ما يلي:

- إذا كان $b - x_0^2 \geq 2x_0(x_0 + a)$ يكون $f(x_0) > f(x_0 + y)$،

- إذا كان $b - x_0^2 \leq 2x_0(x_0 + a)$ يكون $f(x_0) > f(x_0 - y)$؛

وبالتالي:

$$b - x_0^2 = 2x_0(x_0 + a) \Longrightarrow \begin{cases} f(x_0) > f(x_0 + y), \\ f(x_0) < f(x_0 - y); \end{cases}$$

وهذا يعني أنه في حال كون x_0 الجذر الموجب للمعادلة التالية:

$$f'(x) = b - 2ax - 3x^2 = 0,$$

يكون $f(x_0)$ هو النهاية العظمى لِ $f(x)$ في الفترة المدروسة.

تجدر الإشارة إلى أن المتساويتين المذكورتين أعلاه تتلاءمان مع توسيع (مفكوك) تايلور (Développement de Taylor) حيث:

$$f'(x_0) = b - 2ax_0 - 3x_0^2; \ \frac{1}{2!}f''(x_0) = -(3x_0 + a); \ \frac{1}{3!}f'''(x_0) = -1$$

يرمي الطوسي إذن، على ما يبدو، إلى ترتيب $f(x_0+y)$ و$f(x_0-y)$ حسب قوى y وإلى تبيان أن الوصول إلى النهاية العظمى يتحقق عندما يكون معامل y في هذا المفكوك هو الصفر. تكون إذن قيمة x التي تعطي $f(x)$ نهايتها العظمى هي الجذر الموجب للمعادلة $f'(x) = 0$. فبفضل التحويلين الأفينيّين $x \to x_0 \pm y$، حيث x_0 هو جذر للمعادلة $f'(x) = 0$، يختفي الحد الذي يحوي y في المعادلة الجديدة. لذا، فمن المعقول أن يكون الطوسي قد توصل إلى المعادلة $f'(x) = 0$ انطلاقاً من هذه الخاصية المرتبطة برسم المنحني الذي يمثل f، الذي لا يرسمه الطوسي أبداً في «الرسالة»؛ فعندما يكون y صغيراً، يكون «القسم الأساسي» من «تغيُر» $f(x_0 \pm y)$ مؤلفاً من القوى الثانية من y، (y^2) فلا تتغير إشارته مع تغير إشارة y. وقد بينا في مكان آخر أن مسعى الطوسي يُشبِه إلى حد بعيد مسعى فيرما (Fermat) في بحثه عن النهايات العظمى والصغرى للدالات الحدودية(٣٩).

هكذا، إذن، نرى أن نظرية المعادلات لم تعد تقتصر على فصل من فصول الجبر، لكنها تتضمن مجالاً أوسع من ذلك بكثير. فهذا الرياضي يجمع ضمن هذه النظرية، الدراسة الهندسية للمعادلات وحلها العددي. إنه يطرح، ومن ثم يحل مسألة وجود الحل لكل من المعادلات، مما يقوده إلى اختراع الدراسة الموضعية للمنحنيات التي يستخدمها، وخاصة إلى دراسة منهجية للنهاية العظمى لحدوديات من الدرجة الثالثة عن طريق معادلة المشتق. وفي مجرى حلِه العددي، لم يكتفِ بتطبيق خوارزميات يظهر فيها من جديد تعبير المشتق للحدودية، بل إنه يجهد أيضاً لتبرير هذه الخوارزميات عن طريق مفهوم «الحدوديات المهيمنة» (Polynômes dominants). إن هذا يدل على مستوىً رياضي متقدم جداً بالنسبة إلى عصره؛ وجدير بالذكر هنا أن هذا المستوى بدأ ببلوغ أقصى ما يمكن أن يتوصل إليه بحث رياضي لا يتمتع بنظام رمزي فعال. فلقد قام الطوسي بكل أبحاثه مستعيناً فقط باللغة الطبيعية من دون أية رمزية (سوى رمزية اللوحات التي جعلت هذه الأخيرة في غاية التعقيد). إن هذه الصعوبة تنتصب لا لتشكِل عائقاً داخلياً يؤخر تقدم أبحاثه فحسب، إنما أيضاً لتشكل عائقاً أمام نقل وانتشار نتائجه. وهذا يعني أن الرياضي، بمجرد أن يبدأ معالجة المفاهيم التحليلية كالتي ذكرنا، كان يعترضه قصور اللغة الطبيعية في التعبير عن المفاهيم وعن العمليات المطبقة عليها. فإذا بعدم كفاية اللغة الطبيعية يحد من تجديد المعرفة الرياضية كما يحد من نشر هذه المعرفة. ومن المعقول جداً أن يكون خلفاء الطوسي قد اصطدموا بهذا العائق إلى أن تعرض الترميز الرياضي لتحولاته الكبرى وانطلاقاً من ديكارت على وجه الخصوص.

إن مَثَل الطوسي يكفي ليبرهن أن نظرية المعادلات لم تتعرض فقط للتحولات منذ الخيام، بل إنها استمرت تبتعد ابتعاداً متزايداً عن ميدان البحث عن الحلول بواسطة الجذور؛ فقد اتجهت لتطال مجالاً واسعاً من الأبحاث التي انتهت فيما بعد إلى الهندسة التحليلية، أو بكل بساطة إلى التحليل الرياضي.

---

(٣٩) المصدر نفسه، مج ١، ص xxvii.

لكن الجواب عن السؤال حول مصير نظرية المعادلات حسب الطوسي، يبقى معلقاً بانتظار المزيد من الأبحاث. فإننا لا نعرف لتلميذه كمال الدين بن يونس أي عمل جبري. ولكننا، وبالمقابل، نعلم أن تلميذ هذا الأخير، أثير الدين الأبهري (المتوفى عام ١٢٦٢م) قد ألف عملاً جبرياً وصلنا مبتوراً، باعتراف الناسخ نفسه لهذا العمل. لكنه، في القسم الذي وصلنا منه، يُطبق طريقة الحل العددي العائدة للطوسي وبالتعابير نفسها التي يستعملها هذا الأخير، على المعادلة $x^3 = a$. أما الخلاطي[٤٠]، وهو أحد الجبريين من ذلك العصر، فيذكر أن الطوسي كان «أستاذ أستاذه» وبأنه هو نفسه درس المعادلات التكعيبية، لكنه بقي أميناً لتقليد الكرَجي. ولدينا شهادات أخرى تأتي على ذكر الطوسي[٤١]، إلا أننا لا نحوز على أي إشارة على وجود رياضيين أعادوا دراسة نظريته. وقد نستطيع تتبع آثار كتاب الطوسي عند خلفائه لكننا، وحتى الآن، لا نعرف أي عمل تناول جبره بالشرح أو بالتعليق. وقد نجد دراسات من هذا النوع، إلا أننا نشك (إذا ما وجدت) بإمكانية تجاوزها لعمل الطوسي، في غياب نظام رمزية فاعلة، لا بد منها لتطوير المفاهيم التحليلية التي تضمها رسالته في المعادلات.

(٤٠) الخلاطي، نور الدلالة في علم الجبر والمقابلة (مخطوطة جامعة طهران، رقم ٤٤٠٩)، الورقة ٢.

(٤١) انظر: شمس الدين المارديني، نساب الحبر في حساب الجبر (اسطنبول، مخطوطة فايز الله، رقم ١٣٦٦)، الورقتان ١٣ ـ ١٤.

- ١٢ -

التحليل التوافيقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد[*]

رشدي راشد

لم يقم خلفاء الخوارزمي بتطبيق علم الحساب على الجبر فحسب، بل أيضاً طبقوا الجبر، الذي قام الكرجي بتجديده، على علم الحساب، وعلى حساب المثلثات وعلى نظرية إقليدس في الأعداد. هذه التطبيقات، كتطبيق الجبر على الهندسة، والهندسة على الجبر، التي عالجناها في الفصل السابق، لعبت دائماً دوراً أساسياً في تَشَكُّلِ ميادين جديدة في الرياضيات، أو على الأقل في تشكل فصول رياضية جديدة. وهكذا لَعب الجبر - والتنويه يبقى ضرورياً - دوراً مركزياً ليس فقط في إعادة بنيان مواد الإرث الإغريقي التعليمية وتنظيمها، وتوسيع حقولها وطرقها، وإنما أيضاً، وخاصة، في خلق مواد جديدة. هكذا تشكل التحليل التوافيقي والتحليل العددي، والنظرية الجديدة البدائية للأعداد والتحليل *الديوفنطسي الصحيح*[1]. *وسنستعيد بإيجاز تاريخ هذه الفصول التي كانت إلى الأمس* القريب مجهولة بأغلبيتها[2].

(*) قام بترجمة هذا الفصل منى غانم ونقولا فارس.

(١) أي في مجموعة الأعداد الصحيحة. (المترجم).

(٢) من العبث بالفعل البحث عن الفصول التي تعالج التحليل التوافيقي، والتحليل الديوفنطسي الصحيح والنظرية التقليدية للأعداد، ضمن فصول الرياضيات العربية التي درج المؤرخون على دراستها. ولم تُعالج هيكلية هذا النشاط ولم يتم التعرف على هذا الفصل الأول كما هو إلا في دراستنا التي ظهرت في العام ١٩٧٣. انـظـر: Roshdi Rashed, «Algèbre et linguistique: L'Analyse combinatoire dans la science arabe,» dans: Robert S. Cohen, ed., *Boston Studies in the Philosophy of Sciences* (Boston: Reidel Pub. Co., 1973), pp. 383-399.

وهكذا بالنسبة إلى التحليل الديوفنطسي الصحيح: فهو لم يُقدم كنشاط مستقل عن التحليل غير المحدد =

التحليل التوافيقي

إن البحث عن النشاط التوافيقي بطريقة ساذجة، أي حيث يظهر من دون قصدٍ خاص، ومثلاً على ذلك توافق الحدود ـ وهي «العدد» و«الشيء» و«المال» و«الكعب» ـ لتعداد جميع أشكال المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون، هو شيء. أما متابعة هذا النشاط إلى حيث نحاول استخلاص قواعِده وقوانينه فهو شيء آخر. إن هذه الأبحاث وحدها هي التي أدت إلى إنشاء التحليل التوافيقي كفصل من الرياضيات. غير أن هذا النشاط التوافيقي قد بدأ بالظهور على هذا النحو، بطريقة مبعثرة، عند اللغويين من جهة وعند علماء الجبر من جهة أخرى. ولاحقاً تم الربط بين هذين التيارَيْن، وظهر التحليل التوافيقي كأداة رياضية تُسْتَعْمَل في حالات متعددة: لغوية، وفلسفية، ورياضية... وسابقاً، في القرن التاسع للميلاد، نجد هذا النشاط عند اللغويين والفلاسفة الذين طرحوا مسائل تتعلق باللغة، في ثلاثة ميادين خاصة: علم النطقيات والمعجميات وعلم الرموز. وقد طُبِعَ تاريخُ هذه العلوم الثلاثة باسم الخليل بن أحمد (العام ٧١٨ ـ ٧٨٦م). وهذا الأخير استعان بشكل صريح بحساب الترتيبات والتوافيق في سبيل إعداد علم المعاجم العربي. فقد رمى الخليل[٣] في مؤلفه كتاب العين إلى عقلنة الممارسات التجريبية للمعجميين. وأراد بالتالي التوصل إلى تعداد كلمات اللغة بطريقة وافية (استنفادية)، من جهة، وإيجاد وسيلة لقيام تناظر متعاكس بين مجموعة الكلمات وخانات المعجم من جهة أخرى. فإذا به يُطلِق النظرية التي مفادها أن اللغة هي جزء تحقق صوتياً في اللغة الممكنة. فإن الترتيبَ من r إلى r[٤] أحرف أبجدية، مع $1 < r \leq 5$ (وr هو هنا عدد أحرف المصدر للكلمة العربية) يعطينا مجموعة المصادر، وبالتالي، الكلمات من اللغة الممكنة كما يقول الخليل؛ وبالتالي، فإن جزءاً فقط من هذه المجموعة تُحدِدها القواعد الصوتية اللغوية للمصادر، هو الذي يشكل اللغة. يعود إذاً تأليفُ

= أو عن التحليل الديوفنطسي المنطق قبل دراستنا التي ظهرت في العام ١٩٧٩. انظر: Roshdi Rashed, «L'Analyse diophantienne au X^{ème} siècle: L'Exemple d'al-Khāzin,» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 32, no. 3 (1979), pp. 193-222.

ويصح القول نفسه أيضاً فيما يخص النظرية التقليدية للأعداد ودور الجبر في صياغتها والتي لم يتم التعرف إليها إلا في دراستنا التي ظهرت في العام ١٩٨٣. انظر: Roshdi Rashed, «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^{e}-XIV^{e} siècles,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, no. 2 (1983), pp. 107-147.

وقد نشرت هذه الدراسات المذكورة أعلاه مع أخرى ضمت إليها في:

Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984).

(٣) انظر: Rashed, «Algèbre et linguistique: L'Analyse combinatoire dans la science arabe».

(٤) r هو عدد الأحرف المنوّى ترتيبها. وعدد الترتيبات (Arrangements)، هو $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ حيث n هو عدد الأحرف الأبجدية جميعها $n = 27$. (المترجم).

معجم إلى تشكيل اللغة الممكنة ليُصار فيما بعد إلى استخراج جميع الكلمات الداخلة فيها، حسبَ القواعد المذكورة.

إضافة إلى ذلك، اقتضت صياغةُ هذا البحث الهام دراسةَ علم النطق بالعربية، وهذا ما قام به الخليل أولاً. بدأ الخليل، لتأليف المعجم، بحساب عدد التوافيق ـ دون تكرار ـ لأحرف الأبجدية، من r إلى r أحرف، حيث $r \in \{2,3,..,5\}$، ثم حسب عدد التبديلات في كل زمرة من r أحرف. وبتعبير آخر، قام بحساب:

$$A_n^r = r!\binom{n}{r}$$

حيث n هو عدد أحرف الأبجدية و $1 < r \leq 5$.

ونجد نظرية الخليل وحساباته هذه في كتابات العديد من المعجميين اللاحقين. ومن جهة أخرى، استخدِمت هذه النظرية وهذا الحساب في علم الرموز، الذي قام بتطويره الكِندي ابتداءً من القرن التاسع للميلاد، ومِن بعدِه لغويون من بينهم ابن وحشية وابن طباطبا، في نهاية القرن عينه وبداية القرن اللاحق. وقد استعان علماء الرموز، في تطبيق علمهم هذا، بتحليل الخليل للنطقيات، وبحساب تواتر الأحرف بالعربية وبحساب التبديلات والتعويضات والتوافيق. وترك لنا عدد غير قليل من كبار اللغويين، بدءاً بالخليل نفسه، كتاباتٍ في علم الرموز وتحليلها[٥].

إبان هذا النشاط التوافيقي الهام، أعلن علماء الجبر وبرهنوا، كما رأينا، في نهاية القرن العاشر للميلاد، قاعدة تشكيل المثلث الحسابي لاحتساب معاملات توسيع «ذي الحدين». فقد أعطى الكرجي[٦] القاعدة:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad (*)$$

والتوسيع:

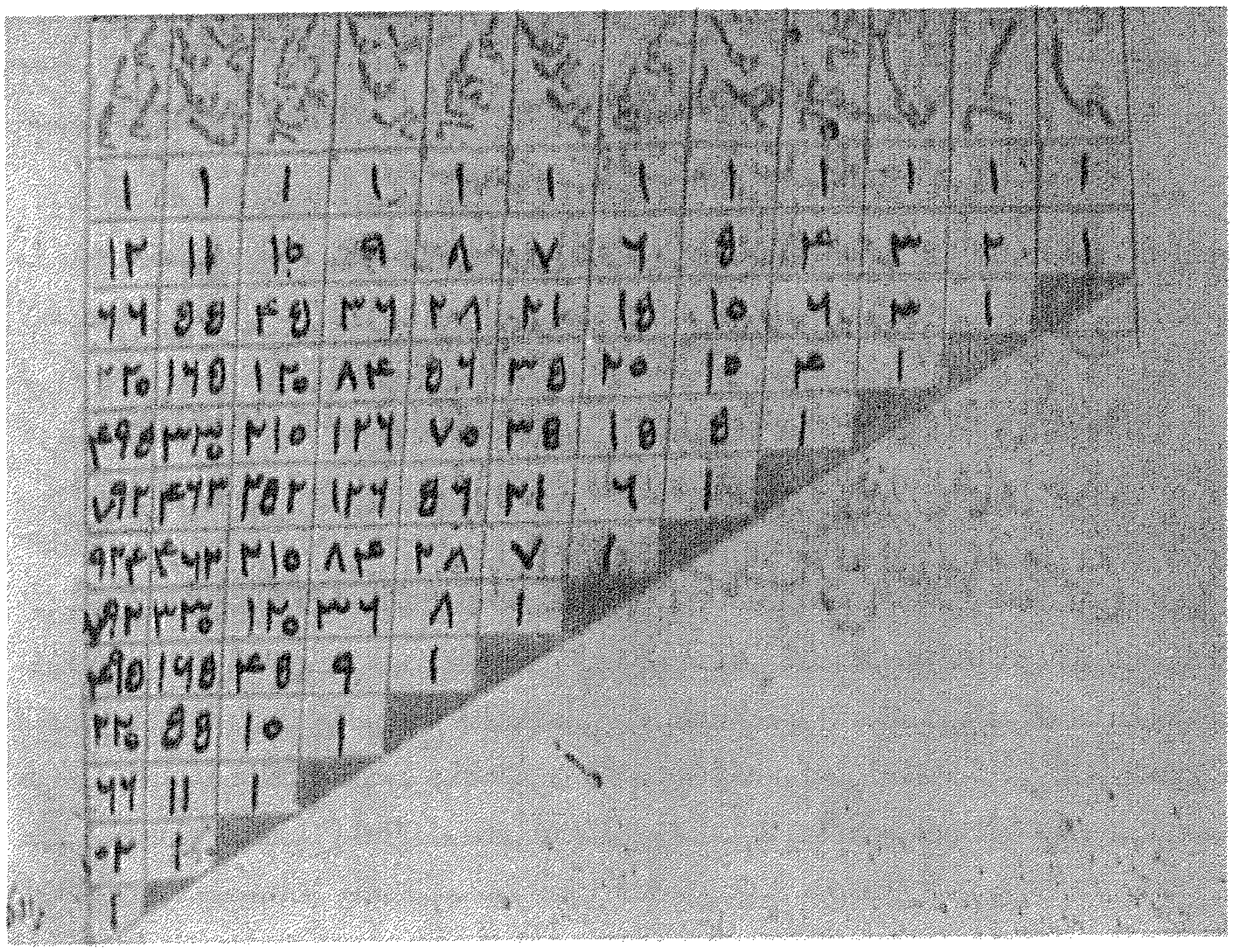
$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

(٥) في كتابه الضخم *The Codebreakers*، كتب دافيد كاهن (David Kahn): «وُلِدَ علم الرموز بين العرب. فكانوا أول من اكتشف طرق تحليل الرموز وكتب عنها». انظر: David Kahn, *The Codebreakers: The Story of Secret Writing* (New York: Macmillan, 1967), p. 93.

ومؤخراً ذكر هذا الحدث، المعروف منذ أمد بعيد، بسبب التوسع في نظرية الرموز. وقام جوزف هامر (Joseph Hammer) في العام ١٨٠٦، بنقل كتاب ابن وحشية إلى الإنكليزية: Ahmad Ibn 'Ali Ibn Wahshiyah, *Ancient Alphabets and Hieroglyphic Characters Explained*, english translation by Joseph Hammer (London: W. Bulmer, 1806).

انظر أيضاً: C. E. Bosworth, «The Section on Codes and their Decipherment in Qalqashandi's *Subh al-a'shā*,» *Journal of Semitic Studies*, vol. 8 (1963), pp. 17-33.

(٦) السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، الباهر في الجبر، ملحوظات وتقديم ونشر صلاح أحمد ورشدي راشد، سلسلة الكتب العلمية؛ ١٠ (دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣)، ص ١٠٤ وما يليها.



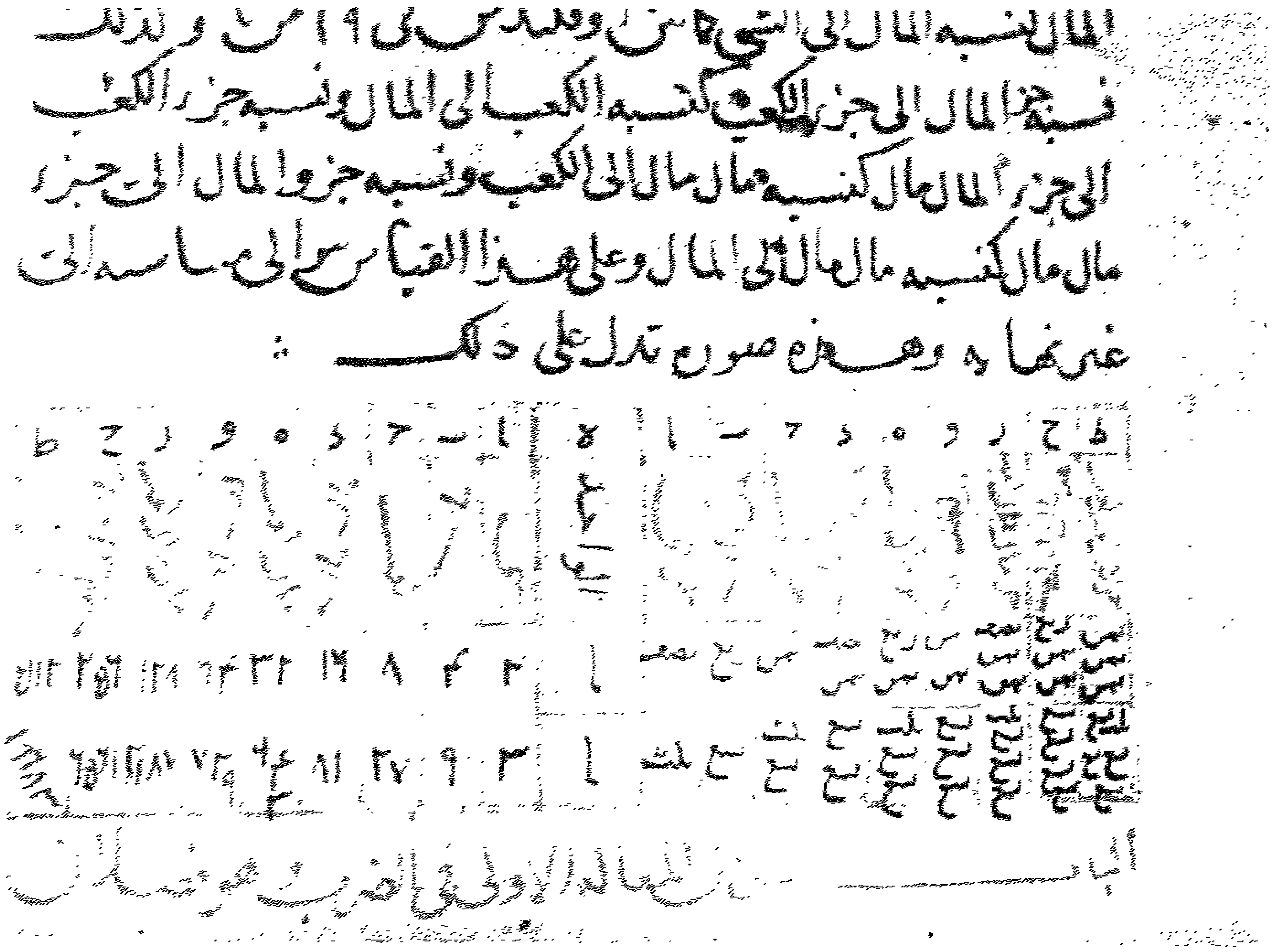
الصورة رقم (١٢ ـ ١)

السموأل بن يحيى المغربي (ت ٥٧٠/ ١١٧٤)، **الباهر في الجبر**
(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٢٧١٨).

ينقل السموأل هنا ما كتبه الكرجي (أو الكرخي) في القرن العاشر حول المثلث الحسابي، وهذه أول مرة يذكر فيها المثلث الحسابي في تاريخ الرياضيات قاطبة. ويذكر السموأل في نفس الموضع ما كتبه الكرجي حول برهان قاعدة تكوين هذا المثلث، وكذلك حول فك ذي الحدين، وهي القاعدة التي يمكن كتابتها على هذا النحو:

$$(x+y)n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ , \quad n \in N.$$

وسنجد هذه النتائج في الرياضيات العربية بين القرن العاشر والقرن السابع عشر، عند أمثال نصير الدين الطوسي وجمشيد بن مسعود الكاشي ومحمد بن باقر، ولقد عرفها فيما يبدو الرياضيون اللاتينيون عن طريق هؤلاء.


نسبة جزء المال الى جزء الكعب كنسبة الكعب الى المال ونسبة جزء الكعب
الى جزء مال المال كنسبة مال مال الى الكعب ونسبة جزء المال الى جزء
مال مال كنسبة مال المال الى المال وعلى هذا القياس الى ما نسبة الى
غير نهاية وهذه صورة تدل على ذلك

الصورة رقم (١٢ ـ ٢)

السموأل بن يحيى المغربي، الباهر في الجبر

(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٢٧١٨).

نقرأ في هذه الصفحة أول صياغة جبرية للقاعدة التالية:

$x^n x^m = x^{n+m}$ **حيث** $m, n \in Z$

استخدم الرياضيون الجداول كما نرى هنا كوسيلة لإدخال نوع من الرمزية، ولئن كانت هذه الوسيلة صعبة الاستعمال والتطوير، إلا أنها اتسمت بفائدة كبيرة في هذه المرحلة. وما نقرأه هنا هو أول صياغة عامة معروفة لهذه القاعدة.

ولقد قام علماء الجبر بتطبيق القواعد الجديدة في حساباتهم. فأخذ السموأل مثلاً[٧]، عشرة مجهولات وبحث عن نظام من المعادلات الخطية ذي ستة مجهولات. إذ ذاك وافق العشرة أرقام العشرية، التي اعتُبِرَت كرموز للمجهولات ـ ويقال اليوم أدلتها (Indices) ـ ستة بستة، وحصل هكذا على نظام من ٢١٠ معادلات. واتبع أيضاً طريقة التوافيق لإيجاد الشروط، وهي ٥٠٤، لمقبولية النظام، أي لكونه غير مستحيل. وقد شكلت جميع هذه

(٧) المصدر نفسه، ص ٢٣٢ من النص العربي وص ٧٧ من المقدمة.

النشاطات التوافيقية وهذه القواعد المُكْتشفة أثناء البحث اللغوي والدراسات الجبرية، الشروط الملموسة لبروز هذا الفصل الجديد من الرياضيات.

مع ذلك، بقي أن نشير إلى أن شهادة ميلاد هذا الفصل تكمن في التفسير التوافيقي الواضح «للمثلث الحسابي» ولقانون إنشائه. . .، أي للقواعد التي أعطاها الكرجي كأدوات حسابية. فمن المغالاة الاعتقاد بأن علماء الجبر لم يفقهوا هذا التفسير باكراً. بل على العكس، نحن نقتنع أكثر فأكثر بأن علماء الجبر قد لاحظوا هذا التفسير، لكن لم يكن لديهم أيّ دافع عملي لإعطاء صيغة واضحة له. إلا أنهم شعروا بهذه الضرورة عند البدء بتطبيق قواعد الحساب التوافيقي لبحث مسائل في الرياضيات أو مسائل أخرى أرادوا حلها عن طريق الرياضيات. يؤكد مثلُ السموأل، بشكل أو بآخر، هذا الأمر؛ فمن المحتمل أن يعود التفسير التوافيقي إلى ما قبل القرن الثالث عشر للميلاد، وبمقدورنا اليوم إثبات هذا الأمر بفضل نص مجهول حتى الآن لعالم الرياضيات والفيلسوف نصير الدين الطوسي (١٢٠١ - ١٢٧٣م). تدل قراءة هذا النص[٨] على أن هذا الأخير كان على علم بهذا التفسير، ويقدِمه (أي التفسير) ببساطة على أنه شيء مسلم به ويعبر عنه بمصطلحات، نجدها جزئياً أو كلياً عند خلفائه. وقد أراد الطوسي، في هذا النص، الإجابة عن السؤال الماورائي التالي: «كيف تنبثق كمية لامتناهية من الأشياء من المبدأ الأول والوحيد؟». أي كيف نفسِر اللامتناهي انطلاقاً من الواحد؟ وليس بنيّتنا هنا معالجة سؤال الطوسي الماورائي، إنما فقط التذكير بقصده وهو حل هذه المسألة الفلسفية رياضياً. وفي سياق هذا الحل، جُمِلَ الطوسي على احتساب عدد توافيق n من الكائنات المتمايزة، مأخوذة من k إلى k كائناً، حيث $1 \leq k \leq n$. هكذا قام بحساب $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$ في حال $n = 12$، واستعمل في سياق حسابه، المساواة: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ولنذكر الآن، أن الطوسي قد أعطى، في كتابه في علم الحساب[٩]، «المثلث الحسابي» وقانونَ وضعِه. . . وهنا في النص المذكور، قام بتطبيق بعضٍ من هذه القواعد. لكن، لشرح هذا الحساب، أخذ الطوسي ١٢ حرفاً من الأبجدية، ووافقها ليستنتج صيغه.

ويعود الطوسي بعدئذٍ لمسألته الأصلية، فينظر، إضافةً إلى الـ $n = 12$ عنصراً، إلى $m = 4$ عناصر أولية، حصل انطلاقاً منها على العناصر الـ ١٢ المذكورة. تعود المسألة في الواقع إلى أخذ فئتين من الكائنات: الأولى من $n = 12$ عنصراً متمايزاً، والثانية من $m = 4$

(٨) انظر دراستنا قيد الظهور وهي بعنوان: «Métaphysique et combinatoire».

(٩) نصير الدين الطوسي، «جوامع الحساب بالتخت والتراب،» تحرير أحمد سليم سعيدان، الأبحاث، السنة ٢٠، الجزء ٢ (حزيران / يونيو ١٩٦٧)، ص ١٤١ ـ ١٤٦، والسنة ٢٠، الجزء ٣ (أيلول / سبتمبر ١٩٦٧).

عناصر متمايزة، وإلى حساب عدد التوافيق الممكن القيام بها. ويقوم الطوسي بحساب عبارة مكافئة لـ:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} \text{ حيث } 0 \le p \le 16.$$

وانطلاقاً من الطوسي على أقل تقدير، وربما من قبله، لم يتوقف البحث عن التفسير التوافيقي للمثلث الحسابي وعن قانون إنشائه، وكذلك عن مجموعة القواعد الأساسية للتحليل التوافيقي. وكما برهنا سابقاً، ففي نهاية القرن عينه وبداية القرن الرابع عشر للميلاد، يعود كمال الدين الفارسي (ت ١٣١٩م) في بحث عن نظرية الأعداد، إلى هذا التفسير ويُثبت استعمال «المثلث الحسابي» للترتيبات العددية، وهي النتيجة المنسوبة عادة لباسكال (Pascal). في الواقع، ومن أجل تأليف الأعداد الشكلية (Nombres figurés)[١٠]، يثبت الفارسي علاقة مكافئة للتالية:

$$F_p^q = \sum_{k=1}^{p} F_k^{q-1} = \binom{p+q-1}{q}$$

حيث F_p^q هو العدد الشكلي من المرتبة p ومن الدرجة q، علماً أن $F_1^q = 1$ لأي عدد q.

لكن، وبينما الفارسي منقطع إلى هذه الأعمال في إيران، كان ابن البناء[١١] (ت ١٣٢١م) منصرفاً، في الوقت نفسه في مراكش، إلى التحليل التوافيقي. وهذا الأخير يعود في الواقع للتفسير التوافيقي، ويستعيد القواعد المعروفة من قبله، وعلى الأخص قواعد ترتيب n من الكائنات المتمايزة، من دون ترديد من r إلى r وقواعد التبديلات والتوافيق التي من دون ترديد:

$$(n)_r = n(n-1)...(n-r+1)$$

$$(n)_n = n!$$

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!},$$

وهي علاقات تُستنتج بسهولة من العبارة (*) التي أعطاها الكرجي قبل ذلك بثلاثة قرون.

(١٠) انظر: Roshdi Rashed: «Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire,» *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 6, nos. 1-2 (1982), pp. 209-278, et «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^e - XIV^e siècles,» pp. 107-147.

(١١) المصدران نفسهما.

لم يخلف الفارسي وابنُ البناء الطوسي فحسب، وإنما استعملا الجزء الأكبر من المعجم الذي اعتمده هذا الأخير. إن هذه الاهتمامات المشتركة، التي تشكِل المصطلحات القسمَ الأكبرَ منها، تدل على أن القضية هي فعلاً قضية تقليد، وتؤكِدُ فرضية كنا قد أطلقناها[١٢] منذ عشرة أعوام، مفادها أن التحليل التوافيقي قد تشكل كفصل رياضي قبل الفارسي وابن البناء. ومع هذين المؤلِفين، لم يقتصر تطبيق التحليل التوافيقي على حقل الجبر أو اللغة فقط، وإنما امتد إلى حقول متنوعة جداً، كالماورائيات مثلاً، أي إلى كلِ حقلٍ يهتمُ بتقسيم مجموعة من الأشياء.

وبقيت هذه النظرية وهذا الفصل إلى ما بعد هذه الحقبة. واستمر التطرق إلى التحليل التوافيقي في مختلف مؤلفات الرياضيات، وتكرست له مقالات مستقلة. فقد، تطرق إلى التحليل التوافيقي، علماءُ رياضيات لاحقون نذكر منهم، على سبيل المثال لا الحصر، الكاشي[١٣]، وابن المالك الدمشقي[١٤]، واليزدي[١٥]، وتقي الدين بن معروف. فاستعاد الثلاثةُ الأوائل المثلث الحسابي، وقاعدتَه وتطبيقاتِه، وأما الأخير فاستعاد مثل الاشتقاق اللغوي في كتابه في علم الحساب[١٦]، ليعطي صيغة التبديل. أما فيما يتعلق بمؤلِفي الرسائل المستقلة، فلنذكر هنا، وللمرة الأولى، الحلبي، الذي استعاد مجموعة الصيغ الأساسية، والنص السابق للطوسي في شرحٍ طويلٍ نسبياً، كما قدّم تفسيراً نظرياً للتمييز بين الترتيبات بترديدٍ أو من دونه، مع مراعاة التتالي (المراتب أو النظام) أو من دون مراعاته؛ واستعاد العمل نفسه بالنسبة إلى التوافيق، ولم يتردد في القيام بحساباتٍ طويلةٍ قياساً على عصره[١٧]. ولتسهيل هذه الحسابات، يُظْهِرُ ما أضمرته مقالة الطوسي: العلاقة بين الأعداد الشكلية وعدد التوافيق المختلفة، وذلك بفضل الجدول رقم (١٢ ـ ١)، حيث $n = 12$.

---

(١٢) Rashed, «Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire,» p. 210.

(١٣) غياث الدين جمشيد بن مسعود الكاشي، مفتاح الحساب، تحقيق ونشر أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ؛ مراجعة عبد الحميد لطفي (القاهرة: دار الكتاب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧)، ص ٧٣ ـ ٧٤، حيث يعطي قانون تركيب المثلث الحسابي.

(١٤) ابن المالك الدمشقي، الإسعاف الأتم (مخطوطة رياضة، ١٨٢، دار الكتب، القاهرة)؛ يعطي المثلث الحسابي ويشرح تشكيله في الصفحتين ٤٦ ـ ٤٧. يضع الدمشقي في المثلث، الأسماء بالقوة ـ شيء، ومربع. . . إلخ باختصار.

(١٥) محمد بكر اليزدي، عيوب الحساب (اسطنبول، السليمانية، مخطوطة هزيناسي، ١٩٩٣). انظر: المثلث الحسابي، الورقتان ١ و٢٠و ـ ظ.

(١٦) بغية الطلاب (مخطوطة، ٤٩٦، مجموعة پول سباث)، الورقتان ١٣٧ظ ـ ١٣٨و.

(١٧) انظر دراستنا قيد الظهور: «Métaphysique et combinatoire».

p \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220		
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495			
6	1	6	21	56	126	252	462	792				
7	1	7	28	84	210	462	924					
8	1	8	36	120	330	792			5			
9	1	9	45	165	495			9				
10	1	10	55	220			0					
11	1	11	66			4						
12	1	12										
	1											

الجدول رقم (١٢ ـ ١)

التحليل العددي

تقدم الرياضيات العربية، قياساً على الرياضيات الإغريقية عدداً أكبر من الخوارزميات العددية. وهذه الميزة قد فرضت نفسها على أغلبية المؤرخين، لا سيما بعد الأعمال التي قام بها پول لوكي (Paul Luckey)[١٨] عن الكاشي، وهو عالم رياضيات من القرن الخامس عشر للميلاد. على أن تواريخ الكاشي المتأخرة نسبياً تجعل من الصعوبة توضيحَ الأسباب الحقيقية لهذا الطابع، للتمكن من وضعه في تصور تاريخي. ويتغير هذا الوضع، إلى حدٍ كبيرٍ، بعد تمكننا من الإثبات بأن إسهام الكاشي يأتي من البعيد، من القرن الثاني عشر للميلاد على الأقل، كما تشهد على ذلك كتابات السموأل[١٩] وشرف الدين الطوسي[٢٠]. وتعيدُنا هذه الأعمال، التي أضفنا إليها حديثاً مقالاً للبيروني، وهو عالم رياضيات وفلكي من القرن

---

(١٨) Paul Luckey, «Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der Binomische Lehrsatz in der Islamischen Mathematik,» *Mathematische Annalen*, Bd. 120 (1948), pp. 217-247.

(١٩) Roshdi Rashed, «L'Extraction de la racine n[ième] et l'invention des fractions décimales, XI[e] - XII[e] siècle,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 18, no. 3 (1978), pp. 191-243, réimprimé dans: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, pp. 93-145.

(٢٠) انظر: Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XII[e] siècle*, texte édité et traduit par Roshdi Rashed, 2 vols. (Paris: Les Belles lettres, 1986), vol. 1, pp. lix-cxxxiv.

الحادي عشر للميلاد، عدة قرون إلى الوراء، وتوضح أسباب توسع التقنيات العددية. وترتبط هذه الأخيرة ارتباطاً وثيقاً بالجبر وبعلم الفلك القائم على الرصد.

وفي الواقع، لم يكتفِ الجبر بتقديم الطرقَ النظرية الضرورية لهذا التوسع ـ وأقلها دراسة العبارات الحدودية والقواعد التوافيقية ـ وإنما قدم أيضاً ميداناً واسعاً لتطبيق هذه التقنيات: الطرق المطورة لتحديد الجذور الموجبة للمعادلات العددية. من جهة أخرى، حملَ البحثُ الفلكي علماءَ الرياضيات على استعادة مسائل الاستكمال لبعض الدالات المثلثية. بعض من هذه الطرق، كما سنرى لاحقاً، قد طُبِق في البحث الكمي في البصريات. فإذا بنا بشكل طبيعي أمام تشكُلِ مجموعةٍ قيّمة من التقنيات العددية، التي من المستحيل وصفها في عدد قليل من الصفحات.

ويفوق أهميةً، عن عدد الخوارزميات العددية التي أوجدها علماء الرياضيات، اكتشافُ محاور جديدة للبحث كالتبرير الرياضي للخوارزميات، والمقارنة بين مختلف الخوارزميات بهدف اختيار الأفضل، أي، وباختصار، التفكير الواعي حول طبيعة التقريبات ونهاياتها.

يبقى، إذاً، أن نعود إلى الحقول الرئيسية التي تقاسمت التحليل العددي: استخراج الجذور لِعدد صحيح وحل المعادلات العددية من جهة، وطرق الاستكمال من جهة أُخرى.

استخراج الجذور التربيعية والتكعيبية

كلما أوغلنا في تاريخ الرياضيات العربية، صادفنا خوارزميات لاستخراج الجذور التربيعية والتكعيبية؛ وبعض هذه الخوارزميات ذو أصلٍ إغريقي، والبعض الآخر ربما يكون من أصل هندي وَيُنْسَب البعض منها أخيراً لعلماء الرياضيات العرب أنفسهم. بَيْد أن هذه الخوارزميات، قَرُبَ أصلُها أو بَعُدَ، قد أُدرِجَت في علم آخر من الرياضيات أعطاها امتدادات جديدة معدِّلاً اتجاهها. فابتداءً من القرن التاسع وحتى القرن الثاني عشر للميلاد على الأقل، احتوى كلُ كتابٍ في علم الحساب العشري ـ أي كل كتاب في «الحساب» أو في «الجبر» عرضاً عن استخراج الجذور التربيعية والتكعيبية، وأحياناً، وبشكل أوسع، عن استخراج الجذر النوني ($n^{ième}$) لعدد صحيح. ونحن، إذ نذكّر بهذا الواقع، فللتنبّه من الميل إلى تمييز بعض الأعمال، كأعمال كوشيار أو النَسَوِي أو ابن الحصّار. وهذا الامتياز المعطى لهم، ليس فعلاً سوى وليد ظروف؛ وإذا أتى المؤرخون في أعمالهم، على تقديم أسماء هؤلاء المؤلفين، فهذا يعود لسبب بسيط وهو أن أعمالهم قد نُقِلَت إلى لغةٍ أوروبية. لذلك فإن أولى مهماتنا، ستكون إعادة رسم ـ بالنقاط البارزة على الأقل ـ للتقليد الذي تعود له هذه الأعمال ـ التي على كلِ حال ليست الأكثر تقدماً ولا الأكثر عمقاً ـ وسيقدم لنا بعض من النصوص التي اكتشفنا، عوناً ثميناً في مهمتنا هذه.

لنبدأ بالخوارزمي: فلقد اقترح، في كتاب في علم الحساب مفقودٍ اليوم[٢١]، وحسب ما يُخبرنا عالِم الرياضيات «البغدادي» (ت نحو ١٠٣٧م)، صيغة لتقريب الجذر التربيعي لعدد صحيح N. فإذا قمنا بوضع $N = a^2 + r$، تُكتَب هذه الصيغة، مع a صحيح، على النحو التالي:

$$(1) \qquad \sqrt{N} = a + \frac{r}{2a} .$$

ولم يغفل البغدادي عن التذكير بأن المقصود هنا هو تقريب زائد غير مُرْضٍ. ويكفي للاقتناع أن نطبقه على $\sqrt{2}$ و$\sqrt{3}$[٢٢].

لكن، وفي زمن الخوارزمي، أعطى الإخوة بنو موسى في كتابهم في **مساحة الأشكال المسطحة والكروية**[٢٣]، عبارةً أخرى سُمِيت فيما بعد «قاعدة الأصفار»، وعُمِّمت من دون عناء لأجل استخراج الجذر النوني؛ ونقصد بها العبارة:

$$(2) \qquad \sqrt[n]{N} = \frac{1}{m^k} \sqrt[n]{N m^{nk}}$$

أياً يكن العددان الصحيحان m وk.

وإذا وضعنا $m = 60$ و$n = 3$، نحصل على عبارة الإخوة بني موسى. واستعيدت هذه القاعدة في مُعظم كتب الرياضيات. فهكذا، اقتصاراً على ثلاثة أمثلة فقط، نجد هذه القاعدة في كتاب **الفصول** الذي ألفه الإقليدسي في العام ٩٥٢م لاستخراج الجذور التربيعية والتكعيبية[٢٤]، وفي كتاب **التكملة** للبغدادي، لاستخراج الجذر التكعيبي[٢٥]، وفي رسالة **الحساب الهندي** للسموأل (العام ١١٧٢/١١٧٣م) لاستخراج الجذر النوني.

ويدلُ كل شيء فيما بعد على إرادةٍ عند علماء الرياضيات في إيجاد صِيَغ أفضل للتقريب. فقد أعطى الإقليدسي في المقالة المذكورة أعلاه، العبارةَ التالية، مَن جملة عبارات:

$$(3) \qquad \sqrt{N} = a + \frac{r}{2a + 1}$$

---

(٢١) حتى الساعة، لم يُعرف هذا الكتاب إلا من خلال تأثيرات نسخته اللاتينية. انظر في هذا الخصوص الفصل السادس عشر الموضوع من قبل أندريه آلار ضمن هذا الجزء من الموسوعة.

(٢٢) انظر: أبو منصور عبد القاهر بن طاهر البغدادي، **التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة**، تحقيق أحمد سليم سعيدان (الكويت: معهد المخطوطات العربية، ١٩٨٥)، ص ٧٦.

(٢٣) محمد بن موسى بن شاكر، **رسائل الطوسي** (حيدر آباد، الهند: [د.ن.]، ١٩٤٠)، مج ٢، ص ٢٥. انظر أيضاً الترجمة اللاتينية في: Marshall Clagett, ed., *Archimedes in the Middle Ages,* University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 6, 5 vols. (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964 - 1984), vol. 1, p. 350, and the commentary by the editor, p. 367.

(٢٤) أبو الحسن أحمد بن إبراهيم الإقليدسي، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أحمد سعيد سعيدان (عمان: اللجنة الأردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣)، ص ٢١٨ و٣١٣ ـ ٣١٤.

(٢٥) البغدادي، **التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة**، ص ٧٦ ـ ٨٠ و٨٤ ـ ٩٤.

والتي سُمِيت فيما بعد «التقريب الاصطلاحي» («Approximation conventionnelle»)، وكذلك أُطلِقَ على $2a + 1$ ما معناه «المخرج الاصطلاحي»، حسب نصير الدين الطوسي ومن بعده الكاشي.

أعطى البغدادي التقريب الاصطلاحي من أجل الجذر التكعيبي لـ N، فإذا وضعنا $N = a^3 + r$، حيث a عدد صحيح، نحصل على:

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1} \; . \qquad (4)$$

وحتى لا نضيع في التفاصيل، لن نعدِد هنا مجموعة الصيغ التي أعطاها عدة علماء في الرياضيات لتقريب الجذور. وبالمقابل، سنتوقف عند إسهامين من نهاية القرن العاشر للميلاد، وهذان الإسهامان، من دون أنْ يتعادلا البتة، مرتبطان، إذ إن المقصود فعلاً هو الخوارزمية التي توصل إلى خوارزمية روفيني ـ هورنر (Ruffini-Horner). يطبِّق كوشيار بن لبّان هذه الخوارزمية، ذات الأصل الهندي حسب كل ترجيح، في كتابه حول علم الحساب(٢٦). ونحن نعرف الآن أن ابن الهيثم، لم يكن فقط على علم بهذه الخوارزمية، بل أيضاً حاول جاهداً إعطاءها إثباتاً رياضياً. ونعرض هنا طريقته الشاملة إنما بأسلوب مختلف.

لتكن الحدودية $f(x)$ ذات المعاملات الصحيحة ولتكن المعادلة:

$$f(x) = N \; . \qquad (5)$$

وليكن s جذراً موجباً لهذه المعادلة، ولنفترض $(s_i)_{i\geq 0}$ متتالية لأعداد صحيحة موجبة بحيث يكون، بالنسبة إلى كل مؤشر k: $\sum_{i=0}^{k} s_i \leq s$؛ وكل s_i يسمى جزءاً من s.

من البديهي أن للمعادلة:

$$f_0(x) = f(x + s_0) - f(s_0) = N - f(s_0) = N_0 \qquad (6)$$

جذور المعادلة (5) بإنقاص s_0 من كل منها.

لنشكل بالاستقراء، بالنسبة إلى كل i، حيث $i > 0$، المعادلة:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f(x + s_0 + ... + s_i) - f(s_0 + ... + s_i) \qquad (7) \\ &= [N - f(s_0 + ... + s_{i-1})] - [(f(s_0 + ... + s_i) - \\ &\quad f(s_0 + ... + s_{i-1})] = N_i \end{aligned}$$

---

(٢٦) Kūshyār Ibn Labbān, *Principles of Hindu Reckoning*, translated by Martin Levey and Marvin Petruct (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1965),

النص العربي له حققه أحمد سعيدان ونشره في: **مجلة معهد المخطوطات العربية (القاهرة)** (أيار / مايو ١٩٦٧).

وجذور المعادلة (7) هي جذور المعادلة (5) بانقاص $s_0 + s_1 + ... + s_i$ من كلٍ منها.

وهكذا مثلاً بالنسبة لِ: $i = 1$، نحصل على:

$$f_1(x) = f(x + s_0 + s_1) - f(s_0 + s_1)$$
$$= [N - f(s_0)] - [f(s_0 + s_1) - f(s_0)]$$
$$= N_0 - [f(s_0 + s_1) - f(s_0)] = N_1.$$

تُعطي الطريقةُ التي قام ابن الهيثم بتطبيقها وبتبريرها واستعملها كوشيار، والمسماة طريقة روفيني - هورنر، خوارزمية تتيحُ الحصولَ على معاملات المعادلة من المرتبة i انطلاقاً من معاملات المعادلة من المرتبة $(i - 1)$. وهنا تكمن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة[٢٧].

لنبدأ باستخراج الجذر النوني (من الدرجة n)، المعروف منذ القرن الثاني عشر للميلاد، إنْ لم يكن قبلاً. وهنا لدينا:

$$f(x) = x^n$$

فإذا كنا على علم بصيغة «ذي الحدين» التي أعطاها، كما ذكرنا، الكرجي في القرن العاشر للميلاد فلن تعوّد لنا حاجة بمعرفة جدول هورنر. في هذا الحال تصبح معاملات المعادلة ذات المرتبة i:

$$\binom{n}{k} (s_0 + ... + s_{i-1})^{n-k} \quad \text{حيث} \quad k \in \{1, 2, ..., n\}$$

و

$$N_i = N_{i-1} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (s_0 + ... + s_{i-1})^{n-k} s_i^k \tag{8}$$

لنعد، بعد هذا التمهيد، إلى ابن الهيثم وكوشيار، فيما يخص الجذور التربيعية والتكعيبية. ولنأخذ المعادلة:

$$f(x) = x^2 = N;$$

إذ ذاك نحصل على حالتين:

الحالة الأولى: ويكون فيها N مربعاً لعدد صحيح. ولنفرض أن الجذر يكتب على الشكل التالي: $s = s_0 + s_1 + s_2 + ... + s_h$، حيث $s_i = \sigma_i 10^{h-i}$ بالنسبة إلى كل مؤشر i، $i \leq h$.

قامت أولاً مهمة علماء الرياضيات في القرن الحادي عشر للميلاد على تحديد h والأرقام σ_i. وتُكتَبُ الصِيغ (8) من جديد:

---

(٢٧) انظر دراستنا قيد الظهور عن استخراج الجذر المربع والجذر المكعب عند ابن الهيثم.

$$1,\ 2(s_0+s_1+\ldots+s_{i-1}), 1,$$

و
$$N_i = N_{i-1} - \left[2(s_0+\ldots+s_{i-1})s_i + s_i^2\right] .$$

ونحدِد عندئذٍ σ_0 بواسطة المتباينتين:

$$\sigma_0^2 10^{2h} \leq N < (\sigma_0+1)^{2h}\ 10^{2h}$$

ونحدِد $\sigma_1.., \sigma_2, \sigma_k$ بالصِيَغ:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{2(s_0+\ldots+s_{i-1}).10^{h-i}} .$$

في هذه العبارات، تُحسَب الـ N_i حيث $(1 \leq i \leq h)$، انطلاقاً من N_{i-1}، بأنْ نطرح منها $\left[2(s_0+\ldots+s_{i-1})s_i + s_i^2\right]$. ومع $i = h$، نجد $N_h = 0$.

الحالة الثانية: ليس N مربعاً لعدد صحيح. يستعمل ابن الهيثم الطريقة عينها لتحديد الجزء الصحيح من الجذر، ويعطي بالتالي كصيغة للتقريب، صيغة الخوارزمي وصيغة «التقريب الاصطلاحي»، اللتين تُكْتَبان مجدداً (باستخدام المصطلحات السابقة نفسها)، على التوالي:

$$(s_0+\ldots+s_h) + \frac{N_h}{2(s_0+\ldots+s_h)}$$

وَ

$$(s_0+....+s_h) + \frac{N_h}{2(s_0+\ldots+s_h)+1} .$$

وهكذا فإنه لا يقوم فقط برسم الخوارزمية، مثل كوشيار، وإنما يعمل جاهداً على إعطاء مبرراتها الرياضية ويقدم تبريراً لواقع إحاطة هذين التقريبين بالجذر.

ومن أجل استخراج الجذر التكعيبي، تُتبَعُ طريقة مشابهة. فلنأخذ المعادلة:

$$f(x) = x^3 = N ;$$

وهنا أيضاً لدينا حالتان:

الحالة الأولى: يكون N مكعباً لعدد صحيح. في هذه الحالة، يُحدِد s_0 كالتالي $s_0^3 < N$. إذ ذاك، يعتبر ابن الهيثم كمعاصريه أن $s_1 = s_2 = ... = s_h = 1$.

فَتُكتَب مجدداً معاملاتُ المعادلة ذات المرتبة i على الشكل التالي:

$$1,\ 3(s_0+i)^2,\ 3(s_0+i),\ 1,$$

$$N_i = N_{i-1} - \left[3(s_0+(i-1))^2 + 3(s_0+(i-1))+1\right]$$

فإذا كان N_i مكعباً لعددٍ صحيح، يوجدُ عند ذلك قيمة لـ i تعطي $N_k = 0$، فيكون عندها $(s_0 + k)$ الجذر المطلوب. وكمعاصريه، يرسم ابن الهيثم، بجميع التفاصيل، مختلف خطوات الخوارزمية.

الحالة الثانية: N ليس مكعباً لعدد صحيح. فيعطي ابن الهيثم أيضاً صيغتين متناظرتين مع الصيغتين المذكورتين سابقاً في استخراج الجذر التربيعي، يمكن إعادة كتابتهما على الشكل:

$$(s_0 + ... + s_h) + \frac{N_h}{3(s_0 + ... + s_h)^2}$$

و

$$(s_0 + ... + s_h) + \frac{N_h}{3(s_0 + ... + s_h)^2 + 3(s_0 + ... + s_h) + 1}$$

ونستبين في هذه الأخيرة «التقريب الاصطلاحي».

نجد فيما بعد، مجموعة الطرق والنتائج السابقة، المُكتَسَبة في بداية القرن الحادي عشر للميلاد، ليس فقط عند معاصري علماء الرياضيات هؤلاء، وإنما أيضاً في معظم الرسائل اللاحقة في علم الحساب، وهي كثيرة العدد فعلاً. نذكر من بينها كتابات النسوي(٢٨) وهو خليفة كوشيار، ونصير الدين الطوسي(٢٩)، وابن الخوام(٣٠) البغدادي، وكمال الدين الفارسي(٣١)... إلخ.

استخراج الجذر النوني لعدد صحيح

لم تعد الصعوبات المهمة، في تعميم الطرق السابقة وفي صياغة الخوارزمية في حال الجذر من الدرجة n تصادف علماء الرياضيات بعد حيازتهم على المثلث الحسابي وعلى صيغة

---

(٢٨) Heinrich Suter, «Über das Rechenbuch des Alī ben Ahmed el-Nasawī,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 7 (1906 - 1907), pp. 113-119, and Ali Ibn Ahmad al-Nasawī, *Nasawī Nāmih*, édité par Abū al-Qāsim Qurbānī (Téhéran: [s. n.], 1973),

انظر ص ٦٥ وما يليها من المقدمة الفارسية وص ٨ وما يليها من صورة النص العربي المنشور.

(٢٩) الطوسي، «جوامع الحساب بالتخت والتراب،» ص ١٤١ وما يليها و٢٦٦ وما يليها.

(٣٠) ابن الخوام، **الفوائد البهائية في القواعد الحسابية** (مخطوطة شرقية، ٥٦١٥، المكتبة البريطانية)، الورقتان ٧ظ و٨و.

(٣١) انظر: Kamal al-Dīn al-Fārisī, «Asās al-Qawā'id,» édité par M. Mawaldi (Thèse de doctorat, Université de Paris III, 1989),

كمال الدين أبو الحسن الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**، ٢ ج (حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف، ١٣٤٧ - ١٣٤٨هـ/١٩٢٨ - ١٩٣٠م).

«ذي الحدين» منذ نهاية القرن العاشر للميلاد. وفي الواقع، قامت محاولات كهذه في القرن الحادي عشر للميلاد مع البيروني والخيام، لكنها ومع الأسف، قد فقدت؛ تشهد على ذلك المراجع القديمة التي تحتوي على عناوين مقالاتهم المكرسة لمثل هذا التعميم، لكن هذه الشهادات لا تشير البتة إلى طرقهم. ففي إسهامه سنة ١١٧٢/١١٧٣م، لم يقم السموأل(٣٢) بتطبيق الطريقة المنسوبة لروفيني ـ هورنر لاستخراج الجذر النوني لعدد صحيح ستيني فحسب، بل صاغ تصوراً واضحاً للتقريب. لقد قصد عالم الرياضيات هذا، من القرن الثاني عشر للميلاد، بعبارة «التقريب» ما يلي: معرفة عدد حقيقي بواسطة متتالية من الأعداد المعروفة بتقريب بإمكان الرياضي جعله صغيراً بالقدر الذي يريد. فالمقصود، إذاً، هو قياس التباعد بين الجذر النوني الأصم ومتتالية من الأعداد المنطقة. بدأ السموأل، بعد تحديده لمفهوم التقريب، بتطبيق الطريقة المنسوبة إلى روفيني ـ هورنر على المثل:

$$f(x) = x^5 - Q = 0,$$

حيث: $Q = 0; 0, 0, 2, 33, 43, 36, 48, 8, 16, 52, 30$ (كتابة ستينية).

وهذه الطريقة بقيت حية إلى ما بعد القرن الثاني عشر للميلاد وَوُجدت أيضاً في مقالات أخرى في علم «الحساب الهندي» حسب تعبير ذلك العصر.. ولاحقاً، نجدها أيضاً عند أسلاف الكاشي، وعند الكاشي نفسه، وكذلك عند خلفائه. سنتناول فقط مثلاً من عند هذا الأخير، في كتابه مفتاح الحساب حيث قام بحل المعادلة:

$f(x) = x^5 - N = 0$ حيث $N = 44\ 240\ 899\ 506\ 197$.

وكل ما أردنا قوله هنا هو أن هذه الطريقة كانت معروفة ومنتشرة منذ القرن الثاني عشر للميلاد على الأقل عند علماء الرياضيات العرب. إلا أنها ليست الوحيدة. فهناك طرق أخرى، وكلها مرتكزة على معرفة صيغة «ذي الحدين»، من دون الاستعانة، بالضرورة، بخوارزمية هورنر. نريد أيضاً التشديد على تعدد هذه الطرق وانتشارها ورواجها ليس فقط في المقالات الأساسية لعلم الحساب، وإنما أيضاً في الشروحات أو في المقالات الرياضية ذات الأهمية الثانوية. ويكفي هنا مثل واحد اختير عشوائياً من بين مؤلفين لم تتم دراستهم سابقاً؛ هو مثلٌ يعود إلى شارح عاش قبل العام ١٢٤١م هو «أبو المجد بن عطية»(٣٣)، النص الذي شرحه يدور حول كُتاب لعالم رياضيات من القيروان، هو نفسه من الدرجة الثانية، اسمه «الأحدب القيرواني». قام هذا الرياضي بوضع طريقة لاستخراج الجذر النوني، وبرهنها وأعطى عليها أمثلة عددية. فأعطى مثل الجذر الخماسي

---

(٣٢) انظر: Rashed: «Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire,» pp. 209-278, et «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^e-XIV^e siècles,» pp. 107-147.

(٣٣) انظر المخطوطة ٧٤٧٣، المكتبة البريطانية وبالتحديد بدءاً من الأوراق ٣٦٧ظ - ٣٧٤ظ.

لـ $N = 4\ 678\ 757\ 435\ 232$. وافترض ابن عطية أن الجذر على شكل $(a+b+c)$، مع $a = \alpha.10^2$ و $b = \beta.10$. وهذه هي الخطوات الأساسية لخوارزميته:

يكتب أولاً: $N - a^5 = N_1$ ؛ ويحتسب فيما بعد $\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}$.

ثم يضرب حدود هذه العبارة على التوالي (وحسب ترتيبها) بالأعداد: b و b^2 و b^3 و b^4 و b^5 ليحصل على:

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}b^k$$

ويحتسب:

$$N_2 = N_1 - \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}b^k$$

ومن ثم يقوم بحساب:

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}(a+b)^{5-k}$$

ويضرب هذه الحدود، على التوالي (وحسب ترتيبها) بالأعداد c و c^2 و c^3 و c^4 و c^5 ليحصل على:

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}(a+b)^{5-k}c^k$$

ليصل إلى:

$$N_3 = N_2 - \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}(a+b)^{5-k}c^k = 0\ .$$

وإذا أردنا، الوصول إلى استخراج الجذر النوني الأصم لعدد صحيح، فإننا نجابه وضعاً مشابهاً. فقد أعطى السموأل في رسالته حول علم الحساب قاعدة لتقريب الجزء غير الصحيح من الجذر الأصم لعدد صحيح، بواسطة الكسور. وَيعود مسعاه إلى حل المعادلة العددية:

$$x^n = N$$

فيبدأ بالبحث عن أكبر عدد صحيح x_0 بحيث يكون: $x_0^n \le N$. وهنا يعالج حالتين:

الحالة الأولى: $x_0^n = N$، وهنا يكون x_0 هو الجذر المطلوب بالتحديد. ورأينا أن السموأل قد عرف طريقة أكيدة للحصول على حل (عندما يكون ذلك ممكناً).

الحالة الثانية: $x^n < N$ أي حالة كون $N^{\frac{1}{n}}$ عدداً أصماً. في هذه الحالة يذكر كتقريب أول:

$$x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{\left[\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x_0^{n-k}\right] + 1} \qquad (1)$$

أي
$$x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{(x_0+1)^n - x_0^n}.$$

وهذا تعميم لما سماه علماء الرياضيات «التقريب الاصطلاحي».

وهذا التقريب بالإنقاص، هو من النوعية عينها التي قام أسلاف السموأل العرب بعرضها، لكنه أكثر شمولية. ففي حين أن علماء الحساب الذين لم يُدرِجوا في طرائقهم نتائج الكرجي الهندسية، حصروا تطبيق هذه القاعدة على القوى الأصغر من الثالثة ($n \leq 3$)، تتسع القاعدة هنا لتشمل أية قوة؛ وهذا ما نراه فيما بعد عند العديد من علماء الرياضيات، ومنهم نصير الدين الطوسي والكاشي. على كل حال، ومن أجل تطوير هذه التقريبات، تمّ تكوين الكسور العشرية بطريقة واضحة، كما يدل على ذلك مثلُ السموأل[٣٤].

استخراج الجذور وابتكار الكسور العشرية

رأينا سابقاً[٣٥] أن الإقليدسي قد توصل في منتصف القرن العاشر للميلاد إلى فكرة بديهية عن الكسور العشرية، خلال دراسته قسمة عدد مفرد على العدد ٢. فكتب: «فأما ما كان رسمه على مذهب تنصيف العدد فإن تنصيف الواحد من كل منزلة هو ٥ (خمسة) قبلها. فيجب من ذلك إذا نصّفنا عدداً فرداً فإنا نجعل نصف الواحد ٥ قبله ونُعلّم على منزلة الآحاد، علامة فوقه <′> ليُعلَم به المرتبة وتصير مرتبة الآحاد عشرات لما قبلها»[٣٦].

ومع ذلك، لا تشكل هذه النتيجة القيمة بلا أدنى شك، والمصحوبة بمبدأ سهل للتدوين، نظريةً حقيقية في الكسور العشرية، ولا معرفةً واضحة بها. فهي تعطينا فقطَ قاعدة تجريبية للحساب في حال القسمة على اثنين. فكان لا بد من انتظار علماء الجبر في مدرسة الكرجي للحصول على العرض العام والنظري في هذا المجال. لقد أحس هؤلاء العلماء، بكل بساطة، بضرورة هذه الكسور خلال سعيهم لأن يجدوا تقريباً إلى حد مطلوب، مهما بلغ هذا الحد، للجذر النوني الأصم لعدد صحيح. ولقد أفادوا، لإحداث هذه الكسور، من جبر الحدوديات، ومن قواعده ومن وسائل تمثيله. ولا يَدَعُ العرضُ الأول المعروف لهذه الكسور والذي أعطاه السموأل[٣٧] في العام ١١٧٢ ـ ١١٧٣م، أي

(٣٤) Rashed, Ibid.

(٣٥) انظر الفصل العاشر من هذا الجزء من الموسوعة عن «الأعداد وعلم الحساب».

(٣٦) انظر: الإقليدسي، **الفصول في الحساب الهندي**، ص ١٤٥. انظر أيضاً الترجمة الإنكليزية لأحمد سعيدان، في: Abu al-Hassan Ahmed Ibn Ibrahim al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, english translation by Ahmad S. Saïdan (Dordrecht; Boston: D. Reidel, 1978).

(٣٧) انظر: Rashed, «L'Extraction de la racine n^ième et l'invention des fractions décimales, XI^e- XII^e siècle,» pp. 191-243.

شك يحوم حول الوسائل الجبرية ولا حول الهدف أو حول التطبيقات المرجُوة. فهذا العرض، في كتاب السموأل **القوامي في الحساب الهندي**، يتبع مباشرة الفصلَ المكرسَ لتقريب الجذر النوني لعدد صحيح. وحتى عنوانُ الفصل المكرس للكسور العشرية له دلالته: «في وضع أصل واحدٍ تُحدد به جميع أعمال التفريق التي هي القسمة والتجذير والتضليع لجميع هذه المراتب وتصحيح الكسور الواقعة في هذه الأعمال بغير نهاية»(٣٨). وليس هذا «الأصل الواحد» الذي ذكره السموأل سوى المبدأ المعروف في الجبر والذي سبق أن فسره في كتابه **الباهر** وهو أن لدينا، من الجهة ومن الأخرى لـ x^0، بنية واحدة (بنيتان متطابقتان). يكفي، إذاً، أن نحل 10^0 محل x^0، ومحل القوات الجبرية الأخرى قواتٍ للعدد 10، للحصول على أعداد صحيحة وكسور عشرية، أو كما يكتب السموأل: «كما أن المراتب المتناسبة المبتدئة من مرتبة الآحاد [10^0] تتوالى على نسبة العُشر بغير نهاية، كذلك نتوهم من الجهة الأخرى لِ [10^0] مراتب الأجزاء [من العشر تتوالى] على تلك النسبة ومرتبة الآحاد [10^0] كالواسطة بين مراتب العدد الصحاح التي تتضاعف آحادها على نسبة العُشر وأمثاله بغير نهاية وبين مراتب الأجزاء المتجزئة بغير نهاية»(٣٩).

ويتابع السموأل شروحاته ويعطينا جدولاً ننقله ونحن نُحِل 10^n محل العبارات الكلامية ولا نذكر جميع المواقع:

10^{13}	10^{12}	...	10^{9}	...	10^{6}	...	10^{3}	...	10	10^{0}	10^{-1}	...	10^{-3}	...
	4		3		2		1			0			1	

10^{-6}	...	10^{-9}	...	10^{-12}	10^{-13}	
2		3		4		

ولكتابة الكسور، يفصِل السموأل الجزء الصحيح عن الجزء الكسري، إما بتدوين أرقام المواقع المختلفة، وإما بتدوين المخرج:

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
3	1	6	2	2	7	7

أو

$$3\ \frac{162277}{1000000}$$

في التقليد الجبري نفسه للسموأل، استعاد الكاشي (المتوفى في عام ٧/ ١٤٣٦م) بعد فترة طويلة نظرية الكسور العشرية، وقدم عرضاً ذا كفاءة نظرية وحسابية عالية؛ وشدد على التشابه بين النظامين الستيني والعشري، واستعمل الكسور ليس فقط لتقريب الأعداد الحقيقية الجبرية فقط، وإنما أيضاً لتقريب العدد π الذي أعطى قيمته بدقة وصلت إلى $1/0^{16}$.

---

(٣٨) السموأل بن يحيى بن عباس المغربي، **القوامي في الحساب الهندي**، الورقة ١١١ظ، في:
Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 142.

(٣٩) المصدر نفسه، ص ١٢٢.

وأكثر من ذلك، وعلى حد علمنا، كان أول من أطلق على هذه الكسور اسم «الكسور العَشَرية»[٤٠].

واستمر موضوع الكسور العشرية إلى ما بعد الكاشي في كتابات تقي الدين بن معروف[٤١]، وهو فلكي وعالم رياضيات من القرن السادس عشر للميلاد، كما في كتابات اليزدي[٤٢]. وتوحي أدلة عديدة أن هذه الكسور نُقِلت إلى الغرب قبل منتصف القرن السابع عشر للميلاد، وأُطلق عليها، في مخطوطة بيزنطية أُحضرت إلى ڤيينا في العام ١٥٦٢م اسم كسور «الأتراك»[٤٣].

طرق الاستكمال

منذ زمن بعيد، قام علماء الفلك بتطبيق طرق الاستكمال. ولقد بيّن أ. نوجباور (O. Neugebauer) أن علماء الفلك البابليين اتبعوا، استناداً إلى بعض النصوص البابلية المتعلقة بشروق عطارد وغروبه، طريقة الاستكمالات الخطية[٤٤]، في القرن الثاني قبل الميلاد. ولجأ بطلميوس أيضاً إلى هذا الاستكمال الخطي من أجل جداول الأوتار. وهذا يعني أن العلماء العرب في الفلك والرياضيات كانوا على علم بهذا الاستكمال، أقله بفضل بطلميوس، وبأنهم أعطوه العنوان المعبِر: طريقة الفلكيين. لنفترض أن $x_{-1} < x < x_0$ و $d = x_0 - x_{-1} = x_i - x_{i-1}$، حيث $i = -2, -1, ..., n$؛ فيمكن عند ذلك كتابة الاستكمال الخطي كما يلي:

$$y = y_{-1} + \left(\frac{x - x_{-1}}{d}\right)\Delta y_{-1} \qquad (1)$$

وتكون Δ الفارق الأول من المرتبة (1).

---

(٤٠) انظر: المصدر نفسه، ص ١٣٢ وما يليها؛ الكاشي، مفتاح الحساب، ص ٧٩ و١٢١، و Paul Luckey, *Die Rechenkunsh bei Gamsīd b. Mas'ūd al-Kašī* (Wiesbaden: Steiner, 1951), p. 103.

(٤١) مخطوطة بغية الطلاب، الورقة ١٣١ و وما يليها.

(٤٢) في رسالة اليزدي، عيون الحساب، لا تفوتنا ملاحظة بعض الإلفة مع الكسور العشرية، بينما يفضل الحساب مع الكسور الستينية والكسور العادية، انظر الورقتين ٩ظ و٤٩ظ.

(٤٣) يُدخل الكاشي خطاً عمودياً يفصل الجزء الكسري؛ ونجد هذا التمثيل عند الغربيين مثل رودولف (Rudolff)، وأبيان (Apian)، وكاردان (Cardan). وكان عالم الرياضيات مزراحي (المولود في القسطنطينية في العام ١٤٥٥م) يستعمل الإشارة ذاتها قبل رودولف. وفيما يتعلق بالمخطوطة البيزنطية، نقرأ خاصة: «كان الأتراك يجرون عمليات الضرب والقسمة على الكسور تبعاً لأسلوب خاص في الحساب. ولقد أدخلوا كسورهم عندما حكموا هنا على أرضنا». ولا يترك المثل الذي أعطاه عالم الرياضيات أدنى شك في أن المقصود هنا هي الكسور العشرية. انظر: Herbert Hunger and Kurt Vogel, eds., *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts* (Wien: Kommissionsverlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, 1963), p. 32 (problème 36).

(٤٤) انظر: Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed. (New York: Dover =

وبحث علماء الفلك، ابتداءً من القرن التاسع للميلاد، عن طرق لوضع الجداول الفلكية والمثلثية واستعمالها، وبهذه المناسبة كان لهم عودة إلى طرق الاستكمال لتطويرها.

ففي القرن العاشر، اقترح عالما رياضيات على الأقل طرقاً في الاستكمال من المرتبة الثانية، وهما «ابن يونس» و«الخازن». ولقد أعطى الأول عبارة مكافئة لـ:

$$(2) \qquad y = y_{-1} + \left(\frac{x - x_{-1}}{d}\right)\left[\frac{1}{2}(\Delta y_{-1} + \Delta y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_{-1}}{d}\right)\Delta^2 y_{-1}\right].$$

ومن البديهي أن المقصود هنا هو استكمال مكافِئ (Parabolique)؛ ويمر المنحني المحدد بـ (2) بالنقطة (x_{-1}, y_{-1}).

أما الخازن[٤٥]، فقد أعطى أيضاً استكمالاً مكافِئاً من نوع الاستكمال الذي نراه عند الكاشي بعد خمسة قرون.

لكن الحدث الأهم في تاريخ طرق الاستكمال بالعربية كان ترجمة زيج براهماغوبتا (Brahmagupta)، الـ (Khandakhādyaka)، إضافة إلى أبحاث البيروني في هذا الحقل.

ولقد استطعنا أنْ نبرهن مؤخراً[٤٦] أن البيروني كان على معرفة بكتاب براهماغوبتا، وكذلك بطريقته في الاستكمال التربيعي، التي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$(3) \quad y = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{d}\right)\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{d}\right)\Delta^2 y_{-1}\right].$$

وتفترضُ هذه الطريقة، وبحسب نص للبيروني، أن $x < x_0$ وتقود إلى الصيغة التالية:

$$y = y_0 + \left(\frac{x_0 - x}{d}\right)\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_0 - x}{d}\right)\Delta^2 y_{-1}\right].$$

وقدم البيروني أيضاً طريقةً أخرى من أصل هندي تبدو أنها مجهولة في المؤلفات القديمة، وأطلق عليها اسمها الهندي: طريقة «سنكلت» (sankalt)، أو بتعبير آخر، الطريقة

Publications, 1957), p. 28; traduction française par P. Souffrin, *Les Sciences exactes dans* = *l'antiquité* (Arles: Actes Sud, 1990).

(٤٥) انظر: Javad Hamadanizadeh, «Interpolation Schemes in *Dustūr al-Munajjimīn*,» *Centaurus*, vol. 22, no. 1 (1978), pp. 43-52.

(٤٦) انظر: Roshdi Rashed, «As-Samaw'āl, al-Bīrūnī et Brahmagupta: Les Méthodes d'interpolation,» *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 1 (1991), pp. 101-160.

الحدية، التي تكتب على الشكل:

$$(4) \qquad y = y_0 - \frac{(x_0 - x)(x_0 - x + 1)}{d(d+1)} \Delta y_{-1} \ ;$$

تتبع هذه الطريقة حساب التزايدات من x_i إلى x_{i-1}. ويعطي البيروني نفسه، في مؤلفه الشهير **القانون المسعودي**، طريقة أخرى للاستكمال يكتبها على النحو التالي:

$$(5) \qquad y = y_{-1} + \left(\frac{x - x_{-1}}{d}\right)\left[\Delta y_{-2} + \left(\frac{x - x_{-1}}{d}\right)\Delta^2 y_{-2}\right];$$

نذكر أن تطبيق هذه الصيغة يقتضي من أجل حساب Δy_{-2} و $\Delta^2 y_{-2}$ أن يكون: $x_{-2} = (x_{-1} - d) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ أي أن يكون $x_{-1} > d$.

لقد طرح تعدد الطرق في نهاية القرن العاشر للميلاد مسألةً جديدةً تعترضُ البحث: كيف نقارن بين مختلف هذه الطرق في سبيل اختيار الأفضل للدالة الجدولية المدروسة؟ يبدأ البيروني نفسه بطرح هذا السؤال، وبمواجهة مختلف الطرق في حال دالة ظلِ التمام، مع صعوباته العائدة لوجود أقطاب. ولقد تصدى السموأل، في القرن اللاحق، بصراحة أكثر، لهذه المهمة. فعمل جاهداً لتطوير الطرق التي عرضها البيروني، أو التي ورثها من علماء الرياضيات الهنود. انطلق السموأل من فكرة التعديل المثقل (Pondération)، واقترح استعمال المعدلات المثقلة، آخذاً بعين الاعتبار الأهمية النسبية لـ Δy_{i-1} و Δy_i. غير أن هذه التساؤلات حول التحسين المُقارَن للطرق هو الذي قاد علماء الرياضيات إلى جانب مسائل أخرى، كمسألة «سرعة» الفوارق التي أشار إليها السموأل. وَمِن دون شك، لم يكن علماء الرياضيات قد استنبطوا بعد الوسائل المفهومية لطرح هذه المسائل، بيد أنهم حاولوا الإجابة عن بعضٍ منها بطرق تجريبية(٤٧).

لم يكتفِ علماء الرياضيات بمتابعة أبحاثهم حول هذه الطرق؛ وإنما طبقوها على مواد غير علم الفلك. فقد استعان كمال الدين الفارسي بواحدة منها ـ المسماة «قوس الخلاف» ـ لإنشاء جدول الانكسارات. وهنا يتبع الفارسي الطريقة التالية: يقسم الفسحة $[0°, 90°]$ إلى جزءين حيث يقرب الدالة $f(i) = d/i$ (d هي زاوية الانحراف (déviation) و i زاوية السقوط (incidence)) بدالة أفينية (affine) على الفسحة $[40°, 90°]$، وبدالة حدودية من الدرجة الثانية على الفسحة $[0°, 40°]$. ويربط بعدئذٍ بين الاستكمالين.

لكن هذه الطريقة، المسماة «قوس الخلاف» التي طبقها كمال الدين الفارسي في بداية القرن الرابع عشر، تعود إلى الخازن، وهو عالم رياضيات من القرن العاشر، واستعادها فيما بعد في القرن الخامس عشر، الكاشي في مؤلفه **زيج الخاقاني**.

---

(٤٧) المصدر نفسه.

نتبين مما تقدم أن الأعمال التي تحققت في هذا الفصل، هي مراحل من تقليد واحد. لكن لنتوقف بعض الشيء عند الكاشي.

يريد الكاشي حساب خطوط الطول للكواكب. وينطلق من نهار تاريخه صفر، مع خط الطول λ_0. ويأخذ فيما بعد فترات من p يوم ويفترض الـ λ_{-1}، λ_0، λ_p معلومة ويبحث عن حساب خطوط الطول λ_1، λ_2، . . . λ_{p-1} في التواريخ $1, 2..., p-1$. فلنَضع:

$$\Delta_{-1} = \lambda_0 - \lambda_{-1} \quad , \quad \Delta_n = \lambda_{n+1} + \lambda_n,$$

ولنأخذ بعين الاعتبار المتوسطات الحسابية لـ Δ على الفترة $[0, p]$ وهي $m_0(\Delta) = \frac{(\lambda_p - \lambda_0)}{p}$. فإذا أخذنا التزايد المتوسط $m_0(\Delta)$ من أجل احتساب λ_1 و λ_2 و . . . ، λ_{p-1}، يكون لدينا استكمال خطي: $\lambda_k = \lambda_0 + km_0(\Delta)$. لكن $m_0(\Delta)$ تختلف كثيراً عن Δ_{-1}؛ فنواجه، إذاً، استكمالاً من المرتبة الثانية. وهنا يحدد الكاشي عدداً e، هو تصحيح المعدل الوسطي. نضع:

$$q = \frac{p+1}{2} \quad \text{حيث} \quad e = \frac{m_0(\Delta) - \Delta_{-1}}{q}.$$

فإذا اعتبرنا الفارق من المرتبة (2) ثابتاً، يأتي:

$$\Delta_n^2 = \Delta_{n+1} - \Delta_n = e,$$

$$\Delta_{\mathrm{m}} = \Delta_{-1} + (\mathrm{m}+1)\mathrm{e}$$

و

$$\sum_{m=0}^{k-1} \Delta_m = \lambda_k - \lambda_0 = k\Delta_{-1} + \frac{k(k+1)}{2} e \, ,$$

ونتحقق أنه في حال $k = p$ نجدُ λ_p.

تتوافق هذه الطريقة مع خطوط طول متزايدة. وفي حال كانت خطوط الطول تناقصية، نأخذ بالاعتبار القيمة المطلقة للفروق، والتصحيحات تكون طرحية.

تلك كانت الطرق الرئيسية المعروفة للاستكمال، والمسائل الرئيسية المطروحة. وكلها تشير، ليس فقط إلى أهمية هذا الفصل في التحليل العددي لهذا الزمن، وإنما أيضاً إلى المسافة التي قطعها علماء الرياضيات في حقل حساب الفوارق المنتهية.

التحليل غير المحدّد (اللامحدّد)

لقد بوشر على الأرجح، بأولى الدراسات بالعربية عن التحليل غير المحدد ـ أو ما نسميه اليوم بالتحليل الديوفنطسي ـ في أواسط القرن التاسع للميلاد، أي بعد الخوارزمي

وقبل أبي كامل. فلم يرد التحليل غير المحَدد في كتاب الخوارزمي كفصل قائم بذاته على الرغم من أن هذا الأخير قد تطرق في الجزء الأخير من كتابه، وهو الجزء المخصص لمسائل التركة والقسمة، إلى بعض المسائل غير المحددة، إلا أن لا شيء يدل على اهتمامه بالمعادلات الديوفنطسية لذاتها. فالمكانة التي احتلها فيما بعد هذا التحليل في كتاب أبي كامل الذي ألفه في العام ٨٨٠م، ومستوى دراسة أبي كامل، كما سنرى لاحقاً، وأخيراً ذِكْرُ أبي كامل لعلماء رياضيات آخرين عملوا في هذا الحقل، وذكر مصطلحاتهم الخاصة، كل هذه الأمور لا تدع مجالاً للشك: فأبو كامل ليس الأول، أو الوحيد، في خلافة الخوارزمي في الاهتمام الناشط بالمعادلات هذه. غير أن فقدان النصوص يدفعنا إلى الانطلاق من «جبر» أبي كامل، لنتابع أولاً التحليل غير المحَدد المُنَطّق ومن ثم لنبين كيف تحول هذا التحليل إلى فصلٍ من الجبر، لنعود بعد ذلك إلى وصف ما تم الاعتراف به كحدث منذ عهد قريب: وهو أن التحليل غير المحدد الصحيح[٤٨] قد تشكل، بشكل أو بآخر، ضد التيار الجبري، كجزء لا يتجزأ من نظرية الأعداد.

التحليل الديوفنطسي المنطق[٤٩]

كان مشروع أبي كامل واضحاً حيثُ إنه كتب: «وإنا نبني الآن كثيراً من المسائل التي هي غير محدودة ويسميها بعض الحساب سيالة أعني بها أن تخرج بصوابات كثيرة بقياس مقنع ومذهب واضح. منها ما يدور بين الحساب بالأبواب[٥٠] بلا عِلة قائمة يعملون عليها ومنها ما استخرجته بأصل صحيح وحيلة سهلة كثيرة المنفعة»[٥١].

---

(٤٨) حيث حلول المعادلات أعداد صحيحة.

(٤٩) حيث حلول المعادلات أعداد منطقة.

(٥٠) استعملت عبارة «باب» بمعانٍ متعددة في ذلك العصر، كما يشهد على ذلك جبر الخوارزمي مثلاً، فهي تُعبر من جهة عن نوع أو صف وهو المرادف لِ «ضرب». كتب الخوارزمي بهذا المعنى: «. . . أن كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة، لا بد أن يُخرجك إلى أحد الأبواب الستة التي وصف في كتابي هذا». انظر: أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي، **كتاب في الجبر والمقابلة**، تحقيق ونشر علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد (القاهرة: الجامعة المصرية، كلية العلوم، ١٩٣٩)، ص ٢٧.

فالمقصود هنا معنى «نوع». كما أن هذه العبارة تعني أيضاً «خوارزمية». فهكذا، بعد إعطائه المعادلة من النوع: «أموال وجذور تعدل عدداً»، يعطي المثال $x^2 + 10x = 39$، ويكتب «فبابه أن تنصف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فيكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية وتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة».

وأخيراً هناك معنى ثالث، وهو المعنى الشائع، والمستعمل أيضاً في ذلك العصر وهو «فصل». وتوجد هذه الاستعمالات أيضاً في جبر أبي كامل.

(٥١) أبو كامل، **كتاب في الجبر والمقابلة**، الورقة ٧٩ظ.

ويتابع أبو كامل: «ونبين أيضاً كثيراً مما رسم الحساب في كتبهم وعملوه بالأبواب بالجبر والقياس ليفهمه من قرأه ونظر فيه فهماً صحيحاً ولا يرويه رواية ويُقلد من وضعه»(٥٢). إن هذا النص أساسي من الناحيتين التاريخية والمنطقية، فهو يُثبت وجودَ بحثٍ في التحليل الديوفنطسي خلال نصف القرن الفاصل بين أبي كامل والخوارزمي. ولقد كرّس علماء الرياضيات، الذين التزموا هذا البحث، كلمةَ «سيالة» للدلالة على المعادلات الديوفنطسية، التي بالتالي فُصِلت، عن طريق اللفظ، عن مجموعة المعادلات الجبرية. كما وأننا نعلم، استناداً لهذا النص لأبي كامل، أن علماء الرياضيات هؤلاء قد اكتفوا بإعطاء نصوصِ بعضِ أنواع هذه المعادلات، والخوارزميات لحلِها، لكنهم لم يهتموا لا بمبرِرات هذه الخوارزميات ولا بطرق إثباتها. ولكِن، من هم علماء الرياضيات هؤلاء؟ لا يَسَعُنا حتى الآن الإجابة عن هذا السؤال بسبب فقدانِ كتاباتِ عدة جبريين قد نشطوا في ذلك الوقت، مثل سند بن علي، وأبي حنيفة الدينوري، وأبي العباس السرخسي...

رمى أبو كامل، إذاً، في كتابه الجبري إلى عدمَ التوقف عند عَرْضٍ مبعثر، وإلى إعطاء عرضٍ أكثر تنظيماً، حيث تظهر الطرق، علاوة عن المسائل وخوارزميات الحل. في الحقيقة، *عالج أبو كامل في الجزء الأخير من كتابه الجبري*، ٣٨ مسألة ديوفنطسية من الدرجة الثانية، وأربعة أنظمة من معادلات خطية غير محددة، ومجموعة من مسائل تعود إلى متواليات حسابية، ودراسة عن هذه الأخيرة(٥٣). وتلبي هذه المجموعة الهدف المزدوج لأبي كامل وهو: حل مسائل غير محددة، ومن جهة أخرى الحل بواسطة الجبر لمسائل عالجها علماء الحساب في ذلك العصر. ولنذكر أننا، في المؤلف الجبري لأبي كامل، نصادف وللمرة الأولى في التاريخ - على حدِ علمي - تفريقاً واضحاً بين مسائل محددة ومسائل غير محددة. غير أن تَفَحُص هذه المسائل الديوفنطسية الثماني والثلاثين لا يعكس فقط هذا التفريق؛ إنما يدل أيضاً على أن تتابعَ هذه المسائل لم يكن عشوائياً، لكنه تم حسب ترتيب نستشفه من صياغة أبي كامل. فإن جميع المسائل الخمس والعشرين الأولى تنتمي إلى زمرة واحدة، أعطى لها أبو كامل شرطاً لازماً وكافياً لتحديد الحلول الموجبة المنطقة. لنأخذ هنا مثلين فقط. فإن المسألة الأولى من هذه الفئة(٥٤) تكتب على الشكل:

$$x^2 + 5 = y^2$$

وعَزَم أبو كامل على إعطاء حلين من ضمن كمية لامتناهية من الحلول المنطقية، حسب تصريحاته بالذات. فوضع:

$$y = x + u \quad \text{حيث} \quad u^2 < 5$$

وأخذ على التوالي $u = 1$ و$u = 2$.

---

(٥٢) المصدر نفسه.

(٥٣) يحتل هذا الجزء الورقات ٧٩و-١١٠ظ.

(٥٤) المصدر نفسه، الورقة ٧٩و-ظ.

أما المثل الثاني فهو من الفئة عينها وهو المسألة ١٩[٥٥]:

$$8x - x^2 + 109 = y^2$$

حيث ينظر أبو كامل في الصيغة العامة:

$$ax - x^2 + b = y^2 \qquad (1)$$

ويكتب: «فإذا ورد عليك من المسائل ما يشبه هذه المسألة فاضرب نصف الأجذار في مثله وزده على الدراهم، فإن انقسم ما بلغ منه بقسمين يكون لكل واحد منهما جذر، فإن المسألة مفتوحة ويخرج لها من الصوابات ما لا يُحصى. وإن لم ينقسم ما بلغ منه بقسمين لكل واحد منهما جذر، فإن المسألة صماء لا تخرج»[٥٦]. ولهذا النص أهمية خاصة في تاريخ التحليل الديوفنطسي لأنه يعطي السبب الكافي لتحديد الحلول المُنطقة الموجبة للمعادلة السابقة. فهذه المعادلة تكتب على الشكل:

$$y^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right) = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 ;$$

وبوضعنا: $x = \frac{a-t}{2}$، نحصل على:

$$y^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 , \qquad (2)$$

وهكذا تعود المسألة لتقسيم عددٍ، وهو مجموعُ مربعين، إلى مربعين آخرين: وهي المسألة ١٢ من الفئة عينها، التي سبق وحلها أبو كامل. فلنفترض هنا أن:

$$b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = u^2 + v^2$$

حيث u وv أعداد منطقة. وضع أبو كامل:

$$y = u + \tau$$

$$t = 2(k\tau - v) ;$$

وقام بالتعويض في (2) فوجد قيمة كل من y وt ومن ثم قيمة x. هكذا تيقن من الحصول على جميع الحلول، في حال التمكن من كتابة إحدى المتغيرات كدالة منطقة بالمتغيرة الأخرى؛ أو بتعبير آخر أنه في حال التمكن من إيجاد وسائط مُنطقة فإننا نحصل على جميع الحلول؛ بينما، بالمقابل، لا نحصل على أي حل في حال قادنا المجموع إلى عبارةٍ لا يُحاط جذرُها. وبتعبير آخر غير معروف مِن قِبل أبي كامل، ليس لمنحنٍ من الدرجة الثانية من

---

(٥٥) المصدر نفسه، الورقة ٨٧و - ظ.

(٥٦) المصدر نفسه، الورقة ٨٧و.

النوع 0 (صفر) أيْ نقطة منطقة أو أنها مكافئة بالنطق التربيعي (birationnellement) لخط مستقيم.

تتألف الفئة الثانية من ثلاث عشرة مسألة - ٢٦ إلى ٣٨ - من المستحيل جعل وسائطها منطقة، أي (وهذه المرة أيضاً بتعبير يجهله أبو كامل) أنها جميعاً تحدِد منحنيات من النوع (I). فعلى سبيل المثال تكتب المسألة ٣١[٥٧] على الشكل:

$$x^2 + x = y^2$$
$$x^2 + 1 = z^2$$

وتحدِد منحنياً تربيعياً «أعسر» (gauche) وهو منحنٍ من الصنف (1) من الفضاء المتآلف (الأفيني) A^3.

أما الفئة الثالثة من المسائل غير المحددة، فتتألف من أنظمةٍ لمعادلات خطية من طراز المثل ٣٩[٥٨] الذي يُكتب:

$$x + ay + az + at = u,$$
$$bx + y + bz + bt = u,$$
$$cx + cy + z + ct = u,$$
$$dx + dy + dz + t = u.$$

إن هذا الاهتمام بالتحليل غير المحدد، الذي انتهى إلى إسهام أبي كامل، أدّى إلى حدثٍ آخر: ترجمة مؤلف ديوفنطس في علم الحساب. فخلال العقد الذي كتب فيه أبو كامل كتابه الجبري في العاصمة المصرية، كان قسطا بن لوقا يترجم في بغداد سبعة كتب من المؤلف الحسابي لديوفنطس. وكان هذا الحدث حاسماً إنْ لجهة تطور التحليل غير المحدد أو لجهة تقنيات الحساب الجبري. لقد أثبتنا[٥٩] أن الصيغة العربية من حساب ديوفنطس تتألف من ثلاثة كتب، موجودة أيضاً في النص الإغريقي الذي وصلنا، ومن أربعة كتب خاصة، أي مفقودة باللغة الإغريقية، ووضعت ترجمتها بالتعابير التي استنبطها الخوارزمي. ولم يكتف

---

(٥٧) المصدر نفسه، الورقة ٩٢ظ.

(٥٨) المصدر نفسه، الورقة ٩٥و - ظ.

(٥٩) انظر: Diophante, *Les Arithmétiques,* texte établi et traduit par Roshdi Rashed, collection des universités de France (Paris: Les Belles lettres, 1984), vol. 3, et Roshdi Rashed, «Les Travaux perdus de Diophante, I et II,» *Revue d'histoire des sciences,* vol. 27, no. 1 (1974), pp. 97-122 et vol. 28, no. 2 (1975), pp. 3-30.

وانظر المقدمة لطبعة *Princeps* في: ديوفنطس الإسكندراني، صناعة الجبر، ترجمة قسطا بن لوقا؛ تحقيق وتقديم رشدي راشد، التراث العلمي؛ ١ (القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، ١٩٧٥)، ص ١٣ وما يليها من المقدمة.

المترجم بإعطاء هذا المؤلف الحسابي تأويلاً جبرياً ضمنياً، بل إنه أعطى لمؤلف ديوفنطس المذكور العنوان **صناعة الجبر**. وقد دُرست الصيغة العربية من هذا المؤلف الحسابي وقدمت شروحات لها. ونحن نعلم حتى الساعة بوجود أربعة من هذه الشروحات، ثلاثة منها لا تزال مفقودة. وحسب كتاب الطبقات نعرف أن قسطا بن لوقا قام شخصياً بشرح ثلاثة كتب من **علوم الحساب**(٦٠)، وأن أبا الوفاء البوزجاني أراد برهنة القضايا وربما الخوارزميات التي اتبعها ديوفنطس(٦١). وأعطى الكرجي(٦٢)، في كتابه **الفخري** تفسيراً لأربعة كتب من **علوم الحساب**؛ وكذلك قام خلفه السموأل بشرح كتاب ديوفنطس. إن شرحَ الكرجي هو الوحيد الذي وصلنا من بين هذه الأربعة التي، كما نعتقد، ليست الشروحات الوحيدة لديوفنطس. لكن، علاوة عن هذه الشروحات، عالج علماء الجبر في مختلف مؤلفاتهم التحليلَ غير المحدد الذي سيتغير نظامه مع الكرجي.

فلقد عالج الكرجي نفسه تحليل ديوفنطس في ثلاثة مؤلفات، وصلنا منها اثنان. فدرس في كتابه **الفخري** التحليل غير المحدد، قبل أنْ يعلق على ديوفنطس في الكتاب عينه. ويعود إلى هذا الموضوع في كتابه **البديع**، ويذكر في مقدمة هذا الكتاب بعمله الأول في **الفخري**. ولقد ألف كتابُه الثالث مع هذين الأخيرين، لكنه ما زال مفقوداً. وهو، كما كتب في **الفخري** كتاب في **الاستقراء** (أي في التحليل غير المحدد) وضعه في إقليم رَيّ الفارسي، وأنه أراده كتاباً وافياً ودقيقاً عن هذا الموضوع(٦٣).

ولنتمكن من فهم إسهام الكرجي في التحليل غير المحدد، علينا أنْ نتذكر تجديدَه في الجبر الذي شددنا عليه في الفصل السابق. فلقد طور الكرجي التحليل غير المحدد كفصل من فصول الجبر، وأيضاً كأحد أساليب الجبر لتوسيع الحساب الجبري. وقال الكرجي أن التحليل الديوفنطسي، أي «الاستقراء»، عليه مدار أكثر الحساب ولا غنى عنه في كل باب(٦٤). وهكذا، بعد دراسة الحدوديات التي لها جذر تربيعي وطريقة استخراج هذا الجذر، ننتقل إلى العبارات الجبرية التي لا جذور تربيعية لها إلا بالقوة. وباعتقاد الكرجي أن هذا هو الهدف الأساسي للتحليل الديوفنطسي المُنطق. وبهذا المعنى يُشكِل التحليل الديوفنطسي فصلاً من فصول الجبر. فالطريقة، أو بالأحرى الطرق، هي تلك الواجبة

---

(٦٠) Diophante, Ibid., pp. 10-11.

انظر أيضاً الهامش رقم (٧١).

(٦١) المصدر نفسه.

(٦٢) انظر: Franz Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre* (Paris: [s. n.], 1853).

انظر أيضاً ترجمة مسائل الكتاب الرابع لديوفنطس (Diophante) والتي اقتبسها الكرخي في الملاحظات المتممة لمؤلف *Les Arithmétiques* أي علوم الحساب والتي تتعلق بهذا الكتاب.

(٦٣) المصدر نفسه، ص ٧٤. يجب تصحيح مطالعة ويكيه (Woepcke)، وقراءة بالري وليس بالتري.

(٦٤) انظر: أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي، **كتاب البديع في الحساب**، تحقيق ونشر عادل أنبوبا، الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية؛ ٢ (بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤)، ص ٨.

لإعادة المسألة إلى مساواة بين حدين تتيحُ لنا قوّتاهما الحصولَ على الحلول المُنطقة. وابتداءً من الكرجي أضحى للتحليل الديوفنطسي اسم خاص: «الاستقراء»[٦٥]، وهو تعبير يتضمن أيضاً الازدواجية المذكورة، لأنه يدل على فصلٍ، وعلى طريقة أو مجموعة طرق، وقد حدد الكرجي هذا التعبير في كتاب **الفخري** كما يلي: «الاستقراء في الحساب أن ترِد عليك جملة من جنس أو جنسين أو من ثلاثة أجناس متوالية (أي كثيرة حدود أو عبارة جبرية (المترجم)) وتكون تلك الجملة غير مربعة من جهة ما يدل عليه اللفظ وتكون في المعنى مربعة وأنت تريد أن تعرف جذرها»[٦٦]. ويسترجع الكرجي التحديد عينه في **البديع** ويضيف: «فأقول بأن الاستقراء هو تتبع المقادير حتى تجد مطلوبك»[٦٧].

وتدل قراءة بسيطة لشروحات الكرجي، وكذلك فصول مكرسة في كتابيه للاستقراء، على انقطاعٍ ما عن أسلافه؛ فأسلوب الكرجي مختلف ليس فقط عن أسلوب ديوفنطس، بل أيضاً عنَ أسلوب أبي كامل. فلم يُعالج الكرجي، بخلاف ديوفنطس، لوائحَ مرتبة لمسائل ولحلولها، وإنما نظم عرضه في **البديع** حول عدد الحدود التي تتألف منها العبارة الجبرية، والفارق بين قواتها. فيعالج مثلاً في المقاطع المتتالية معادلات من النوع:

$$ax^{2n} \pm bx^{2n-1} = y^2 \ , \ ax^{2n} + bx^{2n-2} = y^2 \ , \ ax^2 + bx + c = y^2 \ .$$

وعلى كلِ حال، سيقتبس خلفاؤه هذا المبدأ في التنظيم. يبدو جلياً، إذاً، أن الكرجي كان يهدف إلى تقديم عرضٍ منظم. ومن جهة أخرى، سار الكرجي شوطاً بعيداً في المهمة التي بدأها أبو كامل، والرامية لتبيان طرق الحلول ـ بقدر الإمكان ـ لكل صنف من المسائل. لم يشأ الكرجي في **الفخري** التوسع في عرض التحليل الديوفنطسي بالمعنى الذي يفهمه، إذ كرس له كتاباً، كما لاحظنا، وسيعود إليه لاحقاً في **البديع**. وفي **الفخري** يُذكِّر فقط بمبادىء هذا التحليل، منوِّهاً إلى أنه يتعلق (أي التحليل) بوجه خاصٍ بالمعادلة:

$$ax^2 + bx + c = y^2 \ , \qquad (1)$$

حيث a و b و c أعداد صحيحة. وحيث ثلاثية الحدود بـ x ليست بمربع؛ لينتقل أخيراً إلى مختلف فئات المسائل، التي بأغلبيتها غير مُحددة. وتُعرض هذه الفئات المختلفة كفئاتٍ لمسائل مرتبة من الأسهل إلى الأصعب، في سبيل إرضاء من يبغي التمرن («المرتاض»)[٦٨]. إنها في الواقِع فئات مِن التمارين غايتُها تآلف القارىء مع «الأصول المذكورة في الكتب إلى الحيلة التي تسوق المسألة منها بموجب لفظ السائل إلى الأصول الستة، فعند ذلك ينتهي بك

---

(٦٥) اشتُقت هذه العبارة من فعل «استقرأ» الذي يعني المعاينة أو الفحص على التوالي لمختلف الحالات، قبل أخذ المعنى الاصطلاحي للتحليل غير المحدد.

(٦٦) Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre*, p. 72.

(٦٧) الكرخي، المصدر نفسه، ص ٦٢.

(٦٨) **الفخري**، مخطوطة كوبرولو، ٩٥٠، الورقة ٥٤ظ.

العمل إلى ما هو مذكور في إخراج المجهولات من المعلومات الذي هو الحساب بعينه»[٦٩].
لم يَدع الكرجي، إذاً، أي ابتكار في هذه الفئات الخمس من المسائل، واقتبس معظم المسائل من الكتب الثاني والثالث والرابع من علوم الحساب لديوفنطس، كما اقتبس بعضاً من مسائل الكتاب الأول - كما أثبتنا ذلك بالتفصيل في مكان آخر[٧٠] - وأكثر من نصف المسائل التي درسها أبو كامل. ونلتقي أيضاً مسائل أخرى لا توجد عند هذين المؤلفين، ربما طرحها الكرجي نفسه.

وفي **البديع** حيث يتوجه الكرجي، وحسب تعابيره الخاصة، إلى جمهورٍ أكثر اطلاعاً وأكثر تمرُساً من الجمهور الذي توجه إليه في **الفخري**، يعرِض بشكل منهجي الفصل المتعلق بالتحليل الديوفنطسي. فبعد مناقشته لنماذج ذُكِرَت سابقاً، نراه يعود إلى المعادلة (1). وهنا يناقش كلاً من الحالتين: a مربع وc مربع (كعدد منطق)، ويقترح التبديل التالي للمتغيرة: $y = \sqrt{a}x \pm u$ (وكذلك $y = \sqrt{c} \pm ux$). وجدير بالذكر أنه يُعطي صياغة عامة قبل الانتقال إلى الأمثلة. ويورد فيما بعد المعادلة من النوع $ax^{2n} + bx^{2n-1} + c = y^2$ ويقترح إعادتها إلى معادلة من النوع (1).

يعالجُ الكرَجي بعد ذلك العبارات التي لا تتتالى فيها القوات مثل:

$$ax^2 - c = y^2 ,$$

حيث لا يكون a وc مربعين، وإنما المربع هو $\frac{c}{a}$. ويقترح التبديل التالي للمتغيرة:

$$y = ux - \sqrt{\frac{c}{a}}$$

هنا أيضاً يذكر أنه يمكننا بواسطة القسمة إعادة الشكل: $ax^{2n} - cx^{2n-2} = y^2$ إلى الشكل السابق.

وفيما بعد يدرس الكرجي المعادلات من الشكل:

$$ax^2 + c = y^2 ,$$

ويعطي مثلين، الأول حيث $a = 3$ و$c = 13$، والثاني حيث $a = 2$ و$c = 2$؛ ويلاحظ أنه في أحد المثلين تظهر المعادلة $a + c = k^2$. غير أنه يقترح التوسيطين التاليين $y = u$ و $y = ux$ ويحصل على:

$$x^2 = \frac{u^2 - c}{a} \quad \text{و} \quad x^2 = \frac{c}{u^2 - a} ،$$

(٦٩) المصدر نفسه.
(٧٠) انظر: ديوفنطس الإسكندراني، صناعة الجبر، المقدمة، ص ١٤ - ١٩.

الصورة رقم (١٢ ـ ٣)

ديوفنطس الاسكندراني (بين القرن الثالث والرابع بعد الميلاد)،

صناعة الجبر أو المسائل العددية، ترجمة قسطا بن لوقا البعلبكي

(مخطوطة اسطان قدس، مشهد، ٢٩٥).

نرى هنا عنوان المقالة الرابعة: «في المربعات والمكعبات». لم يبق من الترجمة العربية سوى أربع مقالات فقد أصلها اليوناني. ونجد في هذه المقالات معادلات ديوفنطسية ونظماً من هذه المعادلات، من المرتبة التاسعة، درسها الكرجي كما درسها عدد كبير من الرياضيين بعد القرن العاشر. وقد كان كتاب ديوفنطس أساسياً لتطوير الوسائل الجبرية والتحليل اللامحدود أي التحليل الديوفنطسي.

وهذا لا يجدي أي نفع في حل المسألة. وتعليقاً على هذا الأمر يقول عادل أنبوبا بحقٍ في المقدمة الفرنسية لطبعته المحققة عن **البديع**: «يبدو جلياً أن الكرجي يجهل الكتاب السادس لديوفنطس الذي يقدم له حل المسألة: أولاً، في حال عادلت $a + c$ مربعاً (المقدمتان الأولى والثانية من **علوم الحساب**»(٧١)، اللتان تناسبان القضيتين ١٢ و ١٣ من الكتاب السادس)؛ ثانياً، في حال عرفنا جذراً خاصاً (المقدمة ١٥ العائدة للكتاب السادس). نحن على قناعة تقريباً بأن الكرجي كان يجهل الكتابين الخامس والسادس من **علوم الحساب**، وكذلك نهاية الكتاب الرابع»(٧٢).

ويقوم الكرجي أيضاً بدراسة مسائل أخرى، لا سيما المساواة المزدوجة. ولنُشِرْ هنا فقط إلى المسألة:

$$x^2 + a = y^2$$
$$x^2 - b = z^2 ,$$

التي تحدد منحنياً من الصنف (1) في الفضاء المتآلف (التآلفي ـ Affine) A^3.

لم يكتفِ خلفاءُ الكرجي بتفسير مؤلفه، بل حَاولوا التقدم على الطريق التي رسمها: تطوير «الاستقراء» ليشمل أيضاً بعض المعادلات التكعيبية، واستخلاص الطرق. هكذا يشرح السموأل كتاب **البديع** في كتابه **الباهر**، ويضمن في تحديده «للاستقراء» معادلات من الشكل:

$$y^3 = ax + b .$$

وهنا يؤكد السموأل أن للمعادلة حلولاً بشكلٍ مؤكد في حال كان أحد حدود الطرف الأيمن في منزلة عشرية من الشكل $3k$، أي في حال إمكانية إيجاد جذر تكعيبي له. ولنذكر هنا أن السموأل نظر في حالة $a = 6$ و $b = 10$؛ غير أن للمعادلة حلاً مؤكداً، عند إعطاء a هذه القيمة وأياً تكن القيمة المعطاة لِ b، ذلك لأن $y^3 \equiv y(mod\ 6)$. لكن في حال $a = 7$، لا يعود للمعادلة $y^3 = 7x + 2$ من حلول، في حين أنها تحقق الشرط المعطى من قبل السموأل. وينظر فيما بعد بالمعادلة:

$$y^3 = ax^2 + bx,$$

أي في حالةٍ لا يكون معها أي من حدود الطرف الأيمن في منزلة عشرية، من الشكل $3k$. يقترح السموأل هنا إيجاد عدد تكعيبي m^3 يؤكد أحد الشرطين التاليين:

$$am^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = z^2 \quad \text{أو} \quad bm^3 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = z^2 .$$

---

(٧١) **الأرتميطيقا** *Les Arithmétiques* الذي ترجم إلى العربية أيضاً تحت عنوان **المسائل العددية**.

(٧٢) تعود هذه الملاحظة للمرة الأولى إلى عادل أنبوبا ناشر **البديع**.

وهذا لا يجدي نفعاً في حل المسألة، إذ إننا سنُقاد إلى مسألةٍ أخرى ليست بأسهل من الأولى.

ولسنا هنا في وارد المتابعة لأعمال خلفاء الكرجي في مجال التحليل الديوفنطسي المُنطق، لكنْ من الجدير ذِكره أن هذا التحليل أضحى منذ ذلك الحين جزءاً من كلِ مقالةٍ جبرية على شيء من الأهمية. ففي النصف الأول من القرن الثاني عشر للميلاد، يقتبس الزنجاني معظم مسائل الكرجي ومسائل الكتب الأربعة الأولى من الصيغة العربية لديوفنطس.

ويطرح ابن الخوام بعض المعادلات الديوفنطسية التي منها معادلة فيرما حيث $n = 3$؛ مع ($x^3 + y^3 = z^3$) وكذلك يفعلُ كمال الدين الفارسي في شرحه المطول لجبر ابن الخوام. وتتلاحقُ هذه الأعمال وهذا الاهتمام بالتحليل غير المحدد ومن دون انقطاع، حتى القرن السابع عشر للميلاد مع اليَزْدي، ولا تنتهي مع الكرجي، خِلافاً لما يؤكده مؤرِخو هذا الفصل من الرياضيات.

التحليل الديوفنطسي الصحيح (بالأعداد الصحيحة)

لم تكن ترجمة كتاب ديوفنطس الحسابي «المسائل العددية» فقط أساسية في انتشار التحليل الديوفنطسي المُنطق كفصل من الجبر، لكنها ساهمت أيضاً في تطور التحليل الديوفنطسي الصحيح كفصل، ليس من الجبر، وإنما من نظرية الأعداد. فلقد شهد القرن العاشر، للمرة الأولى، تشكل هذا الفصل، بفضل الجبر من دون شك، وإنما أيضاً ضد الجبر في الوقت نفسه. فلقد بوشِر فعلاً بدراسة المسائل الديوفنطسية مع متطلبات هي من جهة، الحصول على حلول صحيحة، ومن جهة أُخرى القيام ببراهين على شاكلة براهين إقليدس في الكتب الحسابية من **الأصول**. هذا الدَمج الصريح لأول مرة في التاريخ - للحقل العددي المحدود بالأعداد الصحيحة الموجبة المُعْتَبرة كقطعات من خطوط مستقيمة، وللتقنيات الجبرية ولضرورة البرهان بالأسلوب الإقليدسي البحت - قد أتاح البدء بهذا التحليل الديوفنطسي الجديد.

ولم تقدِم ترجمة مؤلف ديوفنطس الحسابي إلى علماء الرياضيات هؤلاء، طُرُقاً رياضية، بقدر ما قدمت لهم من المسائل في نظرية الأعداد، هذه المسائل التي قاموا بمعالجتها لذاتها وبصياغتها بشكل منهجي، بعكس ما يمكن رؤيته عند ديوفنطس. من هذه المسائل مثلاً مسألة تمثيل عدد كمجموع لمربعين ومسألة الأعداد المتطابقة (Congruents)... إلخ. وباختصار، نلتقي هنا مستهل التحليل الديوفنطسي الجديد بالمعنى الذي قام بتطويره فيما بعد باشيه دو مِزيرياك (Bachet de Méziriac) وفيرما (Fermat)[٧٣]. ومن المذهل أن يخفى

(٧٣) Rashed, «L'Analyse diophantienne au X^{ème} siècle: L'Exemple d'al-Khāzin,» pp. 193-222.

هذا الواقع على المؤرخين، حتى على الذين تعرفوا منهم على بعض من أعمال علماء الرياضيات هؤلاء(٧٤). وأمام هذا النقص، لم يكن بوسع مؤرخين آخرين في الرياضيات سوى اعتبار نظرية الأعداد في الرياضيات العربية غير موجودة في الواقع. وربما يعود السبب الرئيسي لجهل الإسهامات العربية في هذا الفصل إلى غياب الرؤية التاريخية التي، لو وُجدت، لكانت أظهرت أن هذا البحث في التحليل الديوفنطسي الصحيح ليس في إنتاج عالم واحدٍ في الرياضيات، وإنما من إنتاج تقليد كامل ضم، علاوة على الخُجندي والخازن، والسجزي، وأبا الجود بن الليث، وابن الهيثم، كما ضم علماء رياضيات أتوا فيما بعد مثل السموأل، وكمال الدين بن يونس، والخلاطي، واليزدي...

إلا أن مؤلفي القرن العاشر للميلاد بالذات قد تنبهوا إلى هذا الوضع الجديد. فقد كتب أحدُهم، بعد تقديمه مبدأ تولد المثلثات القائمة كأعداد، قائلاً: «هذا هو الأصل في معرفة الأقطار للمثلثات التي هي أصول الأجناس، ولم أجد هذا ذكر في شيء من الكتب القديمة ولا ذكره أحد ممن وضع الكتب في الحساب من المحدثين ولا علمت أنه انفتح لأحد من قبلي»(٧٥). في هذا المقال المجهول الكاتب كما في غيره، بقلم الخازن - أحدُ مؤسِسي هذا التقليد - أدخل علماء الرياضيات المفاهيم الأساسية لهذا التحليل الجديد: مفهوم المثلث القائم الزاوية البدائي - «أصل الأجناس» - ومفهوم المَوَلِّد، وخاصة مفهوم الحل «بقياس - أو بمقاسٍ - عددٍ ما». والواقع هو أن هذا الحقل الجديد قد نُظِم حول دراسة المثلثات العددية (قائمة الزاوية) والأعداد المتطابقة (Nombres congruents)، وكذلك من تشكيلة مسائل في نظرية الأعداد، مرتبطة بهذين الموضوعين.

وبعد أن أدخل المؤلفُ المجهول للنص السابق ذكرُه، مفاهيمَ الأساس لدراسة المثلثات الفيثاغورية، يتساءل عن الأعداد الصحيحة التي باستطاعتها أن تكون أوتاراً لهذه المثلثات؛ أي عن الأعداد الصحيحة التي يمكن أنْ تتمثل على شكل مجموع مربعين. ويُعلنُ بنوع خاصٍ أن كل عنصر من متتالية المثلثات الفيثاغورية البدائية يكون وتره على أحد الشكلين: ٥ (بقياس ١٢) أو ١ (بقياس ١٢). غير أنه يذكر - كما الخازن بعده - أن بعض أعداد هذه المتتالية - مثلاً ٤٩ و٧٧ - ليست بأوتارٍ لمثلثات كهذه. وكان هذا المؤلف نفسه يعلم أيضاً أنه لا يمكن لبعض الأعداد من الشكل ١ (بقياس ٤) أنْ تكون أوتاراً لمثلثات قائمة بدائية.

ومن ثم يقدم الخازن تحليل القضية التي لم يقدم إقليدس في الأصول برهانها سوى

---

(٧٤) انظر: Rashed, «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^{e}-XIV^{e} siècles,» pp. 107-147.

(٧٥) Rashed, «L'Analyse diophantienne au X^{ème} siècle: L'Exemple d'al-Khāzin,» pp. 201-202.

تركيباً (الكتاب العاشر، المقدمة الأولى للقضية ٢٩) وهي القضية التالية:

لتكن ثلاثية الأعداد الصحيحة (x,y,z) حيث $(x,y)=1$ [٧٦]، و x مزدوج. إن الشروط التالية متكافئة:

(١) $$x^2+y^2=z^2\ ,$$

(٢) توجد ثنائية من أعداد صحيحة $p>q>0$؛ $(p,q)=1$ وأحدهما مفرد والآخر مزدوج. بحيث يكون:

$$x=2pq,\quad y=p^2-q^2,\quad z=p^2+q^2.$$

ويحل الخازن فيما بعد المعادلة[٧٧]:

$$x^2=x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\ .$$

وطريقة تفكيره عامة، على الرغم من توقفه عند حالة $n=3$. وينظر بعد ذلك بمعادلتين من الدرجة الرابعة:

$$x^4+y^2=z^2 \quad و \quad x^2-y^2=z^4$$

لن نتوقف أكثر مما فعلنا عند هذه الدراسات عن المثلثات (القائمة الزاوية) العددية التي تابعها الخازن، ومن بعده أبو الجود بن الليث، لكي نأتي إلى مسألة الأعداد المتطابقة، أي إلى حلول النظام:

$$\begin{aligned} x^2+a&=y_1^2,\\ x^2-a&=y_2^2\ . \end{aligned} \tag{1}$$

هنا أعطى المؤلف المجهول للنص السابق الذكر، المتطابقتين:

$$(u^2+v^2)^2\pm 4uv(u^2-v^2)=(u^2-v^2\pm 2uv)^2 \tag{2}$$

التي تتيح حل النظام (1) في حال $a=4uv(u^2-v^2)$. ويُمكن استنتاج هاتين المتطابقتين مباشرة من التالية:

$$z^2\pm 2xy=(x\pm y)^2$$

فبوضعنا:

$$x=u^2-v^2,\quad y=2uv,\quad z=u^2+v^2$$

نحصل على (2).

---

(٧٦) يشير (x,y) هنا إلى القاسم المشترك الأكبر لِ x و y.

(٧٧) المصدر نفسه، ص ١٩٣ ـ ٢٢٢.

إذ ذاك يبرهن الخازن المُبَرهنة التالية:

ليكن a عدداً طبيعياً مُعْطى. إن الشرطين التاليين متكافئان: (١) هناك حل للنظام (1)؛ (٢) هناك ثنائية من عددين صحيحين (m, n) بحيث يكون:

$$m^2 + n^2 = x^2,$$
$$2mn = a\ ;$$

في ظل هذه الشروط تكون a على الشكل $a = 4uv(u^2 - v^2)$.

في ظل هذا التقليد بدأت أيضاً دراسة مسألة كتابة عدد صحيح على شكل مجموع مربعين. فقد كرس الخازن عدة قضايا من بحثه لهذه الدراسة. ويدل، خلال هذا البحث المهم، من جهة على معرفة مباشرة بالقضية *III - 19* من **علوم الحساب** لديوفنطس - وحُكماً بالصيغة العربية لهذا الكتاب - ومن جهة أخرى على المُتطابِقة المُصادَقة قبلاً في الرياضيات القديمة:

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr \pm qs)^2 + (ps \mp qr)^2\ .$$

ويبحث الخازن أيضاً عن حلولٍ صحيحة لنظام المعادلات الديوفنطسية كمسألة: «جِد أربعة أعداد مختلفة بحيث يكون مجموعُها مربعاً، ومجموعُ كل اثنين منها مربعاً»[٧٨]، أي:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y^2,$$
$$x_i + x_j = z_{ij}^2\ (i < j)$$

وهو نظام من $\binom{4}{2} = 6$ معادلات.

وعلماءُ الرياضيات هؤلاء كانوا أيضاً أول من طرحوا السؤال حول المسائل المستحيلة، مثل الحالة الأولى من «مبرهنة» فيرما. فمن المعروف منذ زمن بعيد أن الخُجندي قد حاول برهان ما يلي: «لا يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب». وحسب الخازن[٧٩]، فإن برهان الخجندي ناقص. ولقد حاول أيضاً أبو جعفر أنْ يبرهن القضية التالية: «لا يمكن أن يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب، كما قد يمكن أن يجتمع من عددين مربعين عدد مربع ولا أن ينقسم عدد مكعب إلى عددين مكعبين، كما قد ينقسم عدد مربع إلى عددين مربعين»[٨٠].

(٧٨) المصدر نفسه.

(٧٩) المصدر نفسه، ص ٢٢٠.

(٨٠) المصدر نفسه، ص ٢٢٢.

وكذلك كان برهانُ أبي جعفر ناقصاً. وعلى الرغم من أن هذه المسألة لم تُحل إلا مع أولير (Euler)[٨١]، إلا أنها استمرت في إشغال علماء الرياضيات العرب، الذين أعلنوا فيما بعد استحالة الوضع التالي: $x^4 + y^4 = z^4$.

لم يتوقف البحث في التحليل الديوفنطسي الصحيح وخاصة في المثلثات العددية (القائمة الزاوية) عند رواده في النصف الأول من القرن العاشر للميلاد. بل على العكس، استأنفه خلفاؤهم، وبالروح عينها، خلال النصف الثاني من القرن نفسه وبداية القرن اللاحق، كما تؤكد أمثلة أبو الجود بن الليث، والسجزي وابن الهيثم. وقام آخرون، فيما بعد، بمتابعة هذا البحث، بطريقة أو بأخرى، مثل كمال الدين بن يونس. ولنبدأ بالتوقف قليلاً عند كتابات أبي الجود والسجزي.

يستعيد أبو الجود بن الليث في رسالة عن المثلثات القائمة الزاوية العددية، مسألة تكوين هذه الأخيرة، والشروط اللازمة لتكوين المثلثات البدائية؛ وعلى الأخص ينشىءُ جداول لتسجيل أضلاع المثلثات الناتجة، ومساحاتها، ونسبة هذه المساحات إلى المحيطات، وذلك انطلاقاً من ثنائيات أعداد صحيحة $(p, p + k)$ مع $k = 1, 2, 3...$ ويعودُ أيضاً في نهاية مقالته إلى مسألة الأعداد المتطابقة.

وكذلك اهتم السجزي، الأصغر سناً، بهذه المثلثات، وعلى الأخص بحل المعادلة:

$$v^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 \,, \qquad (*)$$

حيث تقضي طريقته بالبحث عن أصغر عدد صحيح t تكون معه $2vt = z^2$.

فيستنتج:

$$(v + t)^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 + t^2 + z^2 \,.$$

ويحصل هكذا على عدد يكون المجموع لـ $(n + 2)$ مربعاً. ويبرهن أنه إذا عرفنا أن نحلها في الحالتين $n = 2$ و $n = 3$، نستطيع أن نجد الحل في الحالة العامة.

في الواقع، برهن السجزي، عن طريق استقراء (Induction) تام منه، بدائي بعض الشيء، القضية التالية:

(P_n): لكل n، يوجدُ مربع هو مجموعُ n مربعات.

---

(٨١) رياضي سويسري (١٧٠٧ ـ ١٧٨٣م). (المترجم).

هكذا، يعطي البرهانَ أولاً في الحال P_2، أي:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

بالتحليل والتركيب. يعود تحليله في الواقع للدلالة هندسياً على:

$$y^2 = (z - x)(z + x) \;;$$

أما في التركيب، فيأخذ الحد المزدَوج، ليكن y^2 مثلاً:

$$y^2 = 2^k b(2a) \;,$$

إذ ذاك يكون $z + x$ مزدوجاً ويكون:

$$z + x = 2a \text{ و } z - x = 2^k b$$

فنجد:

$$x = a - 2^{k-1}b \text{ و } z = a + 2^{k-1}b \;;$$

وهكذا، نجد حلاً لكل k في حال يحقق k الشرط: $k > 0$ و $a > 2^{k-1}b$، فيكون $y^2 > 2^{2k}b^2$ وَ $y > 2^k b$ و $y^2 = 2^{k+1}ab$؛ وفي الحالة الخاصة، إذا كانت $b = 1$ يكون لدينا:

$$y^2 = 2^{k+1}a \;,\; 2 \leq 2^k < y,$$

من هنا نستنتج وجود حل إذا كانت y تُقسم على 2 و$2 < y$ وثلاثة حلول في حال قسمة y على 4 و $8 < y$، وعلى العموم يكون لدينا $2h - 1$ حلاً إذا كانت y تُقسم على 2^h و$y > 2^{2h+1}$.

هكذا، ومن أجل هذه الحالة، يبرهن السجزي أنه، في حال $n = 2$، يوجد مربع يكون مجموع مربعين بأشكالٍ عديدة.

أما في حال P_3، أي في حال المعادلة من النوع:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

فَيُدْخِل السجزي شرطاً يحد من عمومية البناء هو الشرط $t = x + y$. ويبرهن فيما بعد أنه، إذا كان لدينا P_n إذ ذاك يكون لدينا $P_n + 2$؛ وهذا يدل على استقراء في حال كان n مزدوجاً وعلى استقراء آخر في حال كان n مفرداً.

ويعطي السجزي جدولاً حتى $n = 9$، ننقله هنا:

مجموع المربعات	المربعات	عدد الجذور
$100 = 10^2$	64 36	2 [n =]
$121 = 11^2$	36 81 4	3
$900 = 30^2$	36 64 400 400	4
$81 = 9^2$	4 4 1 36 36	5
$2025 = 45^2$	900 64 36 400 400 225	6
$121 = 11^2$	4 4 1 36 36 36 4	7
$3025 = 55^2$	900 64 36 400 400 225 900 100	8
$1089 = 33^2$	4 4 1 36 36 36 4 484 484	9

الجدول رقم (١٢ ـ ٢)

نرى أن بنيان هذا الجدول قد تم بواسطة قاعدة السجزي الاستقرائية.

ويمكننا التحقق من أن أعمال أبي الجود بن الليث والسجزي عن التحليل الديوفنطسي تندرج تماماً في تقليد الخازن: فلقد اقتبسا عنه المسائل الرئيسية، ودعّما نوعاً ما الوسائل الهندسية للبرهان، وهذا ما كرس التباعد مع الجبر والتحليل الديوفنطسي المنطق. يبقى أن الخازن وأسلافه في تقليدهم، علاوة عن الاستعمال المقصود للألفاظ الإقليدسية ـ القطع المستقيمة ـ لإعطاء البراهين في هذا الحقل، قد استعانوا ظرفياً بالاستدلالات الحسابية كالذي يهدِف مثلاً إلى الدلالة على أن في كل عنصر من متتالية الثلاثيات الفيثاغورية البدائية، يكون الوتر على أحد الشكلين ٥ (بقياس ١٢) أو ١ (بقياس ١٢). ويبدو أن التحليل الديوفنطسي قد تطور تماماً بهذا الاتجاه في الرياضيات العربية وذلك قبل أنْ ينخرط فيه بالكامِل مع فيرما. وظهرت إرادة لاستبدالِ لغة الهندسة بأساليب حسابية بحتة. ولا نعلم تماماً حتى الآن زمنَ حدوث هذا التطور الهام في المعنى، ولكننا نلتقيه في أعمال علماء الرياضيات فيما بعد. فقد كرس اليزدي بحثاً قصيراً لحل المعادلة الديوفنطسية المذكورة سابقاً (*) (ص ٥٢٧)، بوسائل حسابية بحتة؛ ودرس الحالات المختلفة تبعاً لازدواج الـ x_i أو إفراديتها واستعمل بشكل منهجي حساباً مكافئاً للتطابقين بقياس ٤ وبقياس ٨[٨٢]. ولنذكر هنا مقدمتين من بين المقدمات العديدة التي برهنها، وذلك توضيحاً لمسعاه ولأسلوبه.

(٨٢) سيكون هذا النص، وكذلك نصوص أبي الجود بن الليث والسجزي، موضوع بحث منفصل قيد الظهور.

ليكن n مُفْرداً، لكن $n \not\equiv 1$ (بقياس ٨)، إذ ذاك لا يمكن لـ $x_n^2 + ... + x_1^2$ أن يكون مربعاً في حال كانت $x_1, ..., x_n$ أعداداً مُفردة.

ليكن n مفرداً مع $n \equiv 1$ (بقياس ٨)، وإذا كانت $x_1, ..., x_{n-1}$ أعداداً مفردة معطاة، يوجد عدد شفعي x_n بحيث يكون $x_1^2, ..., x_n^2$ مربعاً.

وبواسطة مقدمات من هذا النوع قام بصياغة المعادلة (*).

وقد نُقِلَت نتائج عديدة من أعمال العلماء الرياضيين هؤلاء إلى الغرب حيث نلقاها في الـ *Liber Quadratorum* وأحياناً في الـ *Liber Abaci* لفيبوناتشي؛ لكن تجديد هذا الفصل سيتم بفضل ابتكار فيرما لطريقة «النزول (أو الانحدار) اللانهائي» (Descente infinie).

النظرية التقليدية للأعداد

لم يقتصر إسهام علماء الرياضيات في ذلك العصر في نظرية الأعداد على التحليل الديوفنطسي الصحيح. فلقد أدى تياران آخران من البحث، انطلقا من نقطتين مختلفتين، إلى انتشار النظرية الإغريقية في الأعداد وتجديدها. استقى التيار الأول مصدره، وأيضاً مثاله، من الكتب الحسابية الثلاثة من **أصول** إقليدس، بينما يتموضع التيار الثاني في سلالة الحساب الفيثاغوري الحديث، مثلما تظهر في **المقدمة الحسابية** لنيقوماخوس الجرشي (Nicomaque de Gérase). ففي كتب إقليدس نجد نظرية عن الازدواج (Parité) ونظرية عن الخواص الضربية للأعداد الصحيحة: قابلية القسمة، . . . الأعداد الأولية. . . غير أن العدد الصحيح يتمثل، عند إقليدس، بقطعة من خطٍ مستقيم، وهو تمثيل ضروري لبرهان القضايا. فعلى الرغم من مشاطرة الفيثاغوريين المُحدثين لهذا المفهوم عن الأعداد الصحيحة وتمسكهم على الأخص بدراسة الخواص عينها، أو خواص مشتقة منها، إلا أنهم بطرقهم وأهدافهم، قد تميزوا عن إقليدس. فبينما لجأ إقليدس إلى البراهين، استعمل هؤلاء أسلوب الاستقراء فحسب. ومن جهة أخرى، لم يكن لعلم الحساب، بنظر إقليدس، أيُ هدفٍ خارجاً عن هذا العِلم، بينما كان له بنظر نيقوماخوس الجرشي أهداف فلسفية وحتى نفسية. وأدرك علماء الرياضيات العرب بوضوح هذا الفارق في الطريقة، ومنهم ابن الهيثم الذي كتب: «وخواص العدد تتبين على وجهين: أحد الوجهين هو الاستقراء. فإنه إذا استقريت الأعداد ومُيِّزت، وُجد بالتمييز والاعتبار جميع الخواص التي لها. ووجود خواص العدد بهذا الوجه يدعى الأريتماطيقي. ويتبين كذلك في كتاب **الأريتماطيقي**. والوجه الآخر الذي يتبين خواص العدد هو البراهين والمقاييس. وجمع خواص العدد المدركة بالبراهين هو الذي تتضمنه هذه المقالات لإقليدس أو ما يرجع إليها»[٨٣].

(٨٣) أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، **شرح مصادرات إقليدس** (مخطوطة فايز الله، اسطنبول، ١٣٥٩)، الورقة ٢١٣ ظ.

فالمقصود، إذاً، بنظر علماء الرياضيات في ذلك العصر، هو فارق بين طرق البرهان لا بين كائنات علم الحساب. ونُدرِك من حينه أنه، على الرغم من التفضيل الواضح للطريقة الإقليدسية، كان يخطر لعلماء الرياضيات، وحتى للذين كانوا من الأهمية بمنزلة ابن الهيثم، اللجوء إلى الاستقراء في بعض الحالات، تبعاً للمسألة المطروحة؛ فهكذا ناقش ابن الهيثم «المبرهنة الصينية» ومبرهنة ويلسون (Wilson)[٨٤]. ومن جهة أخرى، على الرغم من إهمال علماء رياضيات من المرتبة الأولى، وبعض الفلاسفة كابن سينا، للأهداف الفلسفية والنفسية التي نسبها نيقوماخوس لعلم الحساب، فإن علماء رياضيات من مرتبة أدنى، وفلاسفة، وأطباء، وموسوعيين.. إلخ، قد أبدوا اهتماماً بعلم الحساب هذا. يرتكز تاريخ هذا العلم، إذاً، على تاريخ الثقافة العامة للإنسان المتعلم في المجتمع الإسلامي على امتداد عصور، ويتجاوز كثيراً إطار هذا الكتاب. فعمداً سنقتصر على مساهمة علم الحساب في انتشار نظرية الأعداد كمادة قائمة بذاتها.

غير أن نظرية الأعداد بالمعنى الإقليدسي والفيثاغوري قد بدأت باكراً قبل نهاية القرن التاسع للميلاد. ولقد عاصرت هذه النظرية ترجمةَ ثابت بن قرة كتابَ نيقوماخوس، ومراجعةَ الأول لترجمة مؤلف **الأصول** لإقليدس. فإن ثابت بن قرة (ت ٩٠١م) هو من بدأ هذا البحث في نظرية الأعداد، بإطلاقه أول نظرية في الأعداد المتحابة. هذا الحدث، الذي عرفه المؤرخون منذ القرن السابق بفضل أعمال ف. ويكيه (F. Woepcke)[٨٥]، لم يأخذ معناه الحقيقي إلا منذ فترة وجيزة، عندما أثبتنا وجود تقليد بأكمله، بدأه ثابت بن قرة بأسلوب إقليدسي خاص، ليصل بعد بضعة قرون إلى الفارسي (ت ١٣١٩م)، بفضل تطبيق الجبر على دراسة أولى الدالات الحسابية الأولية؛ ومن أعلام هذا التقليد عدة أسماء، منها على سبيل المثال لا الحصر: الكرابيسي، والأنطاكي، والقبيصي، وأبو الوفاء البوزجاني، والبغدادي، وابن الهيثم، وابن هود، والكرجي... وبالطبع لا يمكننا الادعاء بتفصيل هذا الوصف، في بعض الصفحات وهي المكرسة لهذه النظرية. لذا سنحاول فقط رسم معالم هذه الحركة التي أتينا على ذكرها.

الأعداد المتحابة واكتشاف الدالات الحسابية الأولية

في ختام الكتاب التاسع من **الأصول** أعطى إقليدس نظرية في الأعداد التامة وبرهنَ أن العددَ $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$ تام ـ أيْ يعادلُ مجموعَ قواسمه الفعلية ـ في حال كان

---

(٨٤) رياضي وفيزيائي اسكوتلندي (١٨٦٩ ـ ١٩٥٩م).

(٨٥) انظر: Franz Woepcke, «Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des grecs,» *Journal asiatique*, 4ième série, tome 20 (octobre-novembre 1852), pp. 420-429,

حيث يقدم ويكيه، في هذا النص، مختصراً لكتيب ثابت بن قرة.

$(2^{p+1}-1)$ عدداً أولياً. لكن إقليدس، كما نيقوماخوس أو أي مؤلف إغريقي، لم يحاول إعطاء نظرية مماثلة للأعداد المتحابة. فقرر ثابت بن قرة، إذاً، بناء هذه النظرية، وأعلن وبرهن، بالأسلوب الإقليدسي البحت، المبرهنة الأهم إلى الآن لهذه الأعداد، التي تحمل اليوم اسمَه.

لنسمّ $\sigma_0(n)$ مجموع الأجزاء القاسمة لعددٍ صحيح n، و $\sigma(n) = \sigma_0(n) + n$ مجموع قواسم n؛ ولنذكّر بأن عددين صحيحين يُقال لهما مُتحابان في حال كون: $\sigma_0(a) = b$ و $\sigma_0(b) = a$.

مبرهَنة ابن قرة

في حال $n > 1$، لنضع $p_n = 3.2^n - 1$، و $q_n = 9.2^{2n-1} - 1$؛ فإذا كانت p_{n-1}، و p_n، و q_n أعداداً أولية، عندها يكون العددان $a = 2^n p_{n-1} p_n$ و $b = 2^n q_n$ متحابين.

لنذكر أن برهانَ ابن قرة يرتكزُ على قضية مكافئة للقضية IX-14 من **الأصول**(٨٦)، ويستخدِم من ثم خواص المتسلسلة الهندسية ذات المضاعفة 2 (de raison 2).

غير أنه، ابتداءً من ابن قرة وحتى نهاية القرن السابع عشر للميلاد على الأقل، اقتصر تاريخ النظرية الحسابية في الأعداد المتحابة على ذكر هذه المبرهَنة، وعلى نقل عُلماء الرياضيات لها فيما بعد وعلى حساب الثنائيات من هذه الأعداد. ومن لائحة طويلة لعلماء رياضيين باللغة العربية نستطيع الاحتفاظ بأسماء الأنطاكي (ت ٩٨٧م)، والبغدادي، وابن هود، والكرجي، وابن البناء، والأموي(٨٧). هذه الأسماء، التي سنضيف إليها أسماء أخرى، تُظهِر بما فيه الكفاية ـ بسبب اختلافها الزمني وكذلك الجغرافي ـ الانتشارَ الواسع لمبرهنة ابن قرة، التي نجدها في العام ١٦٣٨م عند ديكارت. لكن يبدو بديهياً، بنظر ديكارت وكما بنظر أسلافه العرب، أن طريقة ابن قرة كانت استنفادية (Exhaustive).

أما بشأن حساب الثنائيات من الأعداد المتحابة، فلم يكلِف ابن قرة نفسه عناءَ حساب ثنائية أخرى غير (٢٢٠ و ٢٨٤)، وهذا ليس عن عجزٍ في إيجاد مزدوجات أخرى وإنما عن قلةِ اهتمامٍ بمثل هذه الحسابات عند هذا الإقليدسي. وكذلك يبدو أن الأنطاكي، بعد

---

(٨٦) وهذه القضية تكتب هكذا: «إذا كان عدد هو الأصغر الذي يمكن قياسه بأعداد أولية معطاة، فلن يكون من الممكن قياسه بأي عدد أولي آخر، إذا لم يكن من الأعداد التي قاسته قبلاً»؛ وبتعبير آخر، ليس للمضاعَف المشترك الأصغر لأعداد أولية من قواسم أولية أخرى سوى هذه الأعداد.

(٨٧) انظر: Rashed: «Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire,» pp. 209-218; «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^e-XIV^e siècles,» pp. 107-147, et Roshdi Rashed, «Ibn al-Haytham et les nombres parfaits,» *Historia Mathematica*, vol. 16 (1989), pp. 343-352.

الصورة رقم (١٢ ـ ٤)

ثابت بن قرة، **الأعداد المتحابة** (اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٤٨٣٠).

قام ثابت بن قرة بصياغة أول نظرية لهذه الأعداد في أسلوب إقليدسي تام، واستطاع بذلك أن يكشف أهم نتيجة معروفة حتى القرن الماضي، فضلاً عن برهانه عليها. وقد استمر تناقل هذه المبرهنة بشكل متصل عبر القرون حتى القرن السابع عشر. ونجد نفس المبرهنة أيضاً عند ديكارت وفيرما في القرن السابع عشر.

وهذه المبرهنة هي:

إذا كان $n > 1$، فلنجعل $p_n = 3.2^n - 1$، $q_n = 9.2^{2n-1} - 1$.

فإذا كان p_{n-1} و p_n و q_n أعداد أولية، فإذن $a = 2^n p_{n-1} p_n$ و $b = 2^n q_n$ هما عددان متحابان، عدد زائد وعدد ناقص.

ثلاثة أرباع من القرن، لم يقم بحساب أي مزدوجة أخرى. ولقد بوشر بهذا الحساب، مع علماء الجبر على وجه الخصوص. فهكذا نجد، عند الفارسي في الشرق، وفي وسط ابن البناء في الغرب، وعند التنوخي وغيره من علماء الرياضيات من القرن الثالث عشر للميلاد، الثنائية (١٧٢٩٦ و١٨٤١٦)، المنسوبة إلى فيرما. ويحتسب اليزدي فيما بعد الثنائية (٩٣٦٣٥٨٤ و٩٤٣٧٠٥٦) المنسوبة إلى ديكارت.

غير أن ملخصاً تاريخياً من هذا النوع، ولو كان الأكمل إلى الآن، يبقى مبتوراً وعَمِياً: فهو يجهل فعلاً الدور الذي لعبه البحث عن الأعداد المتحابة في مُجمل نظرية الأعداد، كما يجهل تدخل الجبر في هذه النظرية. ولن نطيل التوقف عند الأعمال المذكورة سابقاً، وذلك لتقديم هذا التدخل للجبر. فقد قصد كمال الدين الفارسي، العالم الفيزيائي والرياضي الشهير، في بحثٍ ألفه، أن يبينِ مبرهنة ابن قرة بطريقة جبرية. وقد دفعه هذا العمل إلى فقه أولى الدالات الحسابية، وإلى تحضيرٍ قاده إلى إعلان المبرهنة الأساسية في علم الحساب، لأول مرة. وكذلك طور الفارسي الوسائل التوافيقية الضرورية لهذه الدراسة، وطور بالتالي بحثاً كاملاً عن الأعداد الشكلية. وهذا باختصار يعني، أنه خاض في صلب النظرية الأساسية للأعداد، كما نجدها فيما بعد في القرن السابع عشر للميلاد.

فقد جمع الفارسي عبر بحثه القضايا الضرورية لتمييز الدالتين الحسابيتين الأوليين: مجموع قواسم عدد صحيح، وعدد هذه القواسم. يبدأ هذا البحث بثلاث قضايا تكتب الأولى منها على الشكل: «كلُ عدد مركب يتحلل بالضرورة إلى عدد منته من العوامل الأولية، يكون هو حاصل ضربها». ويحاول في القضايا الأخرى (بشكل غير موفق) أن يبرهن وحدانية هذا التحليل.

وخلافاً لنص ابن قرة، لم ينفتح عرضُ الفارسي على قضية مكافئة للقضية $IX - 14$ لإقليدس، ولا حتى على هذه القضية نفسها؛ لكن المؤلف يعلن بالتتالي وجود تفكك منته إلى عوامل أولية، ووحدانية هذا التفكك. وبفضل هذه المبرهنة، وبفضل الطرق التوافيقية، يُمكِننا أن نحدد بشكل كامل الأجزاء القاسمة لعدد، أيْ، وبحسب تعابير الفارسي بالذات: «كل مركب حُلِّل إلى أضلاعه الأوائل فإن المؤلفة من تلك الأضلاع الثنائية والثلاثية وغيرهما إلى المؤلفة السمية لعدد الأضلاع إلا واحداً كلها أجزاء له».

يفحص الفارسي، في أعقاب هذه القضايا، وسائل التحليل إلى عوامل، وحساب الأجزاء القاسمة تبعاً لعدد العوامل الأولية. ومن دون أدنى شك فإن النتيجة الأهم على هذا المستوى هي المطابقة بين التوافيق والأعداد الشكلية. وهكذا أضحى كلُ شيء جاهزاً لدراسة الدالات الحسابية. في هذا المجال، تناولت فئة أولى من القضايا الدالة $\sigma(n)$. ومع أن الفارسي لم يعالج سوى $\sigma_0(n)$، فإننا نلاحظ معرفته لـ σ على أنها دالة ضربية. وبين قضايا هذه الفئة، نجد على وجه الخصوص:

(١) في حال $n = p_1p_2$، مع $(p_1, p_2) = 1$ [٨٨]، يكون:

$$\sigma_0(n) = p_1\sigma_0(p_2) + p_2\sigma_0(p_1) + \sigma_0(p_1)\sigma_0(p_2)$$

مما يدل على معرفته بالعبارة:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1)\sigma(p_2).$$

(٢) في حال $n = p_1p_2$، مع p_2 عدد أولي و$(p_1, p_2) = 1$، يكون:

$$\sigma_0(n) = p_2\sigma_0(p_1) + \sigma_0(p_1) + p_1.$$

(٣) في حال $n = p^r$، مع p عدد أولي، يكون:

$$\sigma_0(n) = \sum_{k=0}^{r-1} p^k = \frac{p^r - 1}{p - 1}$$

وكانت هذه القضايا منسوبةً إلى ديكارت حتى الآن.

(٤) وأخيراً حاول، من دون أن ينجح في ذلك (وهذا ما يُمكن تفهمه بسهولة) إعطاء صيغة فعلية في حال $n = p_1p_2$، مع $(p_1, p_2) \neq 1$. وتحتوي زمرة ثانية من المبرهنات على عدة قضايا تتعلق بالقضية $\tau(n)$ أي بعدد قواسم n.

(٥) في حال، $n = p_1p_2...p_r$، معْ $p_1, ..., p_r$ أعداد أولية متمايزة، يكون عدد أجزاء n المسمى $\tau_0(n)$ معادلاً لـ:

$$1 + \binom{r}{1} + ... + \binom{r}{r-1}$$

وهذه قضية منسوبة للأب دايديه (Deidier).

(٦) في حال $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_r^{e_r}$، يكون:

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(e_i + 1)$$

وَ $\tau_0(n) = \tau(n) - 1$؛ وهذه قضية منسوبة لِـ جون كيرسي (John Keresy) ومونمورت (Montmort).

وأخيراً يُبين الفارسي مبرهنة ثابت بن قرة. فقد كان يلزمه فعلاً، أنْ يبرهن ببساطة أن:

$$\sigma(2^n p_{n-1}p_n) = \sigma(2^n q_n) = 2^n[p_{n-1}p_n + q_n] = 9.2^{2n-1}(2^{n+1} - 1).$$

---

(٨٨) p_1 و p_2 أوليان كل منهما بالنسبة إلى الآخر (قاسمهما المشترك = ١). (المترجم).

يدل هذا التحليل المقتضب لبحث الفارسي على ظهور أسلوب جديد، تم زرعه في حقل قديم، وهو نظرية الأعداد. فعلى الرغم من بقائهم على الأرض الإقليدسية لم يتردد علماء الرياضيات في القرن الثالث عشر للميلاد في اللجوء إلى إسهامات الجبر، وخصوصاً إلى التحليل التوافيقي. على أن هذا الميل يظهر أيضاً، عند دراسة علماء الرياضيات كالفارسي وابن البناء للأعداد الشكلية كما رأينا آنفاً[٨٩].

الأعداد التامة

إذا كان علماء الرياضيات بأبحاثهم عن الأعداد المتحابة قد سعوا أيضاً لتمييز هذا الصنف من الأعداد الصحيحة، فإنهم بدراستهم للأعداد التامة قد لاحقوا الهدف عينه. ونحن نعلم ـ عن طريق العالم الرياضي الخازن ـ بالتساؤل في القرن العاشر للميلاد، عن وجود الأعداد التامة المفردة، وهي مسألة لا تزال بغير حل[٩٠]. وحصل البغدادي[٩١] في نهاية ذلك القرن وبداية القرن اللاحق على بعض النتائج المتعلقة بهذه المسائل عينها؛ فأعطى ـ على سبيل المثال ـ القضية التالية:

«إذا كان العدد $1 - 2^n = (2^n)\sigma_0$ أولياً فإن العدد $(2^n - 1) + ... + 2 + 1$ يكون عدداً تاماً»، وهذه قاعدة نُسِبَتْ إلى العالم الرياضي ج. بروسيوس (J. Broscius) مِن القرن السابع عشر للميلاد. وكان ابن الهيثم[٩٢]، المعاصر للبغدادي، أول من حاول تمييز هذا الصنف من الأعداد التامة الزوجية، وذلك عندما سعى لتبيان المبرهنة التالية:

إذا كان n عدداً زوجياً، يكون الشرطان التاليان متكافئين:

(١) في حال كان $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$، وكان $(2^{p+1} - 1)$ أولياً، إذ ذاك يكون $\sigma_0(n) = n$؛

(٢) في حال كان $\sigma_0(n) = n$، إذ ذاك يكون $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$ ويكون $(2^{p+1} - 1)$ أولياً.

ونعلم أن الشرط الأول، ليس سوى القضية $IX - 36$ من **أصول** إقليدس. فيحاول، إذاً، ابن الهيثم أنْ يبرهن أيضاً أن كل عدد تام زوجي هو على الشكل

---

(٨٩) Rashed, Ibid.

(٩٠) وقال الخازن: «ولذلك وقع للسائلين <عن الأعداد الزائدة والناقصة والتامة> سؤال هل يوجد عدد تام من الأعداد الأفراد أم لا». انظر النص العربي الذي نشره عادل أنبوبا، في: الكرخي، كتاب البديع في الحساب، ص ١٥٧.

(٩١) انظر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 267.

(٩٢) Rashed, «Ibn al-Haytham et les nombres parfaits,» pp. 343-352.

الإقليدسي، وهي المبرهَنة التي أثبتها أولير (Euler) بالشكل القاطع. ولنذكر أن ابنَ الهيثم لم يحاول أنْ يحسب أعداداً تامة أخرى غير تلك المعروفة والمنقولة تقليدياً، وذلك مثلما تعامَل ثابت بن قرة مع الأعداد المتحابة. وهذه المهمة الحسابية ستكون مهمة علماء رياضيات من طبقة أدنى، أقرب إلى تقليد نيقوماخوس الجرشي، مثل ابن فلّوس (ت ١٢٤٠م) وابن المالك الدمشقي(٩٣) وغيرهما. وتُفيدنا كتاباتهم بأن علماء الرياضيات قد عرفوا في هذه الفترة، الأعداد التامة السبعة الأولى.

تمييز الأعداد الأولية

شكل تمييزُ الأعداد محوراً من محاور البحث في نظرية الأعداد: متحابة أكانت، أم متكافئة(٩٤)، أم تامة. ولن نعجب، في هذه الظروف، من عودة علماء الرياضيات إلى الأعداد الأولية للقيام بمهمة كهذه. وهذا ما فعله تماماً ابن الهيثم خلال حلِه للمسألة التي نسميها «مسألة البواقي الصينية»(٩٥). فلقد أراد فعلاً حل نظام التطابقات الخطية:

$$x \equiv 1 (mod\ i)$$
$$x \equiv 0 (mod\ p)$$

حيث p عدد أولي و$1 < i \leq p - 1$.

خلال هذه الدراسة، أعطى معياراً لتحديد الأعداد الأولية، وهو المعروف اليوم تحت اسم «مبرهنة ويلسون» (Wilson):

إذا كانت $n > 1$، يكون الشرطان التاليان متكافئين:

(١) n عدد أولي.

(٢) $(n-1)! \equiv -1 (mod\ n)$

أي، حسب تعبير ابن الهيثم «. . . إن هذا المعنى يلزم في كل عدد أول، أعني أن كل عدد أول - وهو الذي لا يعده إلا الواحد فقط - فإنه إذا ضربت الأعداد التي قبله بعضها ببعض على الوجه الذي قدمنا وزيد على ما يجتمع واحد كان الذي يجتمع إذا قسم على كل واحد

---

(٩٣) المصدر نفسه.

(٩٤) الأعداد المكافئة لـ a هي الأعداد المحددة بـ $\sigma_o^{-1}(a)$، أي الأعداد التي يكون مجموع القواسم الفعلية لكل منها معادلاً لـ a. مثلاً في حال $a = 57$، يكون $\sigma_o^{-1} = \{159, 559, 703\}$.

(٩٥) انظر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 238.

من الأعداد التي قبل العدد الأول بقي منه واحد وإذا قسم على العدد الأول لم يبقَ منه شيء»[٩٦].

ونجد دراسة هذا النظام من التطابقات جزئياً عند خلفاء ابن الهيثم في القرن الثاني عشر للميلاد، كالخِلاطِي بالعربية وفيبوناتشي باللاتينية[٩٧].

ويمكننا، إلى هذه الحقول من النظرية في الرياضيات العربية، إضافة عدد كبير من النتائج التي تدخل في سياق عِلم حساب نيقوماخوس التي تطورت عن طريق علماء الحساب أو علماء الجبر، أو ببساطة، من أجل احتياجات ممارساتٍ أخرى كالمربعات السحرية أو الألعاب الحسابية. ونُذكِر في هذا المجال بحواصل جمع قواتِ الأعدادِ الطبيعية، وبالأعداد المضلعية، وبمسائل عن تطابقات خطية... إلخ. هذه النشاطات تُشكِلُ مجموعة هائلة من النتائج، التي توسع وتبرهن ما كان مَعلوماً في السابق وما ليس من إمكانية لذكرِه في هذه الصفحات[٩٨].

---

(٩٦) انظر: المصدر نفسه، ص ٢٤٢، و Roshdi Rashed, «Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 22, no. 4 (1980), pp. 305-321.

(٩٧) المصدران نفسهما.

(٩٨) المقصود إذاً هو مطالعة الأعمال الحسابية لعلماء الحساب مثل الإقليدسي، والبغدادي، والأموي...؛ ولعلماء الجبر مثل أبي كامل، والبوزجاني، والكرخي، والسموأل؛ والفلاسفة مثل الكندي، وابن سينا، والجوزجاني... إلخ بين مئات آخرين.

ـ ١٣ ـ
التحديدات اللامتناهية في الصغر، وتربيع الهلاليات ومسائل تساوي المحيطات(*)

رشدي راشد

تمثل دراسة مسائل السلوك المقاربي والكائنات اللامتناهية في الصغر جزءاً ملموساً من البحث الرياضي بالعربية. نلتقي هذه الدراسة بمناسبة عرض طرق التقريب أو البحث عن النهايات العظمى كما مر معنا في الفصل السابق. وقد نشطتها المواد الرياضية الجديدة التي يعود تطورها إلى تطور الجبر. ومن هذه المواد نخص بالذكر التحليل العددي ونظرية المعادلات الجبرية. ولكنها، وبغض النظر عن تأثير الجبر، بدأت أيضاً تتكون خلال المحاولات التي بذلت من أجل استيعاب أفضلَ للمبرهَنات الهندسية القديمة وصياغتها، أو أيضاً خلال محاولات الإجابة عن أسئلة جديدة أثارتها تطبيقات الهندسة. نذكر هنا، على سبيل المثال، مقالة السجزي عن الخط المقارب لقطع زائد متساوي الأضلاع(١) أو مقالة ابن قرة عن تباطؤ الحركة الظاهرة وتسارعها لمتحرك على فلك البروج(٢). ويمكن الإكثار من ذكر الظروف التي يقوم فيها الهندسيون العرب بهذه الدراسة، وليست مناقشة القضية

(*) قام بترجمة هذا الفصل منى غانم ونقولا فارس وهما يشكران الدكتور محمد الحجيري لمراجعته الترجمة.

(١) انظر: Roshdi Rashed, «Al-Sijzī et Maïmonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius,» *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 37, no. 119 (1987), pp. 263-296; traduction anglaise dans: *Fundamenta Scientiæ*, vol. 8, nos. 3-4 (1987), pp. 241-256.

(٢) Thābit Ibn Qurra, *Œuvres d'astronomie*, texte établi et traduit par Régis Morelon (Paris: Les Belles lettres, 1987), pp. 68-82.

الشهيرة (X – 1) من الأصول سوى أحد الأمثلة[٣] على ذلك.

ولكن أهمية أكبر في هذا المجال، تعودُ إلى بحوث الهندسيين ابتداءً من القرن التاسع للميلاد، في سياق انتشار فصول ثلاثة من الرياضيات الهلينستية. يتعلق الفصل الأول بالحساب اللامتناهي في الصغر للمساحات والأحجام. ونبين كيف قام الأرخميدسيون المحدثون العرب بدفع بحث العالم الرياضي السِيراقوسي إلى الأمام. ويعالج الفصل الثاني تربيع الهلاليات؛ وسنرى، في ما يتعلق بهذا الفصل، أن موقع ابن الهيثم أقرب إلى أولير (Euler) منه إلى أبقراط الشيي (Hippocrate de Chios). وأخيراً يهتم الفصل الثالث بالمساحات والأحجام القصوى، في سياق معالجة مسألة تساوي المحيطات. ونقوم هنا بتفحص هذه التيارات الثلاثة من البحث الرياضي الأكثر تقدماً في ذلك العصر.

الحساب اللامتناهي في الصغر للمساحات والأحجام

أثار حسابُ المساحات والأحجام المنحنية، أي التي تحدها ـ ولو جزئياً ـ خطوط منحنية، اهتمامَ العلماء الرياضيين العرب، باكراً نسبياً. فلقد أبصر هذا القطاع، المتقدم من البحث الرياضي، النورَ في القرن التاسع للميلاد، حيث تزامن تقريباً مع ترجمة النصوص الإغريقية الثلاثة العائدة لهذا الحقل: دراسة ما دُعي لاحقاً بطريقة الاستنفاد (إفناء الفرق) (Exhaustion)، ودراسة مساحة سطوح الأجسام المنحنية وأحجامها، ودراسة مراكز الثقل لبعض الأشكال.

ففي بداية القرن التاسع للميلاد، وضع الحجاج بن مطر ترجمة لكتاب **الأصول** لإقليدس. وفي الكتاب العاشر من هذا المؤلف عرف علماء الرياضيات القضية الأساسية الشهيرة التي تقول: «إذا أخذنا مقدارين متفاوتين، وإذا طرحنا من المقدار الأكبر جزءاً أكبر من نِصفه، وإذا طرحنا من الباقي جزءاً أكبر من نصفه، وإذا تابعنا هذه العملية نفسها تكراراً، فسيبقى مقدار ما يكون أصغر من المقدار الأصغر المعطى أساساً»[٤]. وبتعبير آخر:

لنأخذ مقدارين a و b، مع $a > 0$ و$b > 0$ و$a < b$؛ ولتكن المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$b_n > \frac{1}{2}\left(b - \sum_{k=1}^{n-1} b_k\right)$$

عندئذٍ يوجد n_0 بطريقة يكون معها، ولكل $n > n_0$ لدينا:

$$\left(b - \sum_{k=1}^{n} b_k\right) < a\,.$$

---

(٣) انظر: Roshdi Rashed, *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham* (Paris: [sous presse]).

(٤) انظر: Euclide, *Les Eléments*, traduit par F. Peyrard (Paris: [s.n.], 1819), pp. 258-259.

وكذلك نقل إلى العربية مؤلفان لأرخميدس: **قياس الدائرة**، **والكرة والأسطوانة**. وكان الكندي وبنو موسى[٥] على علم بترجمة الكتاب الأول، بينما قام مساعدهم ثابت بن قرة بمراجعة ترجمة الكتاب الثاني. وفيما يخص كتب أرخميدس الأخرى، أي في **الحلزون**، **والكرويات والمخروطيات**، **وتربيع القطع المكافئ**، وفي **الطريقة**، فلا شيء يدل على معرفةٍ لعلماء الرياضيات العرب بها. وهذه الملاحظة من الأهمية بمكان، ذلك لأن أرخميدس أدخل في كتابه حول **المخروطيات والكرويات**، فكرة المجاميع التكاملية السفلى والعليا، التي تكمل إذ ذاك طريقة الاستنفاد (Exhaustion).

استجابت ترجمة كتابَي أرخميدس وكذلك شرح أوطوقيوس (Eutocius) (تمت ترجمة هذه النصوص مرتين خلال القرن التاسع للميلاد)[٦] بوضوح لمتطلبات الكندي، وبني موسى ومدرستهم. وكان بنو موسى ثلاثة إخوة: محمد وأحمد والحسن؛ وقد اهتموا بالهندسة ـ وخاصة بالقطوع المخروطية ـ وكذلك بالميكانيك، وبالموسيقى وبعلم الفلك. وضع هؤلاء الإخوة الثلاثة، وبالتحديد في بغداد، في النصف الأول من القرن التاسع للميلاد، الرسالة الأولى بالعربية في هذا المجال. ولم تقم هذه الرسالة المعنونة **قياس الأشكال المسطحة والكروية** بإطلاق البحث بالعربية حول تحديد المساحات والأحجام فحسب، وإنما ظلت النص الأساسي للعلوم اللاتينية، بعد أن قام جيرار دو كريمون (Gérard de Crémone) في القرن الثاني عشر للميلاد بترجمتها. وتُقسَم هذه الرسالة في الواقع إلى ثلاثة أجزاء. يتعلق الجزء الأول بقياس الدائرة، والجزء الثاني بحجم الكرة، بينما يعالج الجزء الثالث المسألتين التقليديتين: المتوسطان المتناسبان وتثليث الزاوية.

في الجزء الأول، حدد بنو موسى مساحة الدائرة بالتطبيق غير المباشر لطريقة الإنهاء. ويبدو أنهم استعملوا ضمنياً قضية من الكتاب XII من **الأصول**: «إذا كان لدينا دائرتان متحدتا المركز، كيف نرسم في الدائرة الكبرى مُضلعاً تكون أضلاعه متساوية وعددُها زوجي ولا تلامس الدائرة الصغرى؟» وفي هذا السياق برهنوا القضية التالية:

«لنأخذ قطعة من مستقيم ودائرة؛ فإذا كان طول القطعة أصغر من محيط الدائرة، يمكننا عندئذٍ رَسْمَ مضلع مُحاطٍ بهذه الدائرة ويكون مجموع أضلاعه أكبر من طول القُطْعة المعطاة؛ وإذا تجاوز طول القَطْعة محيط الدائرة، إذ ذاك يمكن إحاطة الدائرة بمضلع يكون مجموع أضلاعه أصغر من طول القطعة المعطاة».

---

(٥) انظر: «Banū Mūsā,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970 - 1990), vol. 1, pp. 443-446.

(٦) انظر: Roshdi Rashed: «Al-Kindi's Commentary on Archimedes: The Measurement of the Circle,» *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 3 (1993), pp. 7 - 53, and «Archimède dans les mathématiques arabes,» dans: I. Mueller, ed., *Essays around the Mathematical Sciences of the Greeks* (Apeiron: [n. pb.], 1991).

ويبرهن بنو موسى بعدئذٍ أن مساحة الدائرة تعادل $S = r.(c/2)$ (r هو الشعاع وc محيط الدائرة). لكنهم في هذا البرهان، لم يقارِنوا بين S وS'، ($S' > S$) ومن ثم بين S وS'' ($S'' < S$)، لكنهم افترضوا أن $S = r.(c/2)$ وقارنوا بين c وc' ($c' > c$) وبين c وc'' ($c'' < c$)، مكتفين، بالتالي، بالمقارنة بين أطوال.

وفي هذا السياق قدم بنو موسى شرحاً لطريقة أرخميدس في الحساب المقرب لـ π، واستخلصوا العمومية في طريقة هذا الحساب. فقد برهنوا أن هذه الطريقة تعود إلى إنشاء متتاليتين: $(a_n)_{n\geq1}$ و $(b_n)_{n\geq1}$ حيث $a_n < b_n$ لكل n، متجاورتين (Adjacentes) وتتقاربان نحو النهاية عينها: $2r\pi$. نقصد هنا متتاليتين يمكن كتابتهما على النحو التالي:

$$a_n = 2nr.sin\frac{\pi}{n} \quad , \quad b_n = 2nr.tg\frac{\pi}{n}$$

ولاحظوا أن بإمكان هذه الطريقة أن تؤدي إلى أي درجة مبتغاة من الدقة: «من الممكن أن يوصل بهذا الوجه بعينه إلى أية غاية يراد بها من التدقيق في هذا العمل»[٧]. وحددوا، بطريقة مماثلة لتلك التي طُبقت في حال مساحة الدائرة، المساحة الجانبية للكرة. هنا أيضاً استندوا، بطريقة غير مباشرة إلى قضية من الكتاب المقالة XII من **أصول إقليدس**، تفيد أنه إذا كان لدينا كُرَتان متحدتا المركز، يمكننا في الكرة الكبرى إنشاءُ مجسم يُولِدُه دورانُ مضلع منتظم حول قطرٍ من الكرة، يمرُ برأسين من المضلع، بحيث لا تلامس أوجه هذا المجسم الكرة الصغرى. وهنا أيضاً تختلف طريقتهم عن طريقة أرخميدس، ولو أن الأفكار الأساسية هي عينُها. وقد برهنوا بهذه الطريقة أن المساحة الجانبية للكرة تعادل أربعة أضعاف مساحة الدائرة الكبرى في الكرة، أي $4\pi r^2$. أخيراً يحدد بنو موسى حجم الكرة، «كضرب نصف قطرها بثلث مساحتها الجانبية أي $(4/3)\pi r^3$». ولنذكر أخيراً أن بني موسى، نسبوا لأنفسهم الدراسات التي تخص هذا الجزء من المقالة كما الدراسات المتعلقة بتثليث الزاوية $1/M$ وهو موضوع تجدر الإشارة إليه؛ أما الحساب المقرب لِ π فلقد اعتبروه اقتباساً عن أرخميدس واعتبروا أنهم مدينون لمنلاوس بعملية تحديد قطعتين مستقيمتين بين قطعتين أخريين معطاتين بحيث تتوالى القطعات الأربع في تناسب.

وتابع معاصرو بني موسى وخلفاؤهم، بنشاط جادٍ، البحث في هذا الحقل. فلم يكتفِ الماهاني بشرح كتاب أرخميدس **الكرة والأسطوانة**، بل تصدى لتحديد قطعة القطع المكافئ. ولم يصل إلينا نص الماهاني هذا.

وكان لثابت بن قرة (ت ٩٠١م) وهو مساعد لبني موسى، إسهام كثيف في هذا الفصل. فكتب على التوالي ثلاث مقالات: كُرِسَتْ واحدة لمساحة قطعة من القطع المكافئ، والثانية لحجم المجسم المكافئ الدوراني، والثالثة لقطوع الأسطوانة ومساحتها الجانبية.

في المقالة الأولى، ولتحديد مساحة قطعة من القطع المكافئ، بدأ ثابت بن قرة، وهو

---

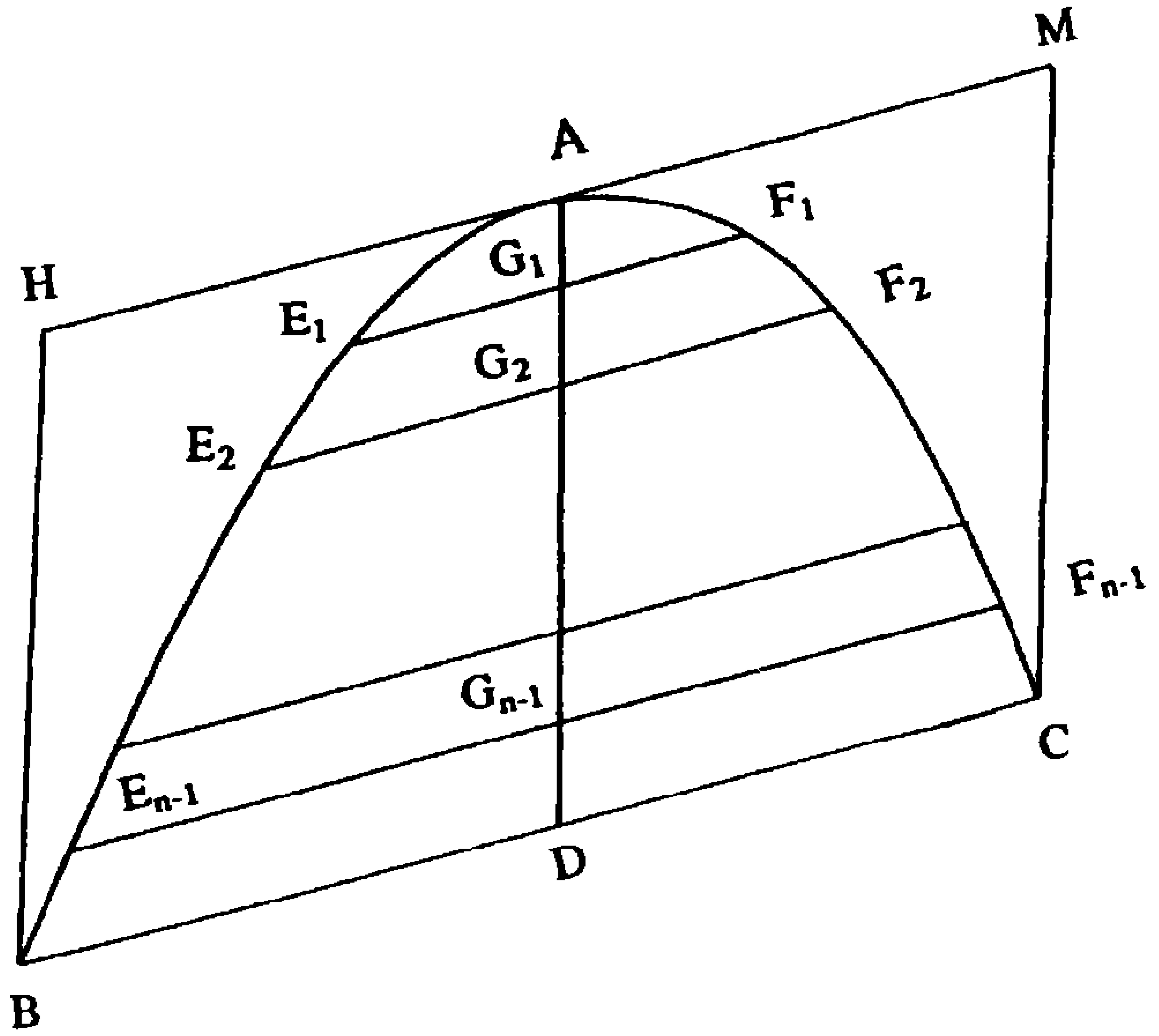
(٧) انظر: المصدر نفسه.

على غير علم بدراسة أرخميدس عن هذا الموضوع، ببرهنة إحدى وعشرين مقدمة، منها خمس عشرة حسابية. ويدل فحص هذه التمهيديات على معرفة ثابت بن قرة الأكيدة والدقيقة لمفهوم الحد الأعلى لمجموعة أعداد حقيقية مربعة، ولوحدانية هذا الحد. فقد استعمل ثابت بن قرة، لتمييز الحدِ الأعلى، الخاصية التالية:

لتكن ABC قِطعة من قطع مكافئ، وAD قطرها المقابل لـ BC (الشكل رقم (١٣ - ١)). يمكننا أن نقابلَ كل عدد مُعطى ε، $(\varepsilon > 0)$ بتجزئة A، G_1، G_2، . . . ، G_{n-1}، D للقطر AD، تكون معها:

(مساحة BAC) − (مساحة المضلع $BE_{n-1}...E_2E_1AF_1F_2...F_{n-1}C$) $> \varepsilon$.

أي، بتعبير آخر، تكون المساحة BAC الحد الأعلى لمساحات هذه المضلعات.



الشكل رقم (١٣ - ١)

ويبرهن ثابت بن قرة بطريقة شديدة الدقة أن $\frac{2}{3}$ مساحة $BHMC$ هي الحد الأعلى لمساحات المضلعات المذكورة سابقاً. فيتوصل أخيراً إلى مبرهنته التي تنص على أن القطع المكافئ لانهائي، إنما مساحة أيٍ من أجزائه تعادل ثلثي متوازي الأضلاع الذي له قاعدة الجزء وارتفاعه عينهما[٨]. ونعرض تصميم برهانه في ما يلي: لتكن S' مساحة الجزء من

(٨) انظر: ثابت بن قرة، **في مساحة قطع المخروط المكافئ** (مخطوطة، القاهرة، المكتبة الوطنية، رياضة ٤٠)، الورقة ١٨٠ ظ.

القطع المكافئ P، و S مساحة متوازي الأضلاع ذي القاعدة والارتفاع عينهما.

إذا كانت $S' \neq \frac{2}{3}S$، إذ ذاك يكون لدينا حالتان:

أ - $S' > \frac{2}{3}S$

فنأخذ ε، $(\varepsilon > 0)$، بحيث:

(١) $$S' - \frac{2}{3}S = \varepsilon$$

وبناء على تمهيدية بُرْهِنَت سابقاً، يوجد عدد طبيعي N، يُقابل هذا الـ ε، بحيث يوجد لكل عدد n (حيث $n > N$)، P_n مساحته S_n يكون معه:

(٢) $$S' - S_n < \varepsilon$$

فنستنتج من (١) و(٢):

$$\left(\frac{2}{3}S + \varepsilon\right) - S_n < \varepsilon \ ,$$

من هنا يكون:

$$\frac{2}{3}S < S_n.$$

ولكن، بناءً على مقدمة أخرى، كان لدينا:

$$\frac{2}{3}S > S_n,$$

فمن هنا يكون التناقض، فتكون العلاقة $S' > \frac{2}{3}S$ مستحيلة.

ب - $S' < \frac{2}{3}S$

ليكن $\varepsilon > 0$ بحيث يكون:

(٣) $$\frac{2}{3}S - S' = \varepsilon$$

وحَسب تمهيدية مُبَرْهنةٍ سابقاً، يوجد لهذا العدد ε، عدد صحيح N، بحيث يكون لكل n، (حيث $n > N$)، قطعة P_n من القطع المكافئ مساحتها S'_n بحيث يكون:

(٤) $$\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$$

فمن (٣) و(٤) نحصل على:

$$(S' + \varepsilon) - S_n < \varepsilon \ ,$$

من هنا يكون:

$$S' < S_n \ .$$

ولكن P_n محاط بـP، فيكون بالتالي $S_n < S'$، ومن هنا يكون التناقض.

ارتكزت طريقة الإنهاء التي طبقها هنا ابن قرة، كما يمكننا رؤية ذلك، على خواص الحد الأعلى وخاصة على وحدانيته. فلقد أراد ابن قرة أن يُبرهن أن $S' = \frac{2}{3}S$، استناداً إلى:

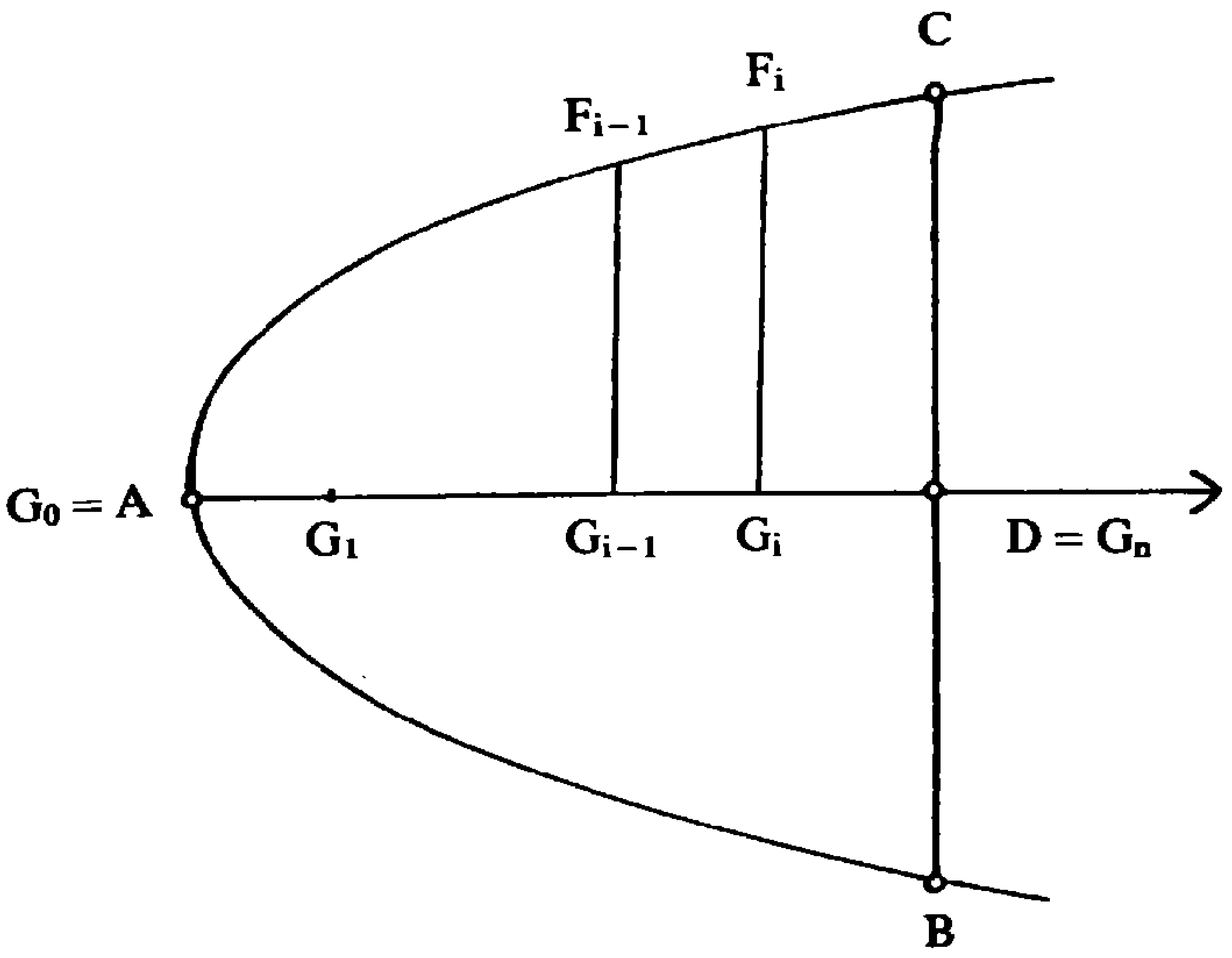
(أ) $S' =$ الحد الأعلى لـ $(S_n)_{n\geq 1}$.

(ب) $\frac{2}{3}S =$ الحد الأعلى لـ $(S_n)_{n\geq 1}$.

في الواقع، نَسْتَبين في طريقة ابن قرة، الفكرة الأساسية لِتكامل ريمان (Riemann). ففي الحالة الخاصة التي نعتبر فيها أن قطر القطع المكافئ هو محور هذا القطع، تعود طريقة ابن قرة إلى أخذ تجزئة σ، $\sigma = AG_1G_2....G_{n-1}$ للقطر AD (انظر الشكل رقم (١٣ - ٢))، ومن ثم إلى أخذ المجموع:

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n}(AG_i - AG_{i-1})\frac{G_{i-1}F_{i-1} + G_iF_i}{2} \text{ ,}$$

وإلى برهان أن لكل ε $(\varepsilon > 0)$، يوجد σ بحيث يكون الفرق بين مساحة ACD وS_σ أصغر من ε. وأخيراً، وبتعبير آخر، إلى تبيان أن S_σ يتقارب نحو قيمة هذه المساحة تبعاً للمصفاة التي تحددها التجزئة σ لِ AD.



الشكل رقم (١٣ - ٢)

إن ما سبق يمكن نقله إلى لغة التحليل الرياضي كما يلي: ليكن x_i الإحداثي السيني

لـ G_i ولتكن $y = f(x)$ معادلة ألقطع المكافئ. من الممكن عندئذٍ كتابة S_σ على الشكل:

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \;;$$

وبما أن:

$$f(x_{i-1}) \leq \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \leq f(x_i)$$

و f متواصلة، نستنتج أن $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$

هي قيمة تبلغُها f عند النقطة ξ_i من الفسحة $[x_{i-1}, x_i]$. عندها، يمكن لـ S_σ أنْ تُكْتَب على الشكل:

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \;\; ; \;\; x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i;$$

والذي ليس سوى المجموع المُسْتخدم في تعريف تكامل ريمان (Riemann) للدالة f. لنذكر أخيراً أن تربيعَ ابن قرة، مع إعطاء تعريف القطع المكافئ، مكافئ لحساب التكامل $\int_0^a \sqrt{px}\, dx$. إليكم ما كتب المؤرخ المعاصر، أدولف ب. يوشكيفيتش (A. P. Youschkevitch)، عن طريقة ثابت بن قرة: «بفضل هذا الأسلوب، أحيا ابن قرة طريقةً طواها النسيان، وهي طريقة احتساب المجاميع التكاملية. فضلاً عن ذلك، احتسب ابنُ قرة، فعلاً، بواسطة هذا الأسلوب، وللمرة الأولى التكامل $\int_0^a x^n dx$ عند إعطاء قيمة كسرية للأس n، أي $\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\, dx$. وخلال قيامه بهذا المسعى، عَمدَ كذلك، وللمرة الأولى، إلى بتقسيم فسحة التكامل إلى أجزاء غير متعادلة. نذكر هنا أن فيرما (Fermat) عَمَدَ في أواسط القرن السابع عشر للميلاد، إلى تربيع المنحنيات $y = x^{m/n}$، (مع $m/n \neq 1$)، بأسلوب مشابه، يقضي بتقسيم المحور السيني إلى قطعات تشكِل متسلسلة هندسية[٩].

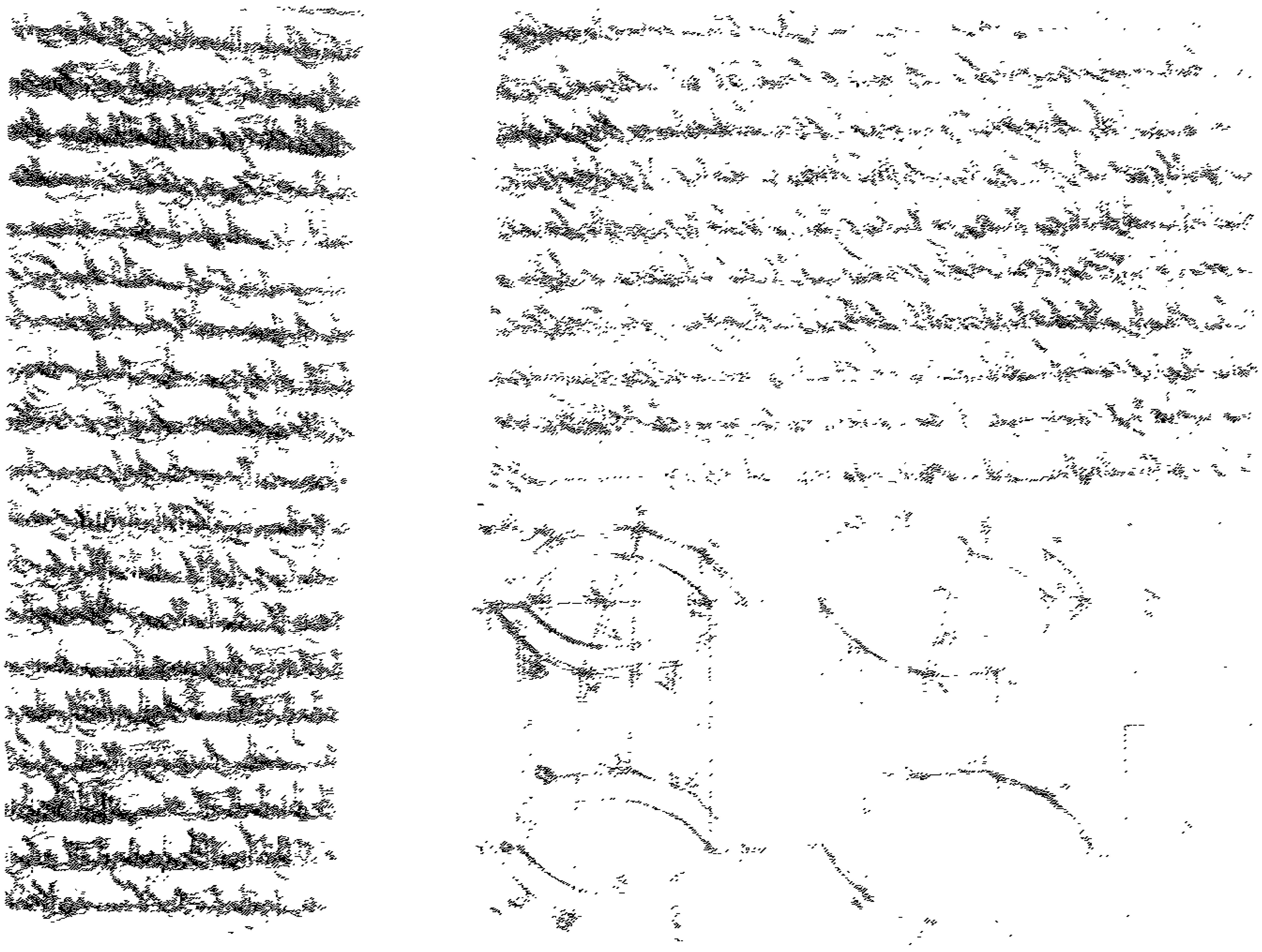
لم يتوقف إسهام ابن قرة في هذا الفصل عند هذا الحد. فقد عمد إلى تحديد حجم المجسم المكافئ الدوراني (Paraboloïde de révolution). وهنا أيضاً، تبدأ الدراسة بعددٍ كبير من التمهيديات (خمس وثلاثون). استعان ابن قرة، لتحديد هذا الحجم، بجذوع مخروطات متجاورة، تحدِدُ قاعداتها تقسيماً لقطر القطع المكافئ - الذي يولِد المجسم المكافئ الدوراني - وتتناسب فسحات هذا التقسيم مع أعداد شفعية متتالية تبدأ بالواحد، وتكون ارتفاعاته متساوية.

ويعتمد ثابت بن قرة أخيراً، في رسالة حول **قطوع الأسطوانة ومساحاتها**، دراسة مختلف أنواع القطوع المستوية لأسطوانة قائمة ولأسطوانة مائلة، ويحدِد لاحقاً مساحة

---

(٩) انظر: Adolf P. Youschkevitch, «Note sur les déterminations infinitésimales chez Thābit Ibn Qurra,» *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 17, no. 66 (1964).

الإهليلج ومساحة القطعات الإهليلجية، ويبحث في المقاطع العظمى والصغرى للأسطوانة وفي محاور هذه المقاطع، ويحدد أخيراً مساحة جزءٍ من المساحة التي يحدها مقطعان مستويان.



الصورة رقم (١٣ ـ ١)
ثابت بن قرة، كتاب في قطوع الاسطوانة وبسيطها
(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٤٨٣٢).

طور ثابت بن قرة الحساب اللامتناهي في الصغر تطويراً كبيراً. ففي هذا الكتاب يبرهن على أن مساحة القطع الناقص ـ إذا كان نصفا سهميه مساويين لـ a وَ b ـ مساويةً لمساحة دائرة شعاعها $\sqrt{ab}$. ويحدد أيضاً مساحة أي قطعة من قطع ناقص، وذلك باستخدام منهج الاستنفاذ وبواسطة مفهوم كشف عنه ثابت بن قرة: «التحويل الأفيني»، فضلاً عن «التحويلات الأفينية المتكافئة» لمعرفة مساحة السطح المحصور بين قطعتين مسطحتين من اسطوانة دائرية مائلة. وهذه النتيجة مكافئة لرد تكامل لقطع ناقص إلى تكامل آخر. كل هذا يسمح لنا برؤية مدى ما وصل إليه هذا الحساب في الرياضيات العربية.

من المستحيل أن نستعيد هنا نتائج هذه المقالة الغنية والعميقة وبراهينها، كالبرهان الذي يدل به ثابت بن قرة على أن «مساحة الإهليلج تعادل مساحة الدائرة التي يعادلُ مربعُ نصف قطرها جداءَ أحد محاور هذا الإهليلج بالآخر» أي πab؛ حيث a وb نصف محاور هذا الإهليلج.

هكذا، تقدم البحثُ في التحديدات متناهية الصغر تقدماً ملحوظاً مع ثابت بن قرة، فعمل خلفاؤه جاهدين على تطوير مكتسباته؛ ومن هؤلاء حفيد ثابت ابن قرة، إبراهيم بن سنان، والقوهي وابن سهل وابن الهيثم.

ولقد لاحظنا سابقاً أن ثابت بن قرة أدخل مجدداً تصور المجاميع التكاملية. فهذا التصور وُجِدَ عند أرخميدس، بالتأكيد، وإنما في مقالاته غير المنقولة إلى العربية. يبقى أنه يمكن الدراسة المعمقة للمقالَيْن المنقولَيْن إلى العربية أن تضعَ على طريق هذا الاكتشاف المجدد، عالِمَ رياضيات بمستوى ابن قرة. وأكثر من ذلك، فالمجاميع التكاملية لثابت أكثر شمولية من مجاميع أرخميدس، حيث إن ثابت اتخذ تقسيمات هي فسْحات ذات أطوال غير متعادلة بالضرورة. أما فيما يخص دراسته للمجسم المكافئ، وحيث عمل دائماً بالمجاميع التكاملية، فهو لم يأخذ على غرار أرخميدس، أسطوانات متعادلة الارتفاع، وإنما أخذ في الاعتبار مخروطاً وجذوع مخروط لها الارتفاع عينه، وقاعدات لها نسبة الأعداد الشفعية المتتالية بدءاً بالواحد.

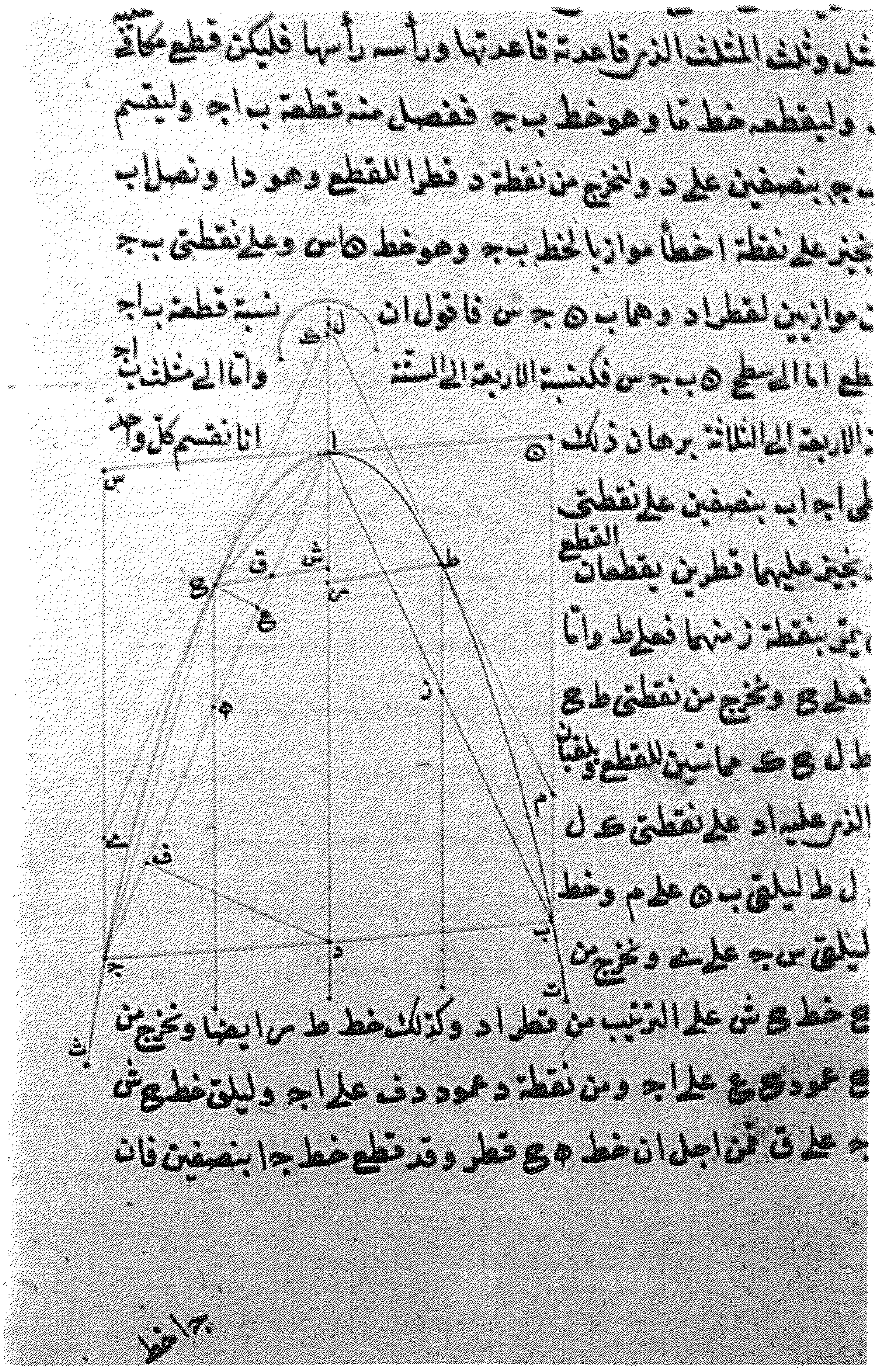
وقد تابع خلفاءُ ابن قرة إسهامَه بنشاط، كما قلنا سابقاً، كحفيده إبراهيم بن سنان. لم يعش عالِم الرياضيات العبقري هذا سوى ثمانية وثلاثين عاماً، ولم يُطِقْ، حسب أقواله الخاصة، «أنْ يكون للماهاني دراسة أكثر تطوراً من دراسة جدّ <ي>، دون أنْ يذهب أحدُنا إلى أبعد مما ذهب هو إليه»[١٠]. فهو يريد، إذاً، إعطاء برهان أقصر، ليس فقط من برهان جده الذي احتاج إلى عشرين تمهيدية، كما رأينا سابقاً، وإنما أيضاً أقصر من برهان الماهاني. وقد بنى إبراهيم بن سنان برهانه على قضية اهتم ببرهنتها سابقاً فحواها أن التحويل التآلفي (الأفيني) لا يُبدِل تناسب المساحات.

تعود طريقة ابن سنان إلى النظر في المضلع كمجموع $2^n - 1$ مثلثات، والمُحاط بمساحة القطع المكافئ، حيث a_1 هي مساحة المثلث EOE'، وa_2 هي مساحة المضلع $ECOC'E'$، وهلم جرا (الشكل رقم (١٣ ـ ٣)). يبرهن ابن سنان أنه، إذا كان a_n وa'_n مضلعين مُحاطَيْن كلٌ بدوره بالمساحتين a و a' من القطع المكافئ، يكون:

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{a_1}{a'_1} \qquad (n = 1, 2, ...) .$$

---

(١٠) ترجم بتصرف. (المترجم).



الصورة رقم (١٣ ـ ٢)

ابراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة الحراني، **في مساحة قطع المخروط المكافئ**
(القاهرة، مخطوطة المكتبة الوطنية، رياضة ٤٠).

احتاج ثابت بن قرة، في برهان نظريته وفي تحديد مساحة قطع المخروط المكافئ، إلى عشرين مقدمة. ولهذا أراد حفيده ابراهيم بن سنان تعديل المنهج، ومن ثم فقد استعان بمفهوم «التحويل الأفيني» الذي سمح له بحل هذه المسألة بعد ثلاث قضايا فقط. وهذا يشهد لنا كيف كان البحث الرياضي في القرن التاسع والقرن العاشر يتحرى في نفس الوقت اكتشاف الجديد ودقة البرهان وأناقته.

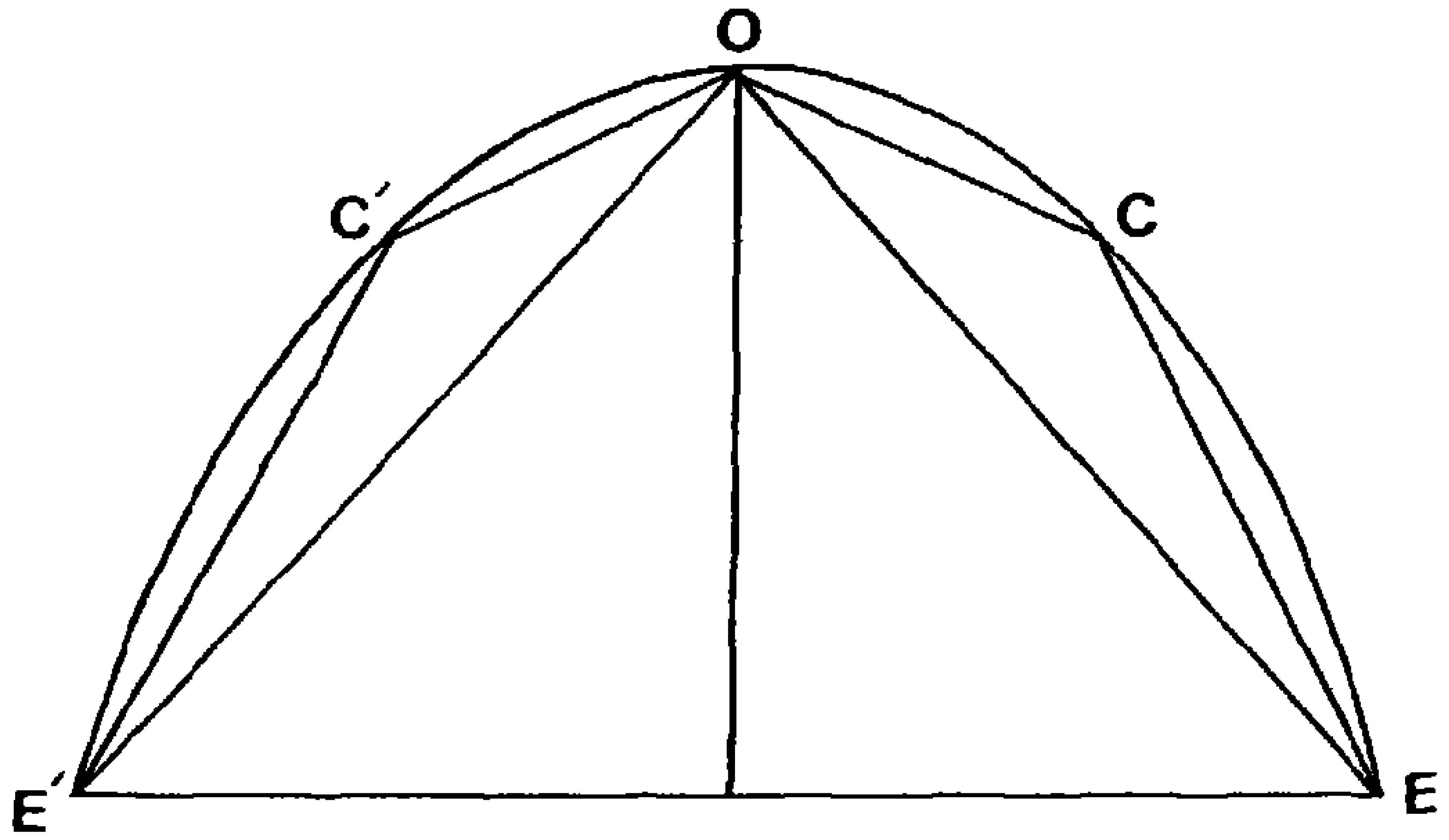
فهو يبرهن في الواقع عبارة مكافئة لـ:

$$\frac{a}{a'} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \frac{a_1}{a'_1} ,$$

ومنها يستنتج:

$$\frac{1}{2}.\frac{a-a_1}{a} = \frac{1}{2}.\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{1}{8} ,$$

ويحصل أخيراً على: $a = \frac{4}{3}a_1$.



الشكل رقم (١٣ ـ ٣)

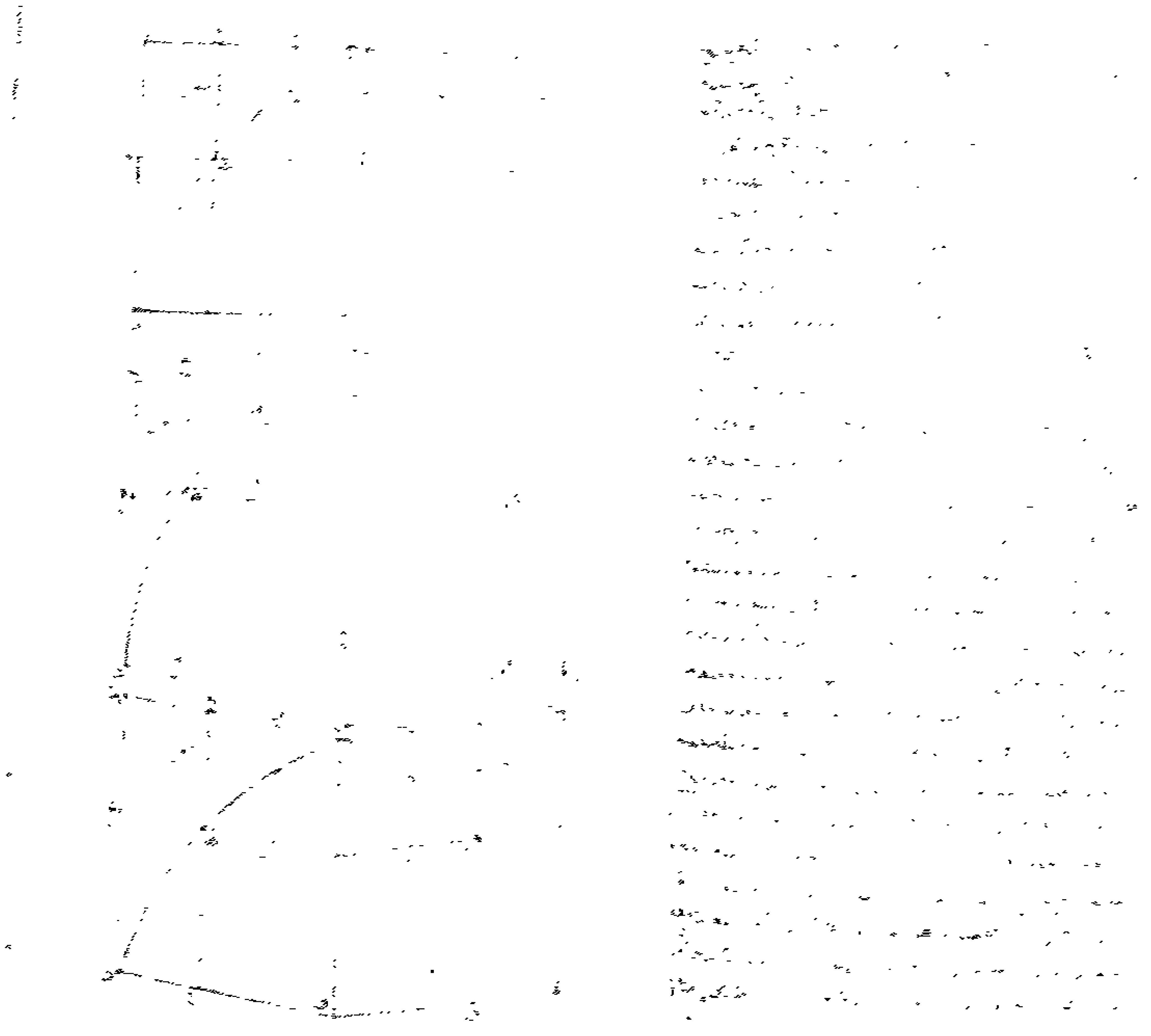
نلاحظ أن إدخالَ التحويل التآلفي هو الذي سمح باختصار عدد التمهيديات الضرورية إلى اثنتين.

في القرن العاشر للميلاد، استعاد عالِمُ الرياضيات، العلاء بن سهل(١١)، تربيع القطع المكافئ، لكن رسالته مع الأسف لا تزال مفقودة. وفيما يعود إلى معاصره القوهي، فإنه، عند إعادة درسه لتحديد حجم المجسم المكافئ الدوراني، يكتشف مجدداً طريقة أرخميدس. فعند دراسة المجسم المكافئ الدوراني أخذ أرخميدس بعين الاعتبار أسطوانات لها الارتفاع عينه، بينما لجأ ثابت بن قرة، كما رأينا ذلك سابقاً، إلى جذوع مخروطٍ متجاورة تحدِد قاعداتها تقسيماً لقطر القطع المكافئ الذي يولد المجسم ـ وتكون فسحاتها تناسبية مع الأعداد الشفعية المتتالية بدءاً بواحد، وتكون ارتفاعاتها متساوية. ولكي يتوصل القوهي(١٢)، كما يُعلِن، إلى اختصار عدد التمهيديات التي برهنها ثابت بن قرة من خمسَ

(١١) انظر: Rashed, «Archimède dans les mathématiques arabes».

(١٢) انظر: Rashed, *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*.

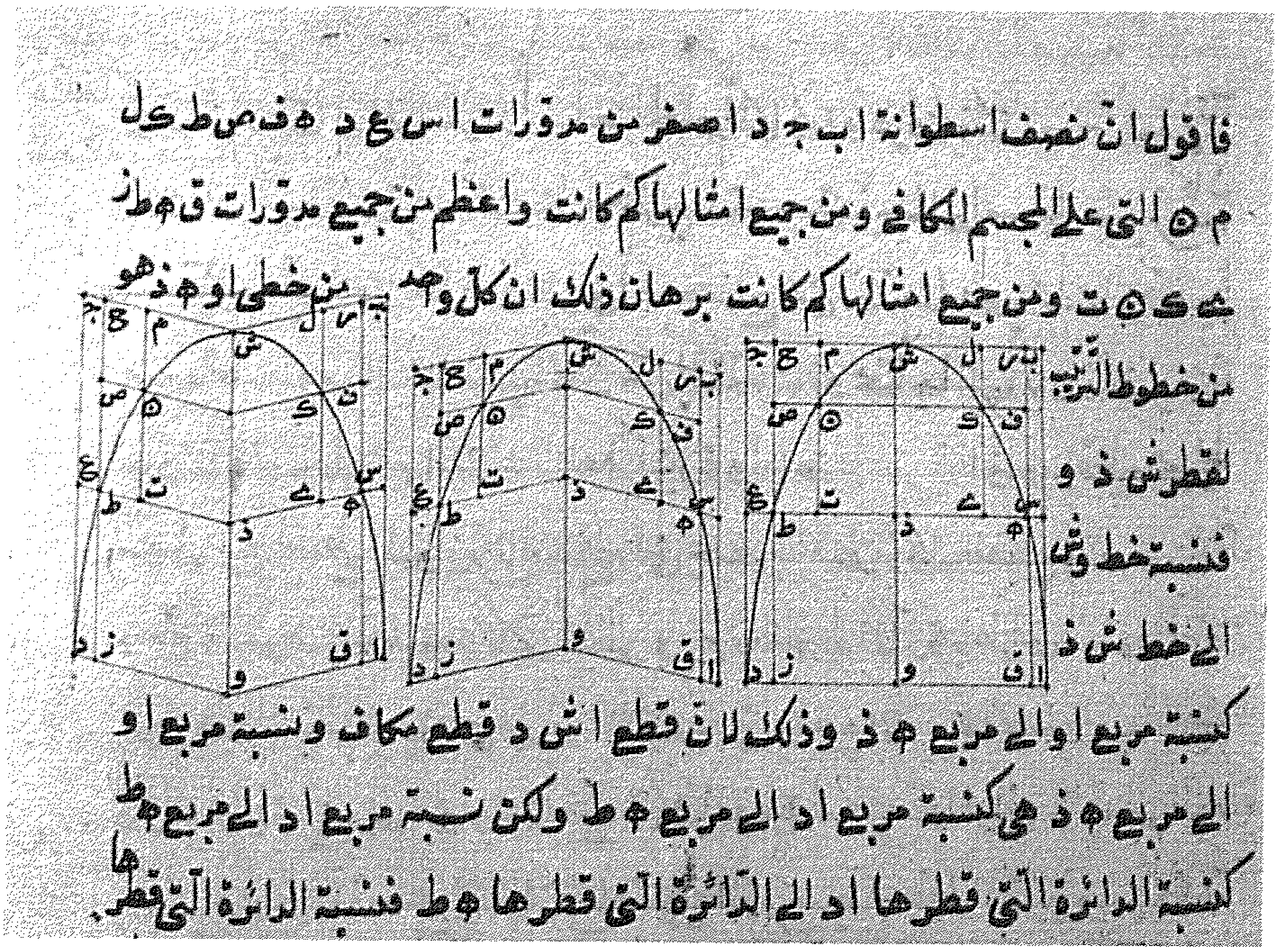
وثلاثين إلى اثنتين، استعاد، بشكل مستقل، المجاميع التكاملية كما ورَدَت عند أرخميدس. وتختلف طريقته عن طريقة أرخميدس فقط فيما تبقى من بعض النقاط التفصيلية، بالأخص عندما تَوجبَ البرهان على إمكانية تصغير الفرق بين الأسطوانات المُحاطة والأسطوانات المُحيطة، قدر الابتغاء.



الصورة رقم (١٣ - ٣)
أبو سهل ويحيى بن رستم القوهي، **في استخراج مساحة المجسم المكافئ**
(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٤٨٣٢).

لم يتوقف ثابت بن قرة عند قياس القطع المكافئ، بل طبق مناهج حساب اللامتناهيات في الصغر التي طبقها على أشكال أخرى، وخاصة المجسم المكافئ. ولكن لتحديد حجم المجسم المكافئ، اضطر ثابت بن قرة إلى استخدام خمس وثلاثين مقدمة. ولهذا أخذ القوهي - الذي عاش في النصف الثاني من القرن العاشر - في الكشف عن مجاميع تكاملية مختلفة عن تلك التي استعملها ثابت لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول سهمه. ولم يحتج القوهي في بحثه هذا إلا لمقدمتين فقط.

وعمم ابن الهيثم من بعد هذه الدراسة، كما أنه حسب حجم المجسم الناتج من دوران القطع المكافئ حول أحد خطوط الترتيب، وهذا أصعب بكثير، فهو مكافئ لحساب $\int_0^a x^4 dx$ الذي نسب إلى كفاليري وكبلر.


فاقول ان نصف اسطوانة ا ب ج د اصغر من مدورات ا س ع د ه ف ص ط ك ل
م ه التي على المجسم المكافي ومن جميع امثالها كم كانت واعظم من جميع مدورات ق ه ط ز
ه ك ه ت ومن جميع امثالها كم كانت برهان ذلك ان كل و ه من خطي او ه ذ وهو
من خطوط الترتيب
لقطر ش ذ و
فنسبة خط و ش
الى خط ش ذ
كنسبة مربع او الى مربع ه ذ وذلك لان قطع ا ش د قطع مكافي ونسبة مربع ا و
الى مربع ه ذ هي كنسبة مربع ا د الى مربع ه ط ولكن نسبة مربع ا د الى مربع ه ط
كنسبة الدائرة التي قطرها ا د الى الدائرة التي قطرها ه ط فنسبة الدائرة التي قطرها

الصورة رقم (١٣ ـ ٤)

ابراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة الحراني، **في مساحة قطع المخروط المكافئ**

(القاهرة، مخطوطة المكتبة الوطنية، رياضة ٤٠).

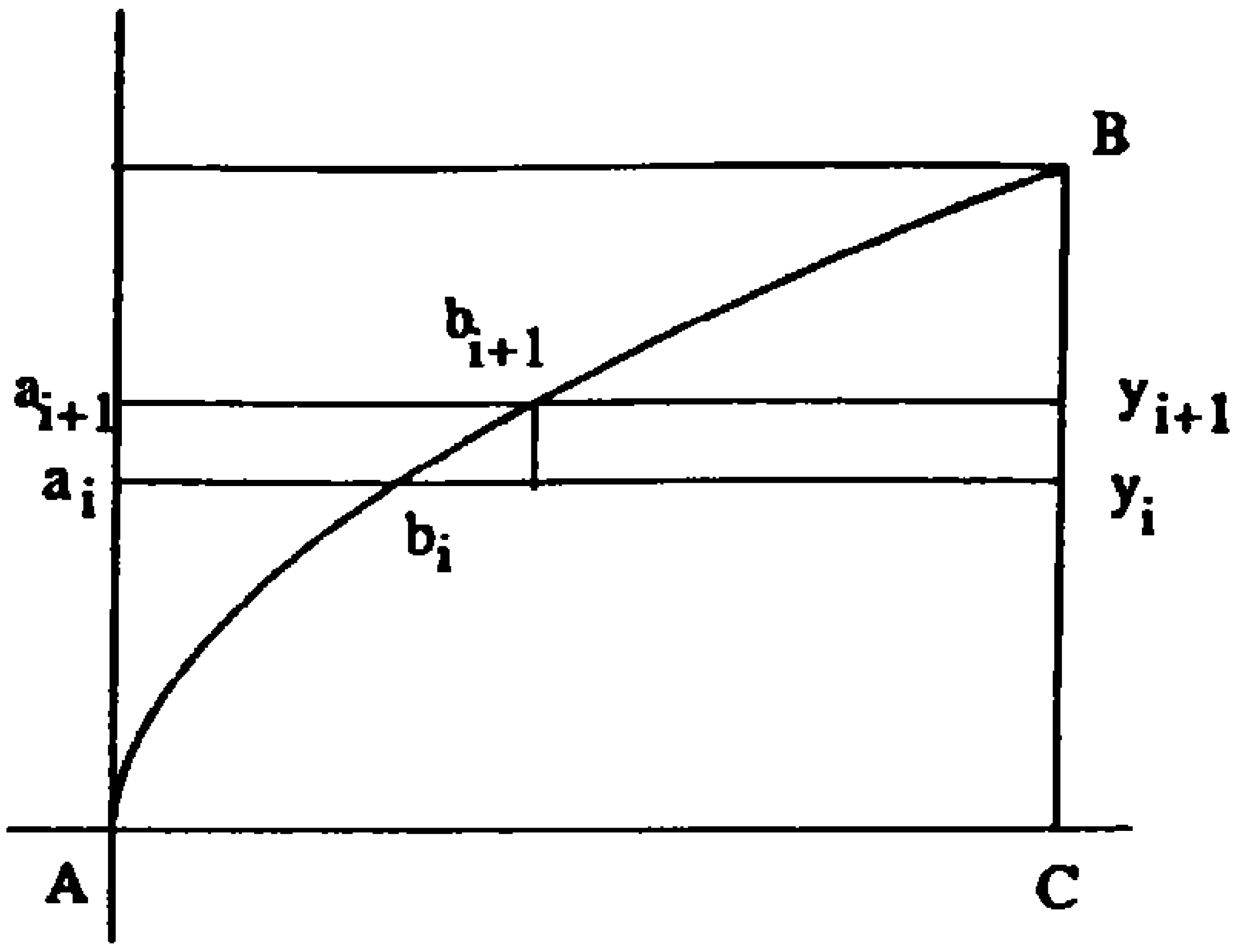
أراد ابراهيم بن سنان حفيد ثابت بن قرة تعديل منهج تحديد مساحة قطع المخروط المكافئ فاستعان بمفهوم «التحويل الأفيني» الذي سمح له بحلها واختصارها من عشرين مقدمة إلى ثلاث.

ويستعيد خليفةُ ابن سهل والقوهي[١٣]، عالِمُ الرياضيات والفيزياء الشهير، ابن الهيثم (ت ١٠٤٠م) برهان حجم المجسم المكافئ الدوراني، وكذلك البرهان المتعلق بالحجم الذي يولِدُه دورانُ قطع مكافئ حول خط الترتيب. ولنلقِ نظرة سريعة على هذا النوع الثاني، الأكثر صعوبة من الأول. يبدأ ابن الهيثم، للتوصل إلى تحديد هذا الحجم، ببرهان بعض التمهيديات الحسابية: مجاميع القوة لِـ n أعداد صحيحة متتالية، لإيجاد متباينة مزدوجة هي أساسية لدراسته. ويحصل بهذه المناسبة على نتائج تُعتَبَر حدثاً بارزاً في تاريخ علم الحساب،

(١٣) المصدر نفسه، و Roshdi Rashed, «Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde,» *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 5 (1981), pp. 191-262.

وخاصة منها المتعلقة بمجموع أية قوة صحيحة لأول n أعداد صحيحة متتالية:

$$\sum_{k=1}^{n} k^i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots ;$$



الشكل رقم (١٣ - ٤)

ويبرهن فيما بعد المتباينة التالية:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n}\left[(n+1)^2 - k^2\right]^2 \le \frac{8}{15}(n+1)(n+1)^4 \le \sum_{k=0}^{n}\left[(n+1)^2 - k^2\right]^2 .$$

ولنأخذ الآن المجسم المكافئ المولّد من دوران القطعة ABC من القطع المكافئ ذي المعادلة $x = ky^2$ حول خط الترتيب BC. ولنأخذ التقسيم $\sigma_n = (y_i)_{0 \le i \le 2^m}$، مع $2^m = n$ للفسحة $[0,b]$ حيث الخطوة h تساوي:

$$h = \frac{b}{2^m} = \frac{b}{n} .$$

ولتكن M_i النقاط من القطع المكافئ ذي الإحداثيات الصادية y_i والسينية x_i بالترتيب. لنضع:

$$r_i = c - x_i \quad ; \quad (0 \le i \le 2^m = n)$$

فيأتي:

$$r_i = k(b^2 - y_i^2) = kh^2(n^2 - i^2)$$

ويكون لدينا:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)^2$$

و

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)^2 ;$$

ولكننا نحصل، حسب المتباينة (1)، على:

$$I_n \leq \frac{8}{15}V \leq C_n ,$$

حيث، $V = \pi k^2 b^4 . b$ هو حجم الأسطوانة المحيطة.

وفي لغة مختلفة عن لغة ابن الهيثم يمكننا أن نعبر عن ذلك كما يلي: على اعتبار أن الدالة $g(y) = ky^2$ متواصلة على $[0, b]$، يصبح حساب ابن الهيثم مكافئاً لما يلي:

حجم المجسم المكافىء $v(p) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)^2$

من هنا $v(p) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi k^2 (b^4 - 2b^2 y_i^2 + y_i^4) h$

ومن هنا $v(p) = \pi \int_0^b k^2 (b^4 - 2b^2 y^2 + y^4) dy$

من هنا أخيراً $v(p) = \frac{8}{15} \pi k^2 b^5 = \frac{8}{15} V$

حيث V هو حجم الأسطوانة المحيطة.

لم يقف ابن الهيثم عند هذا الحد: فالتَفَتَ مجدداً نحو المجسمات الصغيرة المحيطة والمحاطة المستعملة للمقاربة، بهدف دراسة مسلكها عند الازدياد اللانهائي لنقاط التقسيم. ونجدُ أنفسَنا هذه المرة أمام أفكار واضحة حول اللامتناهي في الصِغَر؛ وهذه الأفكار دالية بشكل ما، حيث إنها تدور صراحة حول مسألة السلوك المقارب لكائنات رياضية نبحثُ في تحديد تغيراتها.

ويطبق ابن الهيثم الطريقة عينها في تحديد حجم الكرة. وهنا أيضاً، نذكر إعطاءه صيغة حسابية الاتجاه لطريقة «الاستنفاد» (Exhaustion). ففي الواقع يبدو في بحثه دورُ الحساب أكثر صراحة وأهمية مما في أعمال أسلافه. لكن لننظر الآن إلى طريقته من وجهة نظر الحساب التكاملي، لاستخلاص الأفكار المؤسِسة لها.

أخذ ابن الهيثم كما رأينا، لتحديد الأحجام الدورانية حول محور معطى، مقاطعَ أسطوانية مُحاطة ومُحيطة، يكون محورها هو نفسه محور دوران المجسمات المدروسة. وهذا ما يتيح تقريبات بالنقصان وبالزيادة للحجم المقصود احتسابه بمجاميع تكاملية - مجاميع داربو (Darboux) - عائدة للدالة التي تقابل المنحنى المولِّد للمجسم الدوراني المدروس. فمِن أجل احتساب حجم الكرة، مثلاً، ينظر في المجاميع:

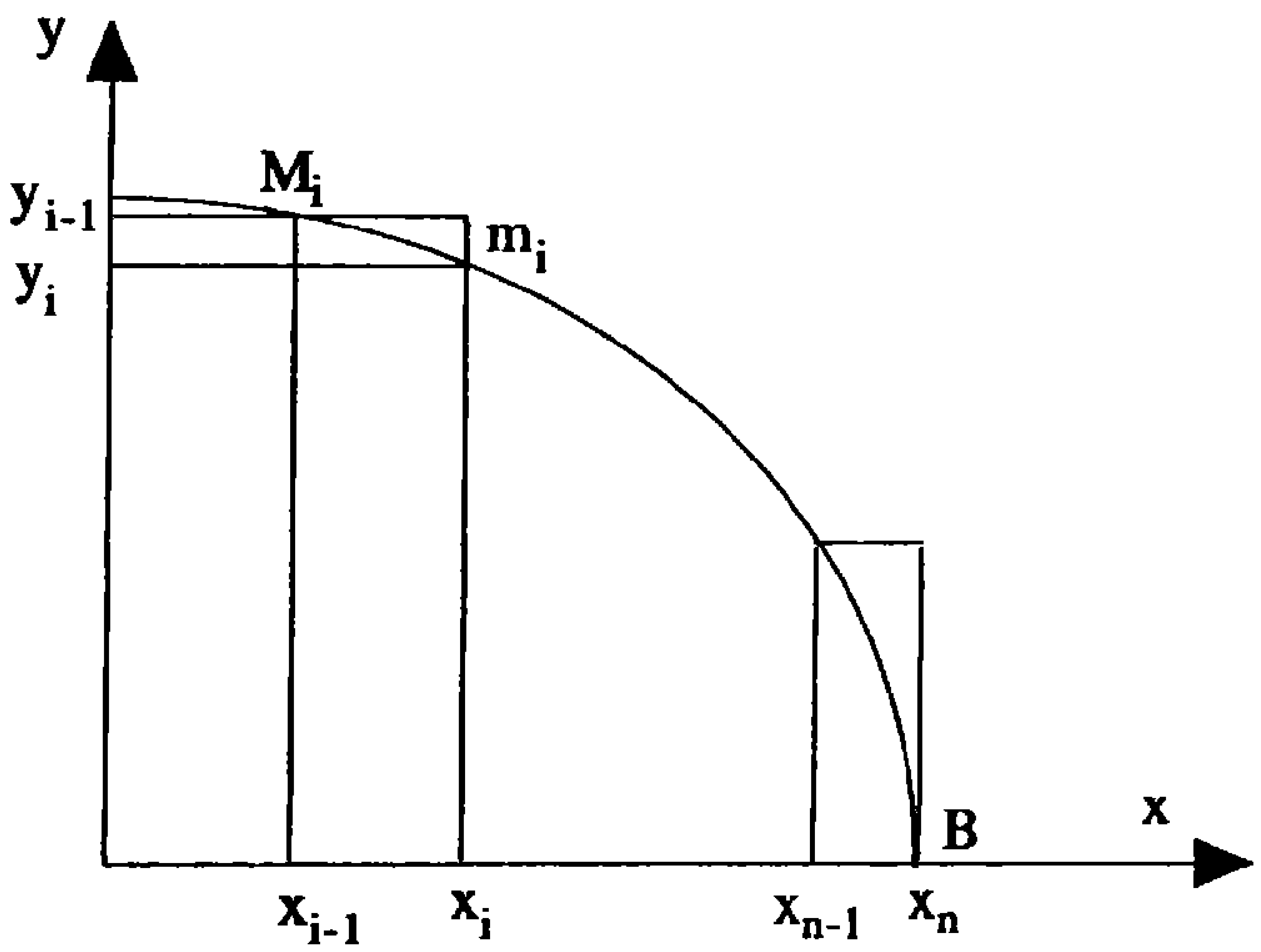
$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} \pi y_i^2 (x_i - x_{i-1}) = D(f, \sigma_n, m_i)$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_{i-1}^2 (x_i - x_{i-1}) = D(f, \sigma_n, M_i)$$

لنلاحظ أن الدالة f رتيبة، بحيث تكون m_i وM_i قيمتَي f عند طرفَي الفسحة ذات المرتبة i من التقسيم؛ وf هي الدالة المحددة كما يلي:

$$f(x) = \pi(R^2 - x^2) = \pi y^2;$$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = y_i \quad ; \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = y_{i-1}$$



الشكل رقم (١٣ ـ ٥)

من جهة أخرى، يستعمل ابن الهيثم فيما بعد المتباينتَيْن:

$$I_n < v < C_n ,$$

ويبرهن أنه، لكل $\varepsilon > 0$، يوجد N بحيث يكون لكل $N \le n$.

$$v - I_n < \varepsilon \quad , \quad C_n - v < \varepsilon$$

مما يثبت أن I_n تتقارب إلى v وكذلك بالنسبة إلى C_n؛ أي أنه لدينا فعلاً:

$$v = \int_0^R f(x)dx.$$

وبتعابير أخرى، يتكافأ حساب ابن الهيثم مع حساب تكامل بسيط لـ «كوشي ـ ريمان» (Cauchy-Riemann).

ولكن، يتوجب على هذا التكافؤ الرياضي ألا يخفي التساؤل التالي: لماذا، بعد تحديده هذه الأحجام بواسطة هذا التكامل، لم يقم ابن الهيثم أبداً بالرسم الواضح للخطوط الكبرى لطريقة عامة، في سبيل تحديد أحجام أو مساحات أخرى؟ بالتأكيد لا يمكننا الاكتفاء، للإجابة عن هذا التساؤل بشكل مُرْضٍ، بإثارة موضوع احتياجات ابن الهيثم. فصحيح أنه لم تكنْ هناك حاجة تفرض، في مؤلفه الرياضي، والبصري، والفلكي، احتساب حجم المجسم المكافئ ولا حتى حجم المجسم الزائدي القطع الدوراني مثلاً. إذاً، علينا أنْ نعزو غياب رسم كهذا إلى الطريقة عينها.

يمكننا فعلاً أنْ نذكر أن ابن الهيثم - كما أسلافه فيما يتعلق بالمساحات - قد لجأ دائماً إلى مجسم آخر معروف الحجم، يستطيع مقارنته مع المجسم الذي يدرسه. وهذه المعرفة المُسْبَقة لمجسم المقارنة ليست البتة وليدة ملاحظة ظرفية أو وسيلة تجريبية: لقد أتاحت لابن الهيثم، كما لأسلافه، حساباً فعلياً - مباشراً وصحيحاً - لنهايات مجاميع داربو (Darboux) المقابلة. لكن مجسمات المقارنة هذه قد لا توجد بالضرورة في الحالة العامة، مما يجعل الأدوات الرياضية التي ارتكز إليها ابن الهيثم غير كافية للحساب الفعلي لمجاميع داربُو. إذاً هناك عائق داخلي يطبع طريقة ابن الهيثم، غير أن الحذَر واجب في المبالغة في تأثير هذا النقص الذي سيعوض عنه إدخال أكثر كثافة لِعلم الحساب. فإذا كان استخدام الحجم «المرجِع» يدلُ فعلاً على التقليدَ الأرخميدسي، فالانعطاف الحسابي، الآخذ في التنامي في التقليد العربي، يدل على أن المقصود لم يعدْ بالتمام الإرث الأرخميدسي. فقد توقفت الهندسة عن قيادة خطوات ابن الهيثم وتسلم علم الحساب زمام القيادة، ووُضعت التمهيديات ضمن تصور حسابي للأشكال.

في هذه الدراسة، نستطيع ملاحظة تطور أساليب هذا الفصل الرياضي وتقنياته في الرياضيات العربية. فلقد رأينا أن ابن الهيثم، في أبحاثه عن المجسم المكافئ، قد حصل مثلاً على نتائج ينسبها المؤرخون لكبلر (Képler) وكفاليري (Cavalieri). غير أن هذا الفصل من الرياضيات العربية يتوقف هنا، وربما لعدم توفر رمزية فعالة في حيازة رياضيي ذلك العصر.

تربيع الهلاليات

يشكِل التربيع الصحيح للهلاليات أي للمساحات التي يحدها قوسا دائرة واحدة من أقدم المسائل لتحديد مساحات السطوح المنحنية. وتعود هذه المسألة، حسب أقوال الشهود المتأخرين - ومنهم سمپليسيوس (Simplicius)، الذي شرح أرسطو في القرن السادس للميلاد - إلى أبقراط الشيي (Hippocrate de Chios)، أي إلى خمسة قرون قبل عصرنا.

وينقل سمبليسيوس[١٤] في شرحه لـ «فيزياء» أرسطو مقطعاً طويلاً لأوديم (Eudème)، تلميذ أرسطو؛ يحتوي هذا المقطع على نتائج أبقراط وطرقه. وهذا المقطع، الذي يثير على كل حال عدة مسائل فقهية وتاريخية، لن نتطرق إليها هنا، هو المصدر الوحيد المعروف لتاريخ هذه المسألة في الرياضيات الإغريقية، وهو يدل أيضاً على الإطار الذي طُرحت فيه مسألة تربيع بعض الأهلّة، في سياق تربيع الدائرة.

وبعد سمبليسيوس بما يقارب الخمسة قرون، يعود ابن الهيثم تكراراً إلى الموضوع عينه، أولاً فيما يتعلق بتربيع الدائرة ومن ثم من أجل هذا التربيع بالذات فيما بعد. ويسترجع ابن الهيثم هذا الموضوع في الحقيقة في ثلاثة أبحاث تمت دراسة واحد منها إلى الآن، وهو بحثه في تربيع الدائرة. ويكرس بحثاً مُقْتَضَباً لتربيع الأهلّة. فيما بعد، يعالجُ الموضوع من جديد، ليحصل على نتائج نُسِبتْ إلى علماء رياضيات من القرنين السابع عشر والثامن عشر للميلاد. ولقد قاد الجهل بأعمال ابن الهيثم، وخصوصاً بهذه المقالة الأخيرة، المؤرخين، عن حسن نية، إلى إصدار أحكام مغلوطة عن إسهامه في هذا البحث.

كل شيء يدل على وجود نقطة انطلاق ابن الهيثم في النص المنسوب لأبقراط الشيي. ففي رسالته الأولى يبدأ بكتابة ما يلي: «إني لما نظرت أطال الله بقاءه سيدنا الأستاذ «أبقراط» (المترجم) وأدام كفايته وحرس نعمته في الشكل الهلالي المساوي للمثلث والذي ذكره المتقدمون في بديع خاصته وعجيب تركيبه حداني ذلك على أن فكرت في خواص الهلاليات وما يعرض فيها من غريب المعاني فألفت قولاً مختصراً في الأشكال الهلالية بطرق جزئية لاستعجال صاحب السؤال لي ولا قناعة بالجزئي من القول»[١٥]. إضافة إلى ذلك، أدرجت نتائج أبقراط الشيي في أعمال ابن الهيثم. فهل علم بها بفضل «شرح» سمپليسيوس لـ«فيزياء» أرسطو الذي قد يكون تُرْجِمَ إلى العربية؟ لا نملك الوثائق التي تتيح لنا الإجابة الواضحة على هذا السؤال[١٦]. ومهما يكن الأمر، لنلقِ نظرة على رسالتَي ابن الهيثم في هذا المجال.

---

(١٤) Sir Thomas Little Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. (Oxford: Clarendon Press, 1921), reprinted (Oxford: Clarendon Press, 1960-1965), vol. 1, pp. 183-200.

قام بكر (O. Becker) عام ١٩٦٤ بنقل نص سمبليسيوس (Simplicius) إلى الألمانية: Oskar Becker, *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung* (Freiburg: K. Alber, 1964).

انظر أيضاً: Oskar Becker, «Zur Textgestaltung des Eudemischen Berichts über die Quadratur der Möndchen durch Hippokrates von Chios,» *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Bd. 3 (1936), pp. 400-419.

(١٥) المقصود رسالة لابن الهيثم «في الأشكال الهلالية». تم تحقيق هذا النص ونقله إلى الفرنسية وشرحه؛ وسيصدر في: Rashed, *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*. ولاحقاً، في رسالة ثانية، يذكر ابن الهيثم نصه الأول كما يلي: «فألّفتُ قولاً مختصراً في الأشكال الهلالية بطرق جزئية...».

(١٦) يتكلم ابن الهيثم في رسالته الأولى عن «القدماء»؛ لكنه لا ينقل (بالمعنى الدقيق) أي صورة =

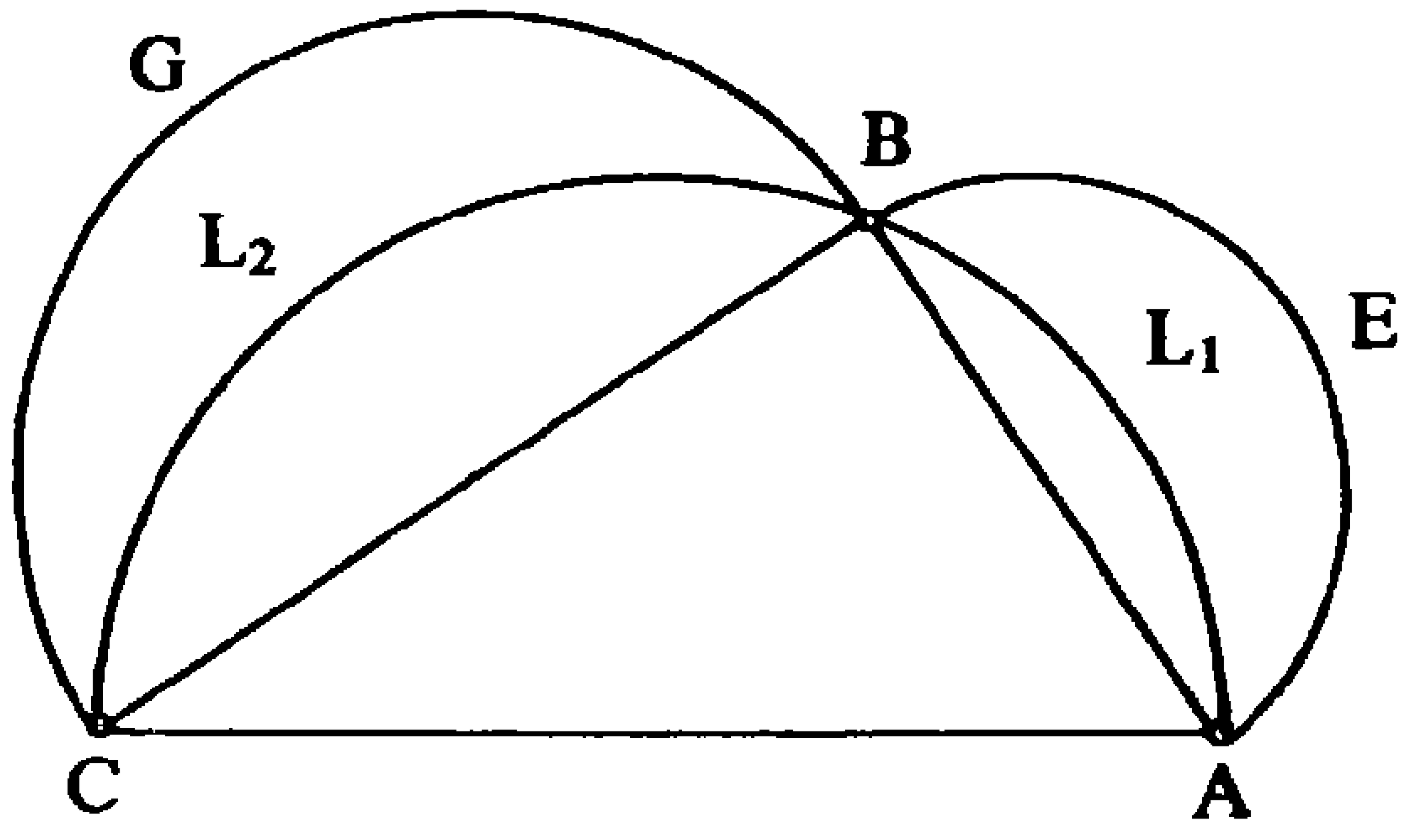
تعود طريقة ابن الهيثم، في الرسالتين، إلى دراسة هلاليات تحدُها أقواس ما، بحثاً عن تعادل في المساحات. فهو يُدخِل دوائر تتكافأ عامة مع قطاعات من الدائرة المعطاة في المسألة، ويُعبر عن هذه القطاعات بكسور من هذه الدائرة. ويبرر وجود الدوائر التي يُدخِلها، والتي عليه إضافتها إلى مساحات مُضلعة أو طرحها منها، للحصول على مساحة مكافئة لمساحة الهلال، أو لمجموع هلالَيْن.

في الرسالة الأولى المُقتضبة، ينطلقُ في القضايا الثلاث ١ و ٢ و٥ من نصف دائرة ABC، لدراسة الهلالَيْن L_1 و L_2 اللذين يحدهما القوسان AB أو BC ونصف الدائرة. ويفترض أن القوس AB يعادل سدسَ محيط الدائرة، ويثبت النتائج التالية:

$$L_1 + \frac{1}{24}C(ABC) = \frac{1}{2}tr(ABC)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}tr(ABC) + \frac{1}{24}C(ABC)$$

$$L_2 + \frac{1}{2}tr(ABC) = L_3 + \frac{1}{8}C(ABC)$$



الشكل رقم (١٣ - ٦)

حيث L_3 هلال مشابه لـ L_1 ويكون معه $L_3 = 2L_1$؛ تشير $C(ABC)$ و $tr(ABC)$ بالترتيب إلى مساحتي الدائرة ABC والمثلث ABC.

= من صور أبقراط. غير أن نتيجته الأولى تبقى تعميماً بسيطاً لإحدى قضايا أبقراط التي ذكرها سمبليسيوس حسب نصٍ لألِكسندر مما يعقد المسألة بنوع خاص. نقصد هنا القضية ٣ من الرسالة الأولى والتي تظهر كذلك في مقالته حول تربيع الدائرة، وفي رسالته الثانية، القضية ٨.

في القضية الثالثة من هذه المقالة، يعمم ابن الهيثم ببساطة برهان نتيجة أبقراط الشيي فيأخذ نقطة في أي مكان B، من نصف الدائرة ABC ويبين أن: $L_1 + L_2 = tr(ABC)$؛

وفي القضية الرابعة، يدرس نسبة هلالين متشابهين.

نذكر أن الهلالين L_1 وL_2 الداخلين في هذه القضايا، هما الهلالان المشتركان لأنصاف الدوائر الثلاث ABC و AEB وBGC.

تظهر، إذاً، رسالة ابن الهيثم الأولى هذه وكأنها في الخط الذي يرسمه بحث أبقراط الشيي. وكذلك هي الحال بالنسبة إلى الجزء المتعلق بهلاليات رسالته حول مساحة الدائرة(١٧). نلاحظ أن ابن الهيثم، تماماً كما أبقراط الشيي، يستعمل تناسب مساحة الدائرة مع مربع القطر، ومُبَرْهنة فيثاغورس. في الحالتين، تُدرس الهلالية المرافقة للمثلث القائم ومتساوي الساقين. وعلى الرغم من أن تفكير ابن الهيثم أكثر شمولية بقليل، فإن هذه الشمولية لا تعدل بعمق تشابه طريقته مع طريقة أبقراط الشيي. ولنذكر على سبيل التذكير أن المهم في رسالته عن «تربيع الدائرة» لا يكمن في النتائج حول الهلاليات التي درسها في هذه الرسالة (كما في رسالته الأولى)، بل إنه يكمن في تمييزه الصريح بين وجود مربع مكافئ للدائرة - أي وجود هذه النسبة غير المنطّقة - وبين إمكانية بناء هذا المربع أو هذه النسبة(١٨).

وقد تعدل هذا الوضع بعمق في رسالته الثانية(١٩). فلم يحصل فيها ابن الهيثم على نتائج أكثر شمولية فحسب، لكنه أيضاً بدّل طريقته: فهو يتناول مسألة تربيع الأهلّة من جديد منذ البداية، وينقلها إلى مجال علم المثلثات، ويحاول استنتاج مختلف الحالات على أنها خواص لدالة مثلثية سوف يتم التعرف إليها بمزيد من الدقة فيما بعد، بواسطة أولير (Euler).

منذ بداية هذه الرسالة، يعترف ابن الهيثم صراحةً بأن حساب مساحات الأهلة يستدعي احتساب مجاميع وفوارق قطاعات من دوائر ومثلثات تقتضي مقارنتها، بدورها، مقارنةً لِنِسَب الزوايا ولِنِسَب قطعات مستقيمة. ولهذا السبب بدأ بإثبات أربع تمهيديات

---

(١٧) أو «تربيع الدائرة» (المترجم). انظر: Heinrich Suter, «Die Kreisquadratur des Ibn al-Haitam,» *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-litterarische Abteilung*, Bd. 44 (1899), pp. 33-47.

(١٨) انظر: Roshdi Rashed, «L'Analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham,» dans: Roshdi Rashed, ed., *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique* (Paris: Editions du CNRS, 1991), pp. 131-162.

(١٩) هذه الرسالة التي تحمل العنوان «رسالة في الأشكال الهلالية»، وُضعت وتُرجمت في: Rashed, *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*.

عائدة للمثلث ABC، قائم الزاوية B في التمهيدية الأولى، ومنفرجُها في الثلاث الأخرى؛ وهي تمهيديات تدل على أن النقطة الأساسية في الدراسة باتت تعود إلى دراسة الدالة:

$$f(x) = \frac{sin^2 x}{x} \quad 0 < x \leq \pi \qquad (١)$$

يمكننا كتابة هذه التمهيديات مجدداً على الشكل التالي:

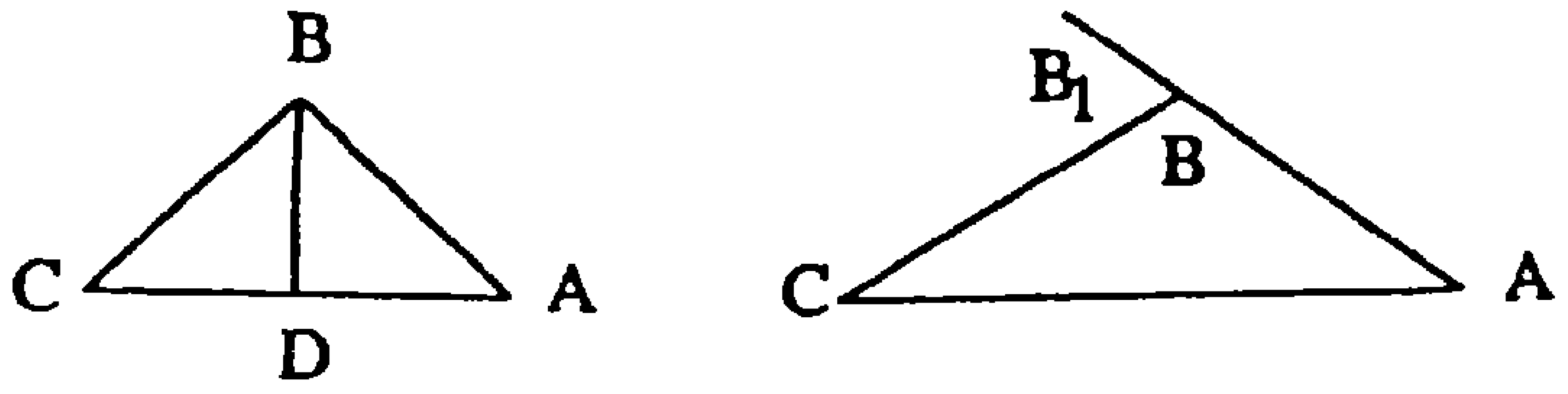
١ - إذا كان $0 < C < \frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$، يكون $\frac{sin^2 C}{C} < \frac{2}{\pi} < \frac{sin^2 A}{A}$.

وبديهي أنه في حال $C = A = \frac{\pi}{4}$، يكون $\frac{sin^2 C}{C} = \frac{sin^2 A}{A} = \frac{2}{\pi}$.

٢ - ليكن $\pi - B = B_1$،

فإذا كان $C < \frac{\pi}{4} < B_1 < \frac{\pi}{2}$، يكون $\frac{sin^2 C}{C} < \frac{sin^2 B_1}{B_1}$.

٣ - إذا كان $A \leq \frac{\pi}{4}$، يكون $\frac{sin^2 A}{A} < \frac{sin^2 B_1}{B_1}$.



٤ - هنا يريد ابن الهيثم دراسة الحالة $\frac{\pi}{4} < A$؛ ولكن الدراسة غير تامة. فيبرهن أنه إذا أُعطِيَت A، يمكننا إيجاد B_0 يكون معها:

$$B_1 \geq B_0 \Longrightarrow \frac{sin^2 A}{A} > \frac{sin^2 B_1}{B_1}$$

ويبدو أن هذه الدراسة الناقصة قد حجبت عن ابن الهيثم رؤية المساواة:

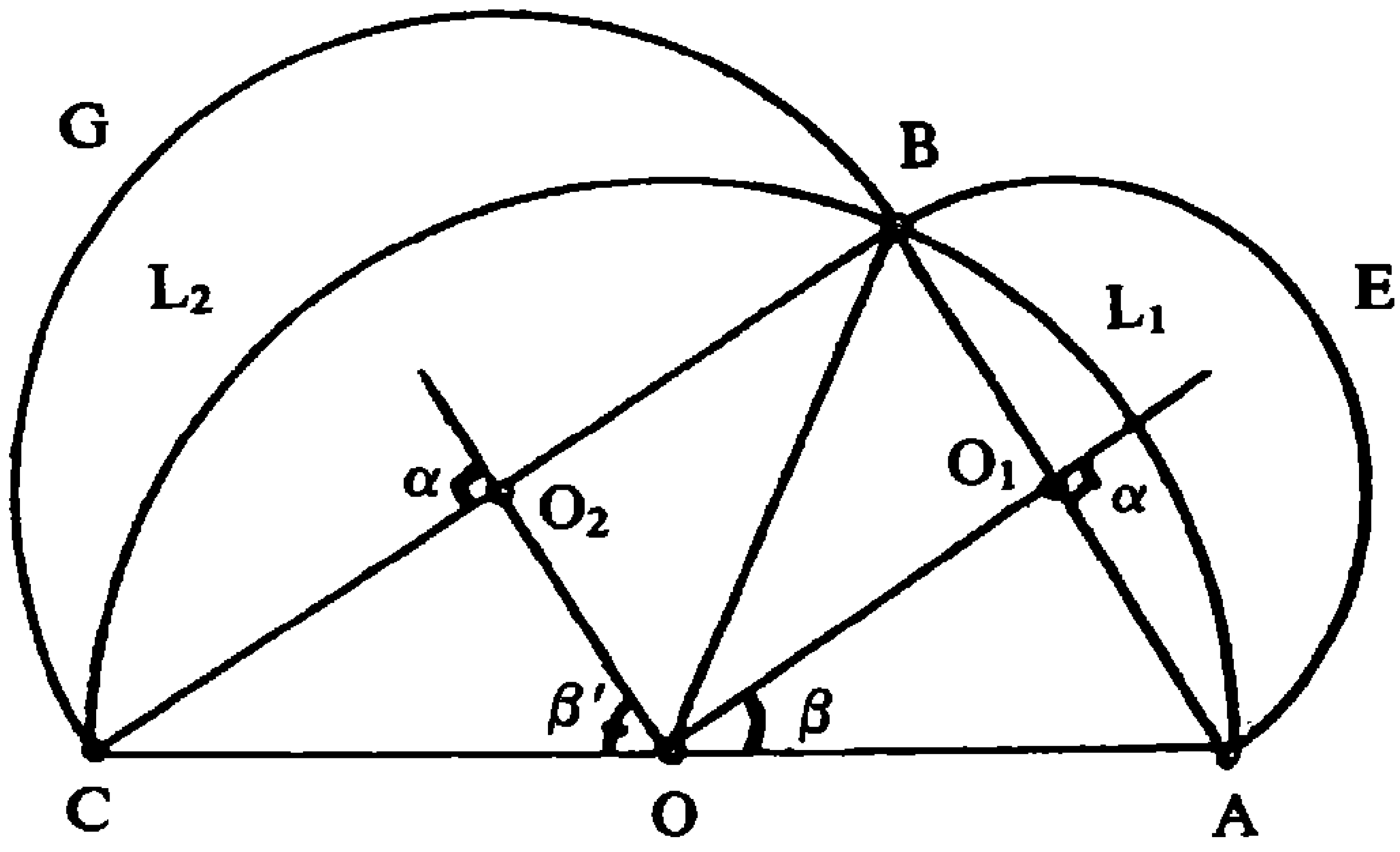
$$\frac{sin^2 A}{A} = \frac{sin^2 B_1}{B_1}$$

نلاحظ أن هذه التمهيديات، بربطها مسألة تربيع الهلاليات بعلم المثلثات، قد بدلت موقع هذه المسألة وأتاحت توحيد الحالات الاستثنائية. لكن النقص الذي أشرنا إليه، في هذه الطريقة، قد حجب إمكانية وجود أهلّة قابلة للتربيع. ولنلقِ الآن نظرة سريعة على قضايا رسالة ابن الهيثم الثانية.

في ثماني قضايا - ٨ إلى ١٦ - تتشارك التمهيديات كل اثنتين بعضهما مع بعض، وفي كل الأحوال كانت الثلاث أقواس ABC و AEB وBCG متشابهة. لتكن O و O_1 وO_2 مراكز الدوائر المقابلة؛ ولِنَضَعْ:

$$\angle AOC = \angle AO_1B = \angle BO_2C = 2\alpha \ , \ \angle AOB = 2\beta \ , \ \angle BOC = 2\beta'$$

مع $\beta \leq \beta'$ و$\beta + \beta' = \alpha$.



الشكل رقم (١٣ - ٧)

يتحدد الهلال L_1 بـ (α, β) والهلال L_2 بـ (α, β'). نأخذ بالاعتبار، إذاً، الحالة $\alpha = \frac{\pi}{2}$؛ فيكون لدينا إذ ذاك القضايا التالية:

١ - مهما تكن (β, β') مع $\beta + \beta' = \frac{\pi}{2}$، يكون لدينا $L_1 + L_2 = tr(ABC)$؛

٢ - في الحالة $\beta = \beta' = \frac{\pi}{4}$، يكون لدينا $L_1 + L_2 = tr(ABC)$؛ وفي هذه الحالة يكون لدينا $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1}$، والهلال الوحيد القابل للتربيع والذي قام بدراسته ابن الهيثم.

في الحالة $\beta < \beta'$ لدينا $L_1 = \frac{1}{2} tr(ABC) - C(N)$،

و

$$L_2 = \frac{1}{2} tr(ABC) + C(N)$$

تتعلق الدائرة (N) بالنسبة $\frac{\alpha}{\beta}$.

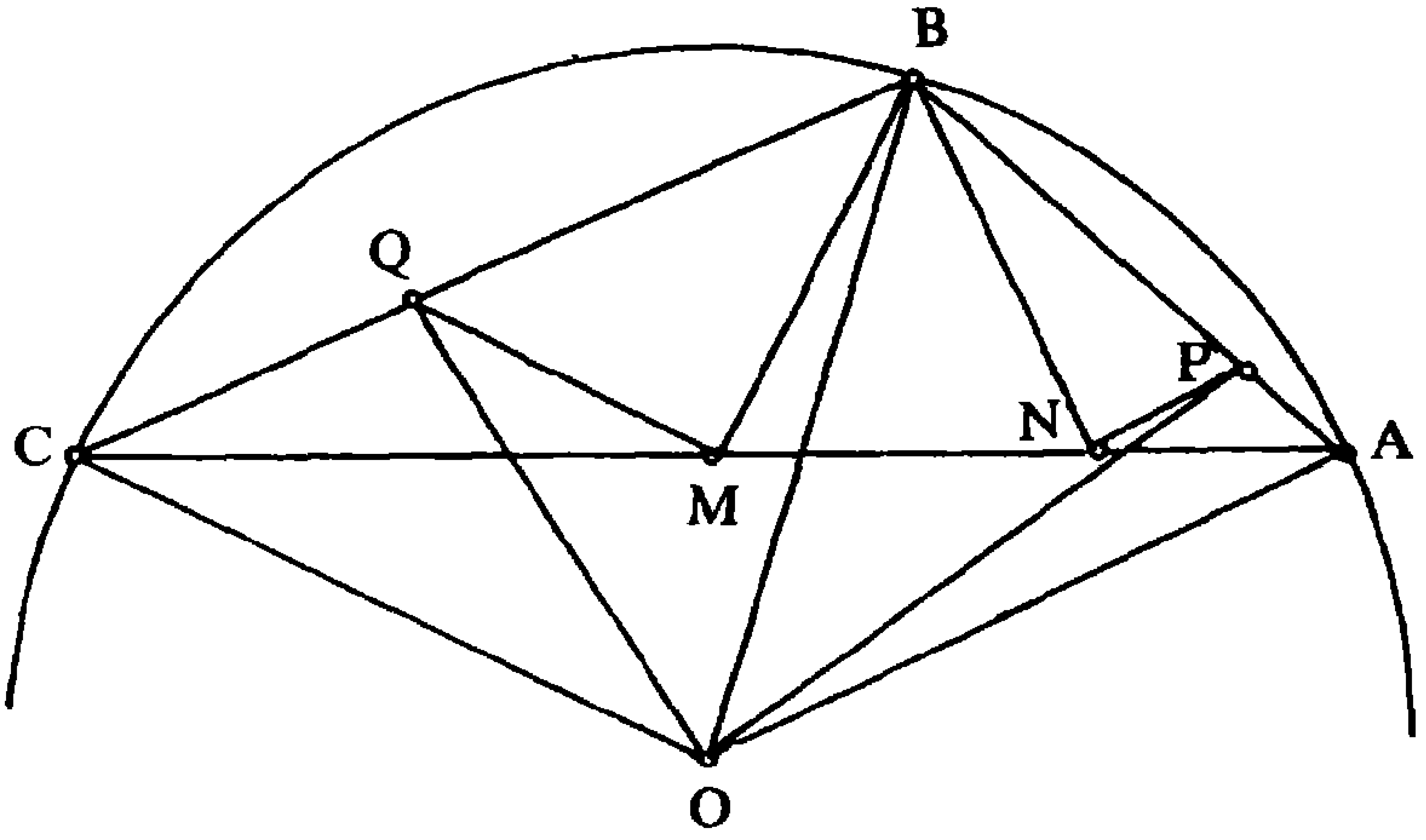
٣ - في الحالة $\beta = \frac{\pi}{6}$، يكون لدينا $L_1 = \frac{1}{2} tr(ABC) - \frac{1}{24} C(ABC)$. في هذه الحالة تكون $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{1}$.

في الحالة $B' = \frac{\pi}{3}$، يكون لدينا $L_2 = \frac{1}{2}tr(ABC) + \frac{1}{24}C(ABC)$؛ في هذه الحالة تكون $\frac{\alpha}{\beta'} = \frac{3}{2}$.

إلى هنا، لم يستعمل ابن الهيثم في براهينه إلا التمهيدية ١؛ ولجأ، لإقامة القضية التالية، إلى التمهيديات الثلاث الأُخريات. وكانت فكرته القائدة هي في الانطلاق من النقطتين M وN على الدائرة AC، بحيث يكون:

$$\angle ABC = \angle BMC = \angle ANC = \pi - \alpha$$

وفي تحديد نقطة P على AB ونقطة Q على BC بحيث يكون $NP//OA$ و $MQ//OC$؛ فإقامة النتائج ليست ممكنة، فعلاً، انطلاقاً من المثلث ABC كما في القضايا السابقة.



الشكل رقم (١٣ ـ ٨)

وهكذا، لكل ثنائية (β, β') حيث $\beta + \beta' < \frac{\pi}{2}$، حدد ابن الهيثم دائرتين (K) و(Z) بحيث يكون:

$$L_1 + L_2 + (K) = \text{رباعي الأضلاع } (OPBQ)$$

$$L_1 + Z = tr(OPB)$$

ويقوم فيما بعد بفحص الحالات التالية:

ـ إذا كان $\beta = \beta'$، يكون:

$$(Z) = \frac{1}{2}K \;\;,\;\; L_1 = L_2 \;\;,\;\; L_2 + (Z) = tr\ (OQB) = tr\ (OPB)\ ;$$

- إذا كان $\beta' < \frac{\pi}{4}$، يكون $(Z) < (K)$، و$L_2 + (K) - (Z) = tr(OQB)$؛

- إذا كان $\beta' > \frac{\pi}{4}$، يمكن أن نحصل على:

$$(Z) < (K)\text{، و } L_2 + (K) - (Z) = tr(OQB)\text{، و } L_2 < tr(OQB)\text{،}$$

أو على:

$$(Z) = (K)\text{، و} L_2 = tr(OQB)\text{،}$$

أو على:

$$(Z) > (K)\text{، و } L_2 = tr(OQB) + (Z) - (K)\text{، و} L_2 > tr(OQB)\text{.}$$

ويوضح ابن الهيثم هذه النتائج فيما بعد بأمثلة، ثم يبرهن القضايا التالية:

٤ - إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{3}$، و$\beta = \beta' = \frac{\pi}{6}$، و$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1}$، يكون لدينا:

$$L_1 = L_2 = \frac{2}{3}tr(ABC) - \frac{1}{18}C(ABC)$$

٥ - إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{3}$، و $\beta = \frac{\pi}{12}$، و $\beta' = \frac{\pi}{4}$، و$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{1}$، و $\frac{\alpha}{\beta'} = \frac{4}{3}$، في هذه الحالة لا تكون الدائرة الطارئة كسراً من الدائرة (ABC)؛

٦ - إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$، و$\beta = \frac{\pi}{8}$، و$\beta' = \frac{\pi}{8}$، و$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{11}{3}$، و$\frac{\alpha}{\beta'} = \frac{11}{8}$، في هذه الحالة لا تكون الدائرة الطارئة كسراً من الدائرة (ABC).

في القضايا اللاحقة، باستثناء القضية ٢١، يدرس ابن الهيثم الأشكال المركبة من مجاميع أهلّة وقطعات من مثلثات ومن فروقها. ويشير في القضية ٢١ إلى خاصية الهلال الذي ينتمي قوساه إلى دائرتَيْن متعادلتَيْن. تنتج هذه الخاصية عن تحوّل (Translation) يجمع بين دائرتين وهي خاصية درسها ابن الهيثم في رسالته حول **التحليل والتركيب**[٢٠].

في رسالة ابن الهيثم الثانية، تسلك دراسةُ تربيع الأهلّة، إذاً، طريقاً آخر، طريقاً يقود فيما بعد إلى أولير (Euler)، بنقل المسألة نحو علم المثلثات، وبالاعتراف نوعاً ما بتبعيتها تجاه الدالّة (١).

(٢٠) انظر: Roshdi Rashed, «La Philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham: L'Analyse et la synthèse,» *Mélanges de l'institut dominicain d'études orientales*, vol. 29 (1991), pp. 31-230.

مسألة تساوي المحيطات

إن القول بأن للقرص الدائري، من بين النطاقات ذات المحيط المعطى في مستوٍ، المساحةَ الأكبر، وبأن للكرة، من بين المجسمات ذات المساحة الجانبية عينها في الفضاء، الحجمَ الأكبر، يبدو، حسب الشهادات المتأخرة[٢١]، من معارف الماضي. غير أن بحثَ هذه المسألة لذاتها يعود إلى زينودور (Zénodore)، وكذلك إعطاء البرهان، وذلك في رسالته المفقودة حول الأشكال ذات المحيطات المتساوية[٢٢]. لكن، ولأسباب رياضية كما لأسباب تتعلق بعلم الكون، لم تتوقف هذه المسألة عن إثارة اهتمام علماء الرياضيات، والفلك، وحتى الفلاسفة. نورد في هذا المجال، من بين أسماء أخر هيرون الإسكندري (Héron d'Alexandrie)[٢٣]،

---

(٢١) المقصود شهادة سمبليسيوس، انظر: Simplicius of Cilicia, *Simplicii in Aristotelis de Cælo Commentaria*, edited by I. L. Heiberg, Commentaria in Aristotelem Graeca; vol. VII (Berolini: G. Reimer, 1894), VII, 4/2, lines 12-17:

«تمت البرهان، ليس فقط قبل أرسطو الذي استخدم النتيجة < كقضية > مبرهنة، وإنما أيضاً من قبل أرخميدس، وبطريقة أكثر تفصيلاً - πλατύτερον - من قبل زينودور، على أن بين الأشكال متساوية المحيطات، الأكثر اتساعاً بين الأشكال المستوية هي الدائرة، وبين المجسمات هي الكرة». يدل هذا النص كما ذكر شميدت، في: W. Schmidt, «Zur Geschichte der Isoperimetrie,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 2 (1901), pp. 5-8,

على أن القضايا الأساسية قد عُرفت قبل زينودور، وشميدت هو من لفت انتباه مؤرخي العلوم إلى نص سمبليسيوس. دفعت هذه الفكرة ج. موجيني (J. Mogenet) إلى أن ينسب لزينودور الفضل فقط في إظهار «الخطوط العريضة - πλατύτρων - من مسألة تساوي المحيطات، وإلى أن يستدل على تحديده لفترة حياة عالم الرياضيات هذا في القرن الثالث قبل عصرنا. انظر: J. Mogenet, «Les Isopérimètres chez les grecs,» *Scrinium lovaniense, mélanges historiques* (Louvain), 4ème série, vol. 24 (1961), pp. 69-78.

(٢٢) حول تواريخ زينودور لم نتقدم اليوم عن البارحة: بعد أرخميدس وقبل پاپوس. في مؤلفه: Pappus d'Alexandrie, *Commentaires de Pappus et Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, Vatican, Biblioteca Vaticana, Studie testi; 54, 72 (Rome: Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936), pp. 354 et sqq.

يأخذ أ. روم (A. Rome) بعين الاعتبار عدم اليقين هذا، ويحدد زمانه بين القرن الثاني قبل عصرنا والقرن الثالث بعده. لا نسترجع هنا هذا الجدال الذي شارك به كانتور (Cantor) وشميدت (Schmidt) وموجيني (Mogenet) وغيرهم. ومؤخراً، دفعت مختارات خاطئة لديوقليس (Dioclès)، بقيت محفوظة في صيغة عربية، إلى الاعتقاد بإمكانية الحصول على عنصر جديد في هذه المسألة. غير أن شيئاً من هذا القبيل لم يحصل. حول نص زينودور، انظر: Pappus d'Alexandrie, Ibid., livre 2, et Théon d'Alexandrie, *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolémée*, traduction française par N. Halma (Paris: [s. n.], 1821).

(٢٣) انظر: Schmidt, «Zur Geschichte der Isoperimetrie».

وبطلميوس[٢٤]، وبابوس (Pappus)[٢٥]، وثيون الإسكندري (Théon d'Alexandrie)، لكننا نعتبر أن الأكثر أهمية هنا هما بطلميوس وثيون. ففي **المجسطي** ولتعزيز أطروحته حول كروية الكون، وهي أطروحة في غاية الأهمية في علمه الفلكي ونشأة الكون، يذكر بطلميوس النتيجة السابقة على أنها معروفة، ويقول: «بما أن، من بين الأشكال المختلفة ولكن متساوية المحيط، نجد الأكبر هي التي لها أضلاع أكثر، فمن بين الأشكال المستوية، تكون الدائرة هي الأكبر، ومن بين المجسمات، الكرة»[٢٦]. أما ثيون الإسكندري فيوجز كتاب زينودور في تعليقه على الكتاب الأول من **المجسطي**، حيث، وبعد طرح المسألة يقول: «سنبرهن المسألة بطريقة مختصرة، مأخوذة من برهان زينودور في رسالته حول الأشكال المتساوية المحيط»[٢٧]. نشير هنا إلى أنه حتى منذ العقود الأولى للقرن التاسع للميلاد، تم نقل **المجسطي** وكذلك تعليق ثيون الإسكندري إلى العربية.

هنا تكمن مصادر الكِندي، الذي يبدو أنه أول من عالج هذه المسألة بالعربية. وهذا ما يذكره في مؤلفه في **الصناعة العُظمى**، حيث نعاين بوضوح تأثير ثيون[٢٨]. فهكذا، وبعد ذكره يلحظ بأنه شرحها في كتابه عن **الكرويات**: «كما أوضحنا في كتابنا في الأكر»[٢٩]. لكن ابن النديم[٣٠] في القرن العاشر للميلاد، يُعْلِمُنا أيضاً أن الكندي قد كرس لهذا الموضوع رسالة تحت عنوان **الكرة هي أعظم الأشكال المجسمة والدائرة أعظم الأشكال المسطحة**.

لكن كتابات الكندي هذه ما زالت مفقودة، فلا يسعنا بالتالي تأكيد إسهامه. كذلك ليس ممكناً ذكرُ البحث في هذه المسألة في عصره أو عند خلفائه، طالما ينقصنا شرحُ الفارابي

---

(٢٤) انظر: Claudius Ptolemaeus: *La Composition mathématique*, traduction française par N. Halma (Paris: J. Hermann, 1813), pp. 9-10, et Ptolemy, *Ptolemy's Almagest*, translated and annotated by G. J. Toomer (New York: Springer-Verlag, 1984), pp. 9-10.

(٢٥) انظر: Pappus d'Alexandrie, *Commentaires de Pappus et Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, livre 5, pp. 239 et sqq.

(٢٦) انظر: Ptolemaeus, *La Composition mathématique*, p. 10.

لنلحظ أننا نقرأ، في الترجمة العربية للحجاج، في بداية القرن التاسع للميلاد، مخطوطة ليدن (Leiden)، ٦٨٠، الورقتان ٣ظ ـ ٤و، ما معناه: «بما أن الأعظم بين الأشكال المضلعة المحاطة بدوائر متساوية هي التي لها العدد الأكبر من الزوايا، تكون الدائرة هي الأعظم بين الأشكال المستوية والكرة هي الأعظم بين الأشكال المجسمة...».

(٢٧) انظر: Théon d'Alexandrie, *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolémée*, p. 33.

(٢٨) مخطوطة اسطنبول، آيا صوفيا، ٤٨٣٠، الأوراق ٥٣و-٨٠ظ والورقة ٥٩ظ. قارن: أبو يوسف يعقوب بن اسحق الكندي، كتاب في **الصناعة العظمى**، تحقيق ونشر عزمي طه السيد أحمد (قبرص: دار الشباب، ١٩٨٧)، ص ٤١.

(٢٩) كما يقول الكندي: «كما أوضحنا في كتابنا في الأُكَر».

(٣٠) انظر: Muhammad Ibn Ishāq Ibn al-Nadim, *Kitāb al-Fihrist*, mit Anmerkungen =

الفيلسوف وعالم الرياضيات، للكتاب الأول لبطلميوس. وأول دراسة جوهرية لهذه المسألة وصلت إلينا هي دراسة عالم الرياضيات من أواسط القرن العاشر للميلاد وهو الخازن(٣١).

يبدو أن لازمة دراسةِ الخازن وكذلك دراسات خلفائه، كما سنرى، هي علم الكون. يُفتح كتابه هذه تحديداً على قولٍ لبطلميوس أتينا على ذكره، ليتابع بتسع تمهيديات، تدل وحدها على أن الخازن وإن كان على معرفة بنتائج زينودور الموجودة في موجز ثيون، إلا أنه مع ذلك اتبع طريقة برهانية أخرى. فلنسترجع عرض الخازن بإيجاز.

خُصصت التمهيديات الأربع الأُولى للخازن لإثبات أن مساحة المثلث المتساوي الأضلاع أكبر من مساحة أي مثلث متساوي الساقين له المحيط عينه. وينتقل في التمهيدية السادسة إلى متوازيات الأضلاع والمعينات، ويقارن بين مساحاتها ومساحة المربع ذي المحيط نفسه. ويأخذ في التمهيدية السابعة مثلَ الخُماسي، ويبرهن أن مساحة الخُماسي المنتظم أكبر من مساحة خماسي غير منتظم له المحيط عينه.

وعند المقارنة بزينودور، لا بد من ملاحظة الفارق بين الطريقتين. يبدأ زينودور بمقارنة مثلث ما إلى مثلث متساوي الساقين لهما قاعدة مُشتركة والمحيط عينه، للتوصل إلى التمهيدية التالية: «إن مجموع مثلثين متساويي الساقين، متشابهين ولهما قاعدتان مُتباينتان، أكبر من مجموع مثلثين متساويَيْ الساقين، وغير متشابهين، لكن لكل منهما محيط أحد المثلثين المتشابهين».

إن تعبير «تساوي المحيطات» يشير هنا إلى أن مجاميع الأضلاع، باستثناء القاعدات، متساوية. بيد أن تمهيدية زينودور هذه غير صحيحة(٣٢)، ومن المدهش فعلاً ألا يلاحظ أي من بابوس أو ثيون خطأه هذا. فهل هذا الخطأ في أساس اختيار الخازن لطريقته المختلفة؟

ومن ثم يبرهن الخازن أنه: إذا كان لمضلعين منتظمين P_1 وP_2، n_1 و n_2 ضلعاً على التوالي، مع $n_2 > n_1$، ولهما المحيط عينه، إذ ذاك تكون مساحة P_1 أكبر من مساحة P_2.

وإذ ذاك يبرهن الخاصية القصوى للدائرة: إذا كان لدائرة ولمضلع منتظم المحيطُ عينه،

= hrsg. von Gustav Flügel; nach dessen Tode von Johannes Roediger und August Mueller, 2 vols. (Leipzig: F.C.W. Vogel, 1871-1872); traduction anglaise par: Bayard Dodge, ed. and tr., *The Fihrist of al-Nadīm: A Tenth - Century Survey of Muslim Culture*, Columbia Records of Civilization, Sources and Studies; no. 83, 2 vols. (New York: Columbia University Press, 1970), p. 316.

(٣١) انظر: R. Lorch, «Abū Ja'far al Khāzin on Isoperimetry,» *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch - Islamischen Wissenschaften* (1986), pp. 150-229.

(٣٢) من المدهش حقاً ألا يتنبه ثيون (Théon) أو بابوس (Pappus) أو المؤرخون فيما بعد لهذا الخطأ، الذي لم يلحظه سوى كوليدج (Coolidge). انظر: Julian Lowell Coolidge, *A History of* =

إذ ذاك تكون مساحة الدائرة أكبر من مساحة المضلع.

نرى، إذاً، أن طريقة الخازن تنظّم على الشكل التالي: ١ - يبدأ بمقارنة المضلعات المنتظمة ذات المحيط عينه والتي لها عدد مختلف من الأضلاع؛ ٢ - ويقارن فيما بعد مضلعاً منتظماً يحيط بدائرة، لها المحيط ذاته. هذه الطريقة، المشتركة بين الخازن وزينودور ساكنة، بمعنى أن لدينا من جهة مضلعاً مُعطى، ومن الأخرى، دائرة.

لنأتِ الآن إلى الجزء الثاني من مقالة الخازن المكرسة لتساوي المساحات الخارجية للمجسمات. هنا أيضاً، بعد إعلانه عدة تمهيديات عن مساحة الهرم وحجمه، ومساحة المخروط، وجذع المخروط، وحجمهما، ينتهي إلى إثبات ثلاث قضايا أساسية. يمكن كتابة القضية الأولى منها كما يلي:

ليكن $\sum$ مجسماً دورانياً مكوناً من جذوع مخروطات ومخروطات، محاطة بكرة S لها شعاع R؛ ولتكن S' كرة بشعاع R' محاطة بـ $\sum$؛ نبرهن أن:

$$4\pi R^2 < \text{مساحة } \sum < 4\pi R'^2.$$

وفي القضية الثانية، يبرهن أن مساحة الكرة تعادل أربعة أضعاف مساحة دائرتها الكبرى. وفي الثالثة، يحدد حجم الكرة. وللتوصل إلى ذلك، يحدد الخازن مجسماً خاصاً مُحاطاً بالدائرة، ويسلم بوجود كرة مماسة لجميع أوجه المجسم؛ وهذا ليس صحيحاً. على أن النتيجة الحاصلة تبقى صحيحة. وأخيراً يبرهن الخاصية القصوى للكرة بالطريقة التالية:

لنأخذ كرة مركزُها O وشعاعها R؛ ومساحتها S وحجمها V؛ ومتعدِد سطوح له المساحة عينها S، وحجمه V_1، نفترضه محيطاً بكرة أخرى بشعاع R'؛ إذ ذاك يكون لدينا:

$$V_1 = \frac{1}{3} S.R'$$

Geometrical Methods (Oxford: Clarendon Press, 1940), p. 49; reprinted (New York: Dover = Publications, 1963).

لنسترجع هذه التمهيدية، بتعبير آخر. يعود الأمر إلى التفتيش عن النهاية العظمى لـ $ax + by$ عندما يكون:

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} = 1$$

يجب إذن أن تكون $ax' + by' = 0$، من هنا $\frac{x'}{b} = -\frac{y'}{a}$؛ وباشتقاق المعادلة الثانية:

$$\frac{bx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{b^2 + y^2}},$$

وبوضعنا $x = au$ و $y = bv$، يتأتى:

$$\frac{u}{a\sqrt{1 + u^2}} = \frac{v}{b\sqrt{1 + v^2}}$$

في حين يقصد النص $u = v$.

فتقل المساحة S' عن مساحة متعدد السطوح، ويكون $S < S'$ وبالتالي:

$$\frac{1}{3}S.R' < \frac{1}{3}SR \quad \text{و} \quad R' < R$$

أي $V_1 < V$.

لنذكر أن الخازن لم يوضح طبيعة متعدد السطوح؛ لكن برهانه يفترض أن يكون متعدد السطوح هذا محيطاً بكرة، وهذه حالة متعدد السطوح المنتظم، لكن البرهان لا يصح بالنسبة إلى متعدد سطوح أو مجسم بشكل عام. ويمكننا ملاحظة الفارق بين طريقة الخازن في حال المستوي وطريقته في حال الفضاء: فهذه المرة، لا نراه يقارن متعددات سطوح ذات مساحة واحدة وعدد مختلف من الأوجه. وهو بالمقابل، يصل مباشرة إلى نتيجة، باستعماله الصيغة التي تربط حجم الكرة بمساحتها، وهي صيغة يحصل عليها بمقاربة الكرة بمتعددات سطوح غير منتظمة.

وبعد الخازن بحوالى نصف القرن، يستعيد ابن الهيثم، الذي لم ترضه أعمال أسلافه (مع أنه لم يذكرهم بالأسماء)، هذا الموضوع ويكتب رسالة في تساوي المحيطات(٣٣). في مستهل هذه الرسالة يقول: «وقد ذكر أصحاب التعاليم هذا المعنى واستعملوه، إلا أنه لم يقع إلينا برهان لهم على هذا المعنى ولا دليل مقنع مستوفٍ لجميع معانيه». ويربكنا هذا التصريح، على الأقل في الوضع الراهن لمعلوماتنا. فهل كان ابن الهيثم جاهلاً لمقالة الخازن؟ هل وجدها غير كافية؟ وأخيراً، من هم علماء الرياضيات هؤلاء؟ مهما يكن، لقد عزم ابن الهيثم على إعطاء برهان جامع («كلي»).

يدلنا تحليل هذا النص على أن ابن الهيثم، وخلافاً للخازن، كان يبحث عن طريقة ديناميكية (متحركة)، ويدل من جهة أخرى على أن هذه الطريقة، التي بلغت غايتها في حالة نطاقات مستوية قد أخفقت في حال مساحات المجسمات، بسبب العدد المحدود لمتعددات السطوح المتنظمة. لكن هذا الفشل كان مُثيراً. فلئن حال بينه وبين بلوغ هدفه في حال تساوي مساحات المجسمات، إلا أنه أتاح له عرض نظرية أصيلة في الزاوية المجسمة هي الأولى التي تستحق هذا اللقب.

الجزء الأول من هذه الرسالة التي كانت في طليعة البحث الرياضي في عصر ابن الهيثم وكذلك طيلة قرون من بعده، كُرس للأشكال المستوية. يبتّ المؤلف سريعاً في هذه الحالة. وكما الخازن، يبدأ بمقارنة مضلعات منتظمة لها المحيط عينه، وعدد مختلف من

---

(٣٣) عنوانها: «في أن الكرة أوسع الأشكال المجسمة التي إحاطاتها متساوية وأن الدائرة أوسع الأشكال المسطحة التي إحاطاتها متساوية». (المترجم).

انظر: Rashed, *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham,*

حيث نجد نص ابن الهيثم، وترجمته الفرنسية وكذلك نجد تحليله.

الأضلاع، ويبرهن القضيتين:

١ - ليكن P_1 وP_2 مضلعين منتظمين حيث n_1 وn_2، A_1 و A_2، P_1 و P_2، عدد أضلاعهما، ومساحتيهما، ومحيطيهما على التوالي؛

فإذا كان $P_1 = P_2$ و$n_1 < n_2$، إذ ذاك تكون $A_1 < A_2$.

٢ - ليكن P محيط دائرة، وA مساحتها، وP' محيط مضلع منتظم، وA' مساحته؛

إذا كانت $P = P'$، إذ ذاك $A > A'$.

يستعمل ابن الهيثم هنا، خلافاً للخازن ولكل أسلافه المعروفين، القضية الأولى لإثبات الثانية، مُعتبراً الدائرة كنهاية لمتتالية من المضلعات المنتظمة؛ أي أنه تَبع ما ندعوه طريقة ديناميكية. وبالفعل، انطلاقاً من هاتين القضيتَيْن، يبرهن أن للقرص، من ضمن الأشكال المستوية ذات المحيط المعطى، المساحة الأكبر. في سياق هذا البرهان، يفترض وجود النهاية - وهي مساحة القرص - وهو ما تأكد انطلاقاً من «قياس الدائرة» لأرخميدس.

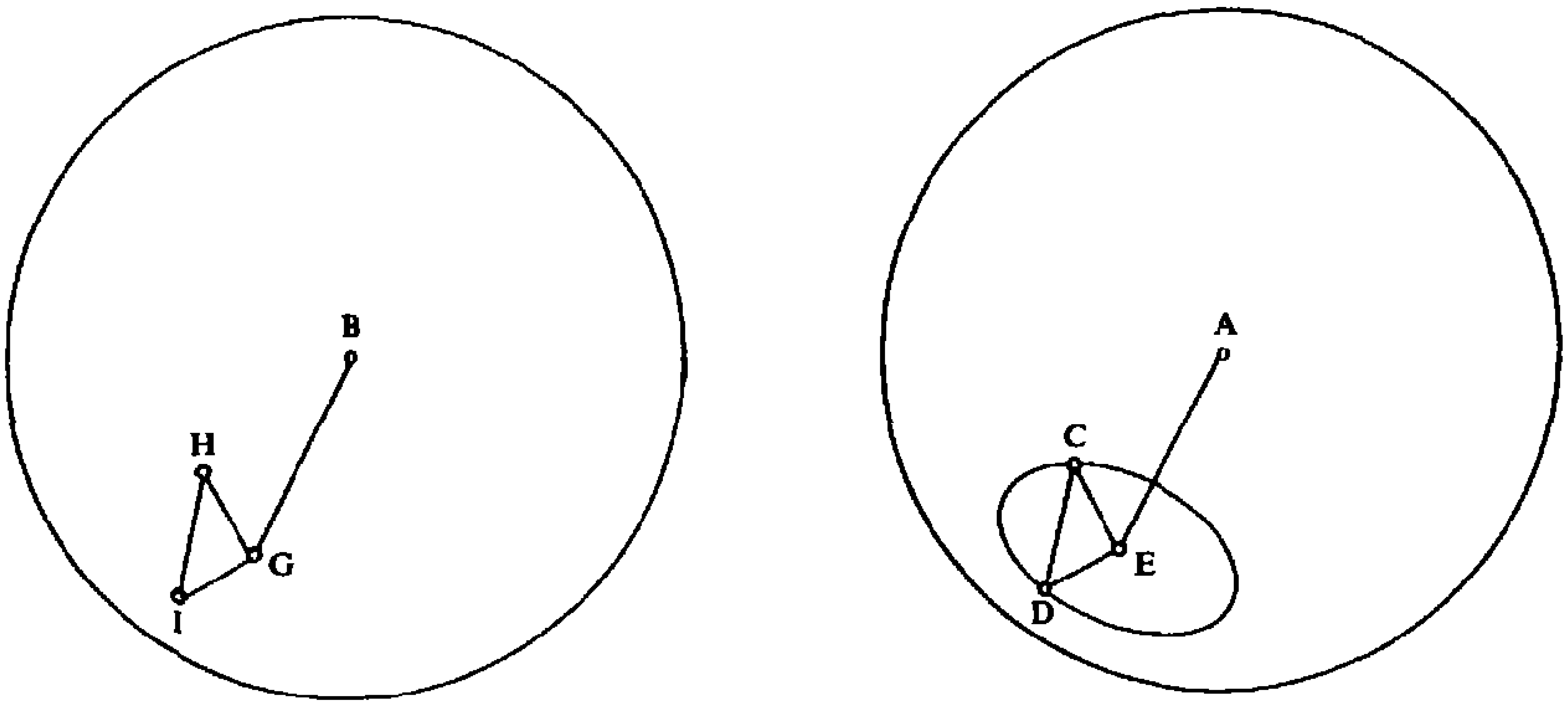
يبدأ الجزء الثاني، المكرس لتساوي مساحات المجسمات، بعشر تمهيديات تشكل وحدُها رسالة في الزاوية المجسمة، وتحليلُها يتجاوز حقاً حدود دراستنا هذه. تُثبِّت هذه التمهيديات القضيتَيْن ٥ - أ و٥ - ب من التحقيق الأولي لهذا النص[٣٤] اللتَيْن تتيحان له الاستنتاج. فلنقف عند هاتين القضيتَيْن بأكبر ما يمكن من الإيجاز:

٥ - أ: مِن بين متعددَي سُطوح منتظمين لهما أوجُه متشابهة ومساحات متساوية، يكون الأكبر حجماً الذي له العدد الأكبر من الأوجه.

ليكن A (وتتالياً B) مركز الكرة المحيطة بأول (وتتالياً بثاني) متعدد سطوح، وAE (وتتالياً BG) مسافة المركز إلى مستوي أحد الأوجه، وS_A (وتتالياً S_B) المساحتين الكليتين لمتعددَي السطوح وV_A (وتتالياً V_B) حجميهما؛ فيكون لدينا:

$$V_A = \frac{1}{3} S_A.AE \quad \text{و} \quad V_B = \frac{1}{3} S_B.BG\ .$$

(٣٤) المصدر نفسه.



الشكل رقم (١٣ ـ ٩)

ولدينا (بالافتراض) $S_A = S_B$. وليكن n_A وn_B عددي أوجه متعددَي السطوح (على التوالي)؛ فإذا كان $n_B > n_A$، إذ ذاك يكون $V_B > V_A$.

يقوم برهان ابن الهيثم على مقارنة AE وBG. وللتوصل إلى ذلك، يأخذ بالاعتبار قاعدَتَي الهرمين A وB اللتين يقوم بتجزئتهما إلى مثلثات. يجري تفكيره إذ ذاك انطلاقاً من النتائج المُعطاة سابقاً بالنسبة إلى الزوايا المجسمة التي تكون قِممها مراكز الكرات.

٥ ـ ب: إذا كانت أوجهُ متعددَي السطوح المنتظمين مضلعات منتظمة متشابهة، وإذا كانت محاطة بالكرة عينها، إذ ذاك يكون لذي العدد الأكبر من الأوجه المساحةُ الكبرى والحجم الأكبر.

لنسترجع، من أجل إيضاحٍ أفضل لطريقة ابن الهيثم، المراحلَ الأكثر بروزاً في برهانه.

ليكن P_1 وP_2 متعددَي السطوح، وS_1 وS_2 مساحتيهما، وV_1 وV_2 حجميهما، وn_1 وn_2 عدد أوجههما (تواليًا)، مع افتراض $n_1 > n_2$.

فإذا كان A مركز الكرة المحيطة بمتعددَي السطوح، نحصل على n_1 هرمٍ متساوٍ، قمتها A، ومُلحقة بأوجه P_1، وn_2 هرمٍ منتظم مُلحقة بأوجه P_2.

لتكن الآن α_1 وs_1 وh_1، على التوالي، زاوية الرأس، ومساحة القاعدة، وارتفاع هَرم المنتظم P'_1 ملحقاً بـ P_1 وα_2 وs_2 وh_2 عناصر الهرم المنتظم P'_2 الملحق بـ P_2. فيكون لدينا:

$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2 = 8D$ ($8D$ = ثماني زوايا مجسمة قائمة).

ولكن، بما أن $n_1 > n_2$، يكون لدينا $\alpha_1 < \alpha_2$.

ويمكننا الافتراض أن لهرمين P'_1 وP'_2 المحورَ عينه. وبما أن $\alpha_1 < \alpha_2$، تكون الزاوية المجسمة لـ P'_1 داخل الزاوية المجسمة لـ P'_2، وتقوم حروف (ضلوع) P'_1 بقطع الكرة ما وراء

مستوي قاعدة P_2''. فمستويا القاعدتين متوازيان ويقطعان الكرة تبعاً للدائرتَيْن المحيطتَيْن بهاتين القاعدتين؛ فنستنتج من ذلك أن:

$$h_1 > h_2 \quad \text{و} \quad s_1 < s_2$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\frac{\alpha_2}{8D} = \frac{s_2}{S_2} = \frac{1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{\alpha_1}{8D} = \frac{s_1}{S_1} = \frac{1}{n_1}$$

فيكون بالتالي:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{s_2 S_1}{s_1 S_2}$$

غير أن ابن الهيثم قد أثبت، في تمهيدية سابقة، أن $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{s_2}{s_1}$، فيكون:

$\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} > \frac{s_2}{s_1}$، ومنها $S_1 > S_2$.

لكننا نعلم أن:

$V_1 = \frac{1}{3} S_1 h_1$ و $V_2 = \frac{1}{3} S_2 h_2$.

وبما أن $S_1 > S_2$ و$h_1 > h_2$، يكون إذاً $V_1 > V_2$.

رأينا، إذاً، أن ابن الهيثم ينطلق من متعددات سطوح منتظمة. وإذ ذاك لا تنطبق القضيتان ٥ ـ أ و٥ ـ ب إلا على حالات الهرم الثلاثي، وثماني السطوح، واثني عشري السطوح، إذ إن عدد أوجه متعدد السطوح منتظم له أوجه مربعة أو خماسية يكون ثابتاً (٦ أو ١٢). تدل، إذاً، القضية ٥ ـ أ على أنه، إذا كان لهرم ثلاثي، ولثماني السطوح ولاثني عشري السطوح وجميعها منتظمة، المساحة عينها، إذ ذاك تتصاعد أحجامُها وفقاً للترتيب التالي: هرم ثلاثي، وثماني السطوح، واثني عشري السطوح. وتدل القضية ٥ ـ ب على أنه، في حال أحاطت ذات الكرة بهرم ثلاثي، وبثماني السطوح وباثني عشري السطوح وجميعها منتظمة، تتصاعد أحجامها في هذا الترتيب.

مما تقدم، يظهر بوضوح قصد ابن الهيثم: إثباتُ الخاصية القصوى للكرة انطلاقاً من المقارنة بين متعددات السطوح ذات المساحة عينها وعدد مختلف من الأوجه؛ أي تقريب الكرة كنهاية لمتعددات سطوح محاطة.

لكن هذه الطريقة الدينامية (المتحركة) تصطدم بنهائية عدد متعددات السطوح المنتظمة؛ ولا بد من أن نعترف بأن هذه الهفوة تبقى غير مفهومة. فكل شيء يدل على أن ابن الهيثم لم يرَ أن متعددات السطوح التي استخدمها تقتصر على متعددات سطوح إقليدس، وبهذا يكون عددها منتهياً. إنه سهو لا يسعنا تفسيره. فقلائل هم علماء الرياضيات الذين

عرفوا أصول إقليدس بالعمق الذي عرفها به ابن الهيثم(٣٥). لكن، وكما رأينا سابقاً، رافق هذا الفشل نجاح كبير: نظريته في الزاوية المجسمة.

وفي الوضع الراهن لمعلوماتنا، يُعتبر هذان الإسهامان - إسهام الخازن وإسهام ابن الهيثم - إلى حد بعيد، الأكثر أهمية في الرياضيات العربية. فقد بلغا مستوىً لم يستطع أن يصله خلفاؤهما من أمثال ابن هود، وجابر بن أفلح، وأبو القاسم السمساطي، وغيرهم. فإذا كان هذا الأخير قد عالج المسألة في المستوي(٣٦)، فابن أفلح لم يأخذ بالاعتبار سوى تساوي مساحات المجسمات ولم ينظر في برهانه إلا إلى متعدِدات السطوح المنتظمة(٣٧). ولا بد أن الأبحاث المقبلة سوف تُنبئنا عن وجود محتمل لإسهامات أخرى من مستوى إسهام الخازن وابن الهيثم، وعمّا إذا ما نُقلت عناصر من هذا الفصل إلى الرياضيات اللاتينية(٣٨).

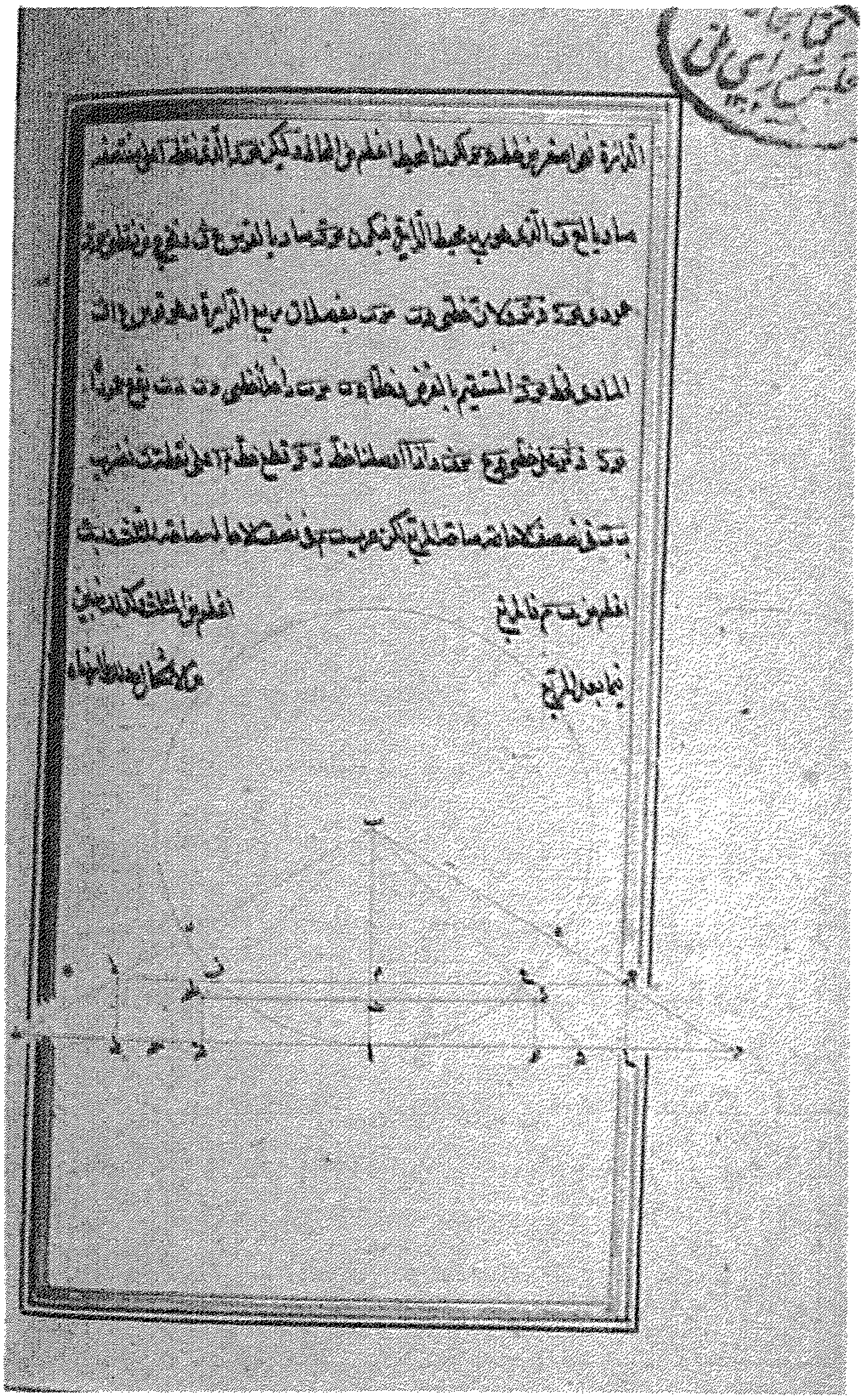
---

(٣٥) وتكفي للاقتناع قراءة: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم: كتاب في حل شكوك إقليدس من الأصول وشرح معانيه، صورة فوتوغرافية عن مخطوطة اسطنبول (فرنكفورت ـ أم ـ مان: [د. ن.]، ١٩٨٥)، وشرح مصادرات إقليدس (مخطوطة فايز الله، اسطنبول، ١٣٥٩).

(٣٦) نجد نص أبي القاسم السمساطي في عدد كبير من المخطوطات. المقصود غالباً مجموعات تحتوي على الكتب المتوسطة «المتوسطات،» الموجهة لجمهور مثقف ولتلقين علم الفلك.

(٣٧) انظر: جابر بن أفلح، إصلاح المجسطي (مخطوطة اسكوريال، ٣٩٠)، الورقة ١٢و - ظ.

(٣٨) الجميع على علم بنقل كتاب جابر بن أفلح إلى اللاتينية. وقائع أخرى تستحق أيضاً أن تُفحص، مثل قضية موجودة في مؤلف *Geometria Speculativa* الكتاب الثاني لبرادواردين (Bradwardine)، والتي نجدها فيما بعد في مؤلف *La Subtilité* لكاردان (Cardan) وهي ليست سوى القضية ٦ للخازن: «من بين جميع الأشكال المستوية والمتساوية المحيطات والتي لها ذات عدد الأضلاع وزوايا متساوية، الأكبر هو من له أضلاع متساوية». فهل نحن أمام مصدر مشترك، أم ابتداع مستقل، أم نقل؟



الصورة رقم (١٣ ـ ٥)

السمساطي، **في أن الدائرة أوسع الأشكال**

(طهران، مخطوطة مجلس شورى، ٦٠٩٢).

من بين الموضوعات الهندسية التي اهتم بها الرياضيون العرب النظرية الأولية في تساوي المساحة والحجم. كان ابن الهيثم أهم من عالج هذه النظرية في تلك المرحلة، وتبعه مؤلفون من منزلة أقل كالمؤلف الذي نذكره هنا، مما يبين أن هذه النظرية كانت دائماً محل عناية الرياضيين.

ـ ١٤ ـ
الهندسة

بوريس أ. روزنفيلد(*)
أدولف ب. يوشكفيتش(**)

مقدمة

تعود الآثار الهندسية الأولى المكتوبة بالعربية إلى أواخر القرن الثامن وأوائل القرن التاسع للميلاد؛ واللغة العربية التي اعتمدها، بشكل عام، علماء البلاد الإسلامية منذ انطلاق نشاطاتهم، كانت أداة التعبير في علم الهندسة. وهذه الكتابات تؤكد بشكل مقنع أن التقاليد القديمة: التقليد الإغريقي والهلينستي والتقليد الهندي ـ الذي اتبع أيضاً وجزئياً التقليد الإغريقي ـ أثرت بشكل هام في الهندسة وفي فروع رياضية أخرى كما في العلوم الدقيقة بشكل عام.

وعلى الرغم من أهمية هذا التأثير فإن الهندسة العربية اكتسبت، ومنذ المراحل الأولى لنموها، خصائصها المميزة التي تتعلق بموقعها في نظام العلوم الرياضية، وبترابطها مع سائر فروع الرياضيات ـ على الأخص مع الجبر ـ وبتفسيرها للمسائل المعروفة وبطرحها للمسائل الجديدة كلياً. فبدمجهم لعناصر الإرث الإغريقي وباستيعابهم لمعارف أمم أخرى أرسى العلماء العرب أسس توجهات جديدة للأفكار الهندسية وأغنوا، بفكرهم الخاص، المفاهيم التي اعتمدوا، فإذا بهم يخلقون نوعاً جديداً من الهندسة ومن الرياضيات عامة.

وابتداءً من القرن التاسع للميلاد كُرست إسهامات عديدة لعلم الهندسة. كما أن

(*) قسم الرياضيات ـ الجامعة الرسمية ـ بانسيلفانيا، الولايات المتحدة الأمريكية.
(* *) متوفى، عضو أكاديمية العلوم الروسية ورئيس الأكاديمية العالمية لتاريخ العلوم.
قام بترجمة هذا الفصل منى غانم وعطا جبور.

أعمالاً مكرسة أساساً لعلوم رياضية أخرى عالجت أيضاً هذه المادة العلمية. إن مجمل الأدبيات المتعلقة بعلم الهندسة يمكن إدخالها، عامة، ضمن هذه، أو تلك، من الفئات الثلاث التالية:

أ - تضم الفئة الأولى كتابات نظرية في الهندسة، أصيلة أو مترجمة عن لغات أخرى، تعالج الحقل الكامل لهذا العلم أو تناقش قطاعاته الخاصة.

تضم هذه المؤلفات، أولاً، وبشكل رئيس، كتاب **الأصول** لإقليدس الذي تسبب بتأليف عدد كبير من التعليقات، الأصيلة في غالبيتها، والتي شكلت بحد ذاتها حقولاً مستقلة للأبحاث. إلا أن علينا إبداء التحفظ التالي: فالمعروف أن **الأصول** تتألف من ثلاثة عشر كتاباً معظمها ليس ذا طبيعة هندسية على الرغم من استعمالها الاصطلاحات الهندسية. فالكتاب الخامس مكرس للنظرية العامة للروابط والنسب. والكتب من السابع إلى التاسع تتناول علم الحساب ونظرية الأعداد؛ وأخيراً، يحتوي الكتاب العاشر على نظرية تتعلق ببعض أنواع الأعداد الصماء من الدرجة الثانية. والكتب الأخرى من **الأصول** تعالج علم الهندسة: فالكتب الأول والرابع والسادس مخصصة للهندسة المسطحة، والكتب من الحادي عشر إلى الثالث عشر، للهندسة الفراغية.

ومن هذه الكتابات النظرية نذكر أيضاً مؤلفات أرخميدس التي تتعلق بعلم الهندسة، التي سنتعرض لمعظمها في الفصل المتعلق بتطبيق الطرق اللامتناهية في الصغر لحل معادلات الدرجتين الثانية والثالثة. وأخيراً، تجدر الإشارة إلى كتاب **المخروطات** لأبولونيوس، وإلى كتاب **الكرويات** لثيودوس، وكذلك إلى مؤلف منلاوس الذي يحمل العنوان عينه.

ومن المؤكد أن تأثير جميع الأعمال المذكورة آنفاً وكذلك تأثير كتابات إغريقية أخرى فُقدت ترجمتُها العربية، كان مهماً.

ب - تضم الفئة الثانية من الكتابات إسهامات في الهندسة مكرسة أساساً لعلوم أخرى كالجبر وعلم الفلك وعلم السكون والبصريات، أو موجودة ضمن مؤلفات فلسفية أو أعمال موسوعية عامة. ويدخل ضمن هذه الفئة: **المجسطي** لبطلميوس حيث يعالج الجزء الثاني من الكتاب الأول أعمالاً هندسية؛ كما تقع ضمن هذه الفئة الجداول الفلكية العربية، «الزيج»، التي تحتوي عادة فصولاً نظرية كاملة إضافة إلى قواعد هندسية. وتقع ضمن هذه الفئة أيضاً مؤلفات عن الأدوات الفلكية.

ج - أما الفئة الثالثة فتضم مؤلفات في الهندسة العملية لهندسيين خبراء وبنائين وحرفيين... الخ، تحتوي على قواعد حسابية وبناءات هندسية مرفقة بأمثلة، دون أية براهين.

إننا لا نؤكد إطلاقاً أن تقسيمنا للأدب الهندسي وافٍ أو ملائم كلياً، لكننا نعتقد أنه سيكون نافعاً للتوجهات العامة لدراستنا هذه.

الهندسة والجبر

نبدأ بأقدم الأعمال العربية المعروفة المتعلقة بالهندسة وهو قسم هندسي مهم من مؤلف الجبر لمحمد بن موسى الخوارزمي (نحو ٧٨٠ ـ ٨٥٠م) الذي نوقش في فصل «الجبر» من هذه الموسوعة.

يرتدي فصل «باب المساحة» من مؤلف الجبر للخوارزمي أهمية خاصة. فهو أقدم نص عربي معروف استُعمل فيه الجبر لحل الأعمال الهندسية؛ مثالاً على ذلك، نجد ضمنه مسألة قياس ارتفاع مثلث، معروفة أضلاعُه بواسطة مبرهنة فيثاغورس. وفي كتاب القياسات *(Métriques)* لهيرون الإسكندري نجد الحلول لأعمال مشابهة، إنما بطريقة مختلفة. هذا، مضافاً إلى قواعد أخرى وإلى طريقة حل معادلات الدرجة الثانية يؤكد، بطريقة مقنعة، أن الهندسة العربية تبنت التقاليد الهلينستية، وبالتالي أفكار قدامى الإغريق. وتتطابق بشكل خاص طرق الخوارزمي للتحقق من مدى انفراج الزاوية، أي من كونها منفرجة أو قائمة، أو حادة، مع طرق هيرون التي تعود، بدورها، إلى أصول إقليدس. ويصح هذا القول عينه فيما يخص تصنيف رباعيات الأضلاع.

فبإثباته أن مساحة المضلع المنتظم، أياً كان عدد أضلاعه، تعادل حاصل ضرب نصف محيطه بشعاع الدائرة المحاطة به، يظهر الخوارزمي أن مساحة الدائرة تساوي حاصل ضرب شعاعها بنصف محيطها. ويعطي الخوارزمي، لنسبة الدائرة إلى قطرها، التي نسميها اليوم ط (π)، القيم التالية:

$$\pi = 3+\frac{1}{7} \text{ و } \sqrt{10} \text{ و } \frac{62832}{20000}.$$

وقد أدخل أرخميدس القيمة الأولى لـ π في كتابه **قياس الدائرة**؛ وقد اقترح عالم الفلك الصيني تشانغ هنغ (Chang Hêng) (٧٨ ـ ١٣٩م)، كما اقترح فيما بعد عالم الفلك الهندي براهماغوبتا (وُلِد عام ٥٩٨م) القيمة الثانية، بينما تعود القيمة الثالثة لـ π إلى فلكي هندي آخر هو اريابهاتا (ولد عام ٤٧٦م).

ويقارب الخوارزمي مساحة الدائرة بـ:

$$S = d^2 - \frac{1}{7}.d^2 - \frac{1}{2}.\frac{1}{7}.d^2$$

حيث يمثل d قطر الدائرة. هذه القاعدة تقابلها القيمة $\pi = 3+\frac{1}{7}$، التي كان هيرون يعرفها أيضاً. علاوة على ذلك، ولقياس المساحة σ لمقطع دائري قاعدته l وارتفاعه h وقوسه s أدخل الخوارزمي القاعدة الصحيحة التالية:

$$\sigma = \frac{d}{2}.\frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{l}{2}$$

حيث الحد الأول من التعبير يمثل مساحة القطاع الدائري المقابل بينما يمثل الثاني مساحة المثلث الذي يمثل الفارق بين القطاع والمقطع. ويقترح الخوارزمي أيضاً قواعد لحساب حجم المنشور والهرم والأسطوانة والمخروط. كما يتعرض الخوارزمي للهرم المبتور الرأس معتبراً أن حجمه هو الفارق بين حجمي الهرمين الكاملين الملائمين، لكنه لم يحتسب حجم الكرة.

وقد احتوت عدة كتيبات عربية في الحساب والجبر على أجزاء مشابهة للفصل المتعلق بالقياسات عند الخوارزمي وهو المسمى «باب المساحة». فقد أدخل أبو الوفاء (٩٤٠ - ٩٩٨م) عدداً كبيراً من القواعد الهندسية في مؤلفه الحسابي **كتاب في ما يحتاج إليه الكتاب والعمال وغيرهم من علم الحساب**. لقد زاد أبو الوفاء، قياساً على الخوارزمي، معلومات جديدة مقتبسة جزئياً عن مصادر إغريقية وهندية (قاعدة أرخميدس وهيرون الإسكندري في حساب مساحة مثلث تكون أضلاعه مُعطاة؛ والقاعدة الهندية للحساب التقريبي لضلع في متعدد أضلاع منتظم محاط بدائرة تبعاً لعدد أضلاعه ولقطر الدائرة المحيطة به). وهذا الجزء من كتاب أبو الوفاء يؤدي مباشرة إلى القسم الهندسي من **كتاب الكافي في الحساب** للكرجي (ت نحو ١٠٣٠م).

وهكذا، باستعمالهم البناءات الهندسية الأولية بغية حل معادلات الدرجة الثانية حسابياً، وبإدخالهم الطرق الجبرية لحساب الكميات الهندسية، أقام العلماء العرب جسراً يربط الجبر بالهندسة. ومن البديهي أنهم، أي العلماء العرب، لم يمثلوا الجذور الحقيقية للمعادلات الجبرية الكيفية بخطوط إحداثيات لنقاط تقاطع منحنيات جبرية منتقاة بالشكل المناسب؛ فهذا ما سيتم فيما بعد، في أواخر القرن السابع عشر. بيد أن علماء الرياضيات العرب وخاصة عمر الخيام وشرف الدين الطوسي (انظر الفصل الحادي عشر: الجبر) استبقوا هذه الفكرة على الأقل، في الحالة الخاصة المتعلقة بمعادلات الدرجة الثالثة. ويؤكد غياث الدين الكاشي (ت حوالى ١٤٣٠م) في كتابه **مفتاح الحساب** أنه أدخل مثل هذا الرباط في جميع معادلات الدرجة الرابعة (ذات الجذور الإيجابية)؛ لكن، حتى لو فرضنا أن هذه المؤلفات *(التي ذكرها الكاشي) قد كتبت فعلاً، فإنه لم يتم العثور عليها إلى الآن.*

الحسابات الهندسية

بعد أن تكلمنا عن العلاقات بين الهندسة والجبر وأوردنا مسألة قياس الأشكال الهندسية، من الطبيعي أن نلتفت نحو حسابات هندسية أخرى. ونحن لن نتوسع في الحسابات المتناهية في الصغر لمعادلات الدرجتين الثانية والثالثة، كتلك التي قام بها ثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان، وابن الهيثم، لأن هذه الحسابات عولجت في الفصل المتعلق بالوسائل المتناهية في الصغر. وعوضاً عن ذلك سنتابع دراسة الحسابات الصحيحة والتقريبية للخوارزمي.

استوعب العرب سريعاً الإرث الإغريقي في هذا المجال، وعلاوة على ذلك، أغنوه كثيراً، كما يشهد على ذلك كتاب **معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية** الذي كتبه في منتصف القرن التاسع للميلاد الإخوة بنو موسى وهم: محمد (ت ٨٧٢م) وأحمد والحسن. فقد أعطوا فيه قوانين لحساب مساحات المضلعات المنتظمة المحيطة بالدائرة والمحاطة بها. كما احتسبوا مساحة الدائرة باعتبارها «شكلاً مسطحاً»؛ وهذه المساحة هي حاصل ضرب شعاع الدائرة بنصف محيطها. وقد برهن بنو موسى أن نسبة قطر الدائرة إلى محيطها هي نفسها في جميع الدوائر وأن نسبة الدائرة إلى قطرها تتجاوز الـ $3 + \frac{10}{71}$ وتقل عن $3 + \frac{1}{7}$. وكان أرخميدس أول من برهن هذه المتباينات في كتابه **قياس الدائرة**.

وتابع بنو موسى في هذا الاتجاه وصولاً إلى بيان «مبرهنة أرخميدس ـ هيرون» التي تعطي مساحة المثلث تبعاً لأضلاعه. وتوصلوا فيما تبع ذلك من مبرهنات إلى أن المساحة الجانبية للمخروط الدائري هي «شكل مسطح» أي أنها حاصل ضرب مولدته بنصف محيط قاعدته الدائرية. وبرهنوا أن قطع مخروط دائري بسطح موازٍ لقاعدته هو دائرة وأن المساحة الجانبية لمخروط دائري مبتور الرأس هي «شكل مسطحٌ»، أي حاصل ضرب مولدته بنصف مجموع محيط دائرتي قاعدتيه؛ وأن مساحة نصف الكرة تساوي ضعف مساحة الدائرة الكبرى في الكرة، وأن حجم الكرة هو حاصل ضرب شعاعها بثلث مساحتها. ولقد استعملوا طريقة البرهان بالخُلف لإثبات المبرهنتين الأخيرتين. وتعود كل هذه النتائج لأرخميدس الذي برهنها في مؤلفه **الكرة والأسطوانة**.

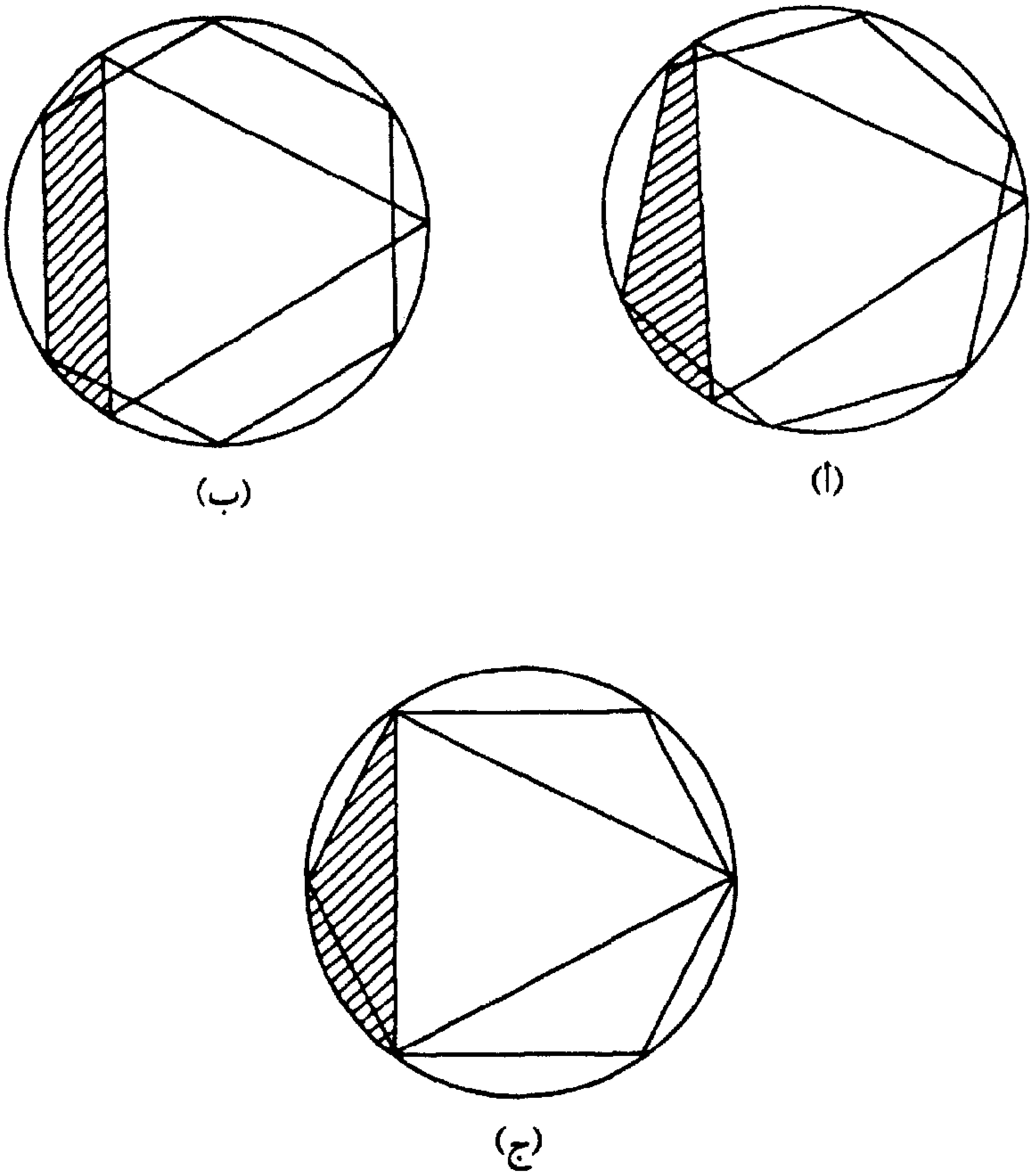
وأخيراً وصف بنو موسى طريقة لاستخراج الجذور التكعيبية للأعداد المكتوبة بالنظام الستيني وناقشوا المسألتين الإغريقيتين التقليديتين:

١ ـ مسألة إيجاد متوسطين متناسبين x و y بين كميتين معروفتين a و b (بحيث يكون $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$).

٢ ـ مسألة «تثليث الزاوية» (أي قسمتها إلى ثلاثة أقسام متساوية (المترجم)) مقترحين حلين للمسألة الأولى. *يعود أحد هذين الحلين إلى أرخيتاس*، ويقدم فعلاً برهاناً على وجود حل (في الفراغ)، وذلك بواسطة تقاطع مجسمات دورانية ثلاثة: أسطوانة ومخروط وقولب طوقي. أما تثليثهم للزاوية فيدخل في السياق المباشر للطريقة التي قدمها أرخميدس في كتابه *Les Lemmes*.

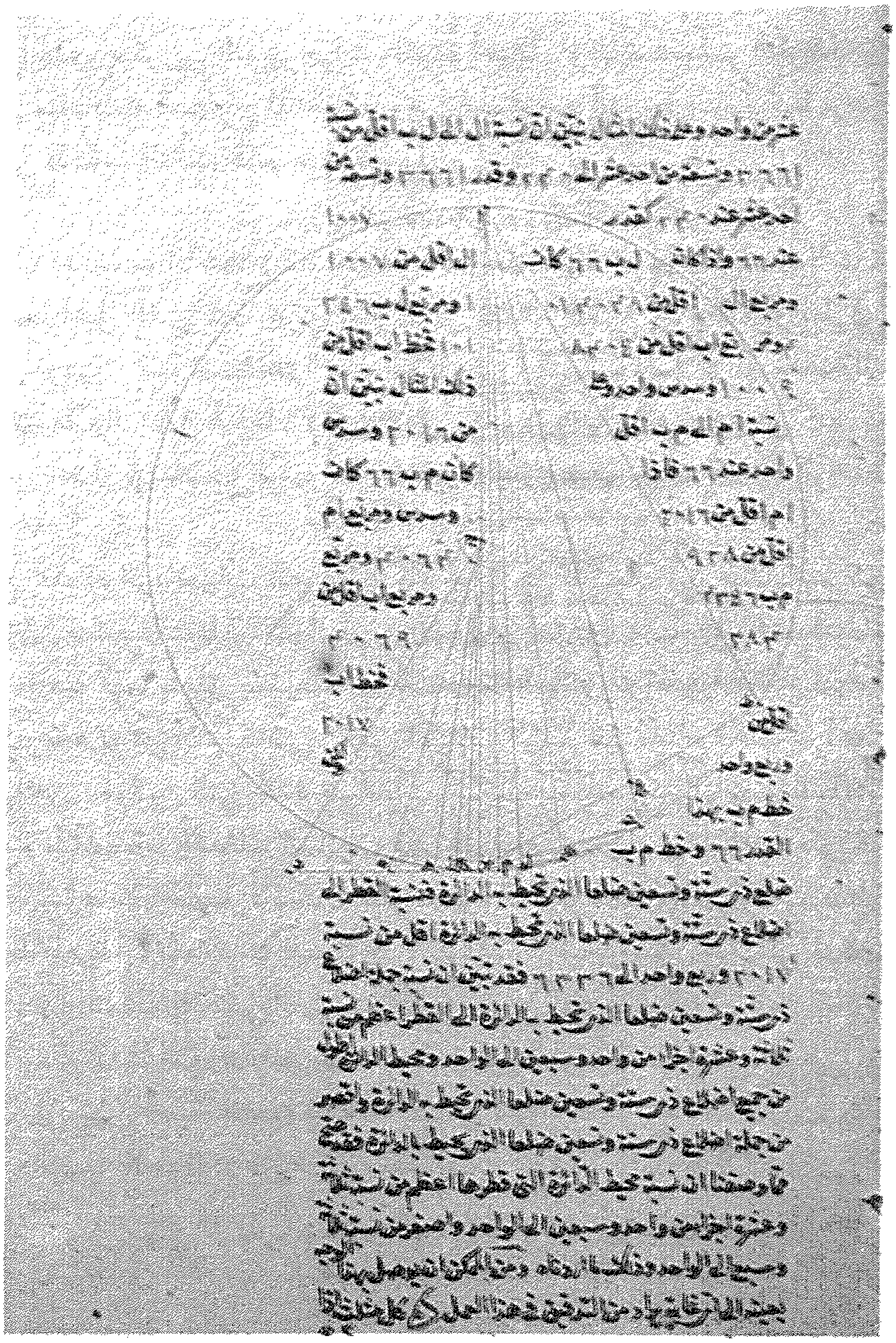
أما ثابت بن قرة، تلميذ الإخوة بني موسى فقد كتب رسائل في مواضيع سبق أن أشرنا إليها بشأن حل مسائل من الدرجتين الثانية والثالثة بواسطة الطرق المتناهية في الصغر، كما ألف كتاباً في قطوع وفي سطوح الأسطوانة وهو يرتكز على هذه الطرق عينها. وبالإضافة إلى ذلك وضع ثابت بن قرة مؤلفين في الحساب الهندسي: **كتاب في مساحة قطع الخطوط** ـ لم يسلم إلى يومنا إلا جزئياً ـ **وكتاب في معرفة مساحة الأشكال البسيطة والمجسّمة**، الذي سلم كلياً. يعطي ابن قرة في النصِ الأول قياس الجزء من الدائرة الموجود

بين مثلث متساوي الأضلاع ومسدس منتظم، كلاهما محاط بهذه الدائرة. ويدرس ابن قرة ثلاث حالات (الشكل رقم (١٤ ـ ١أ وَ ب وَ ج) على التوالي)، ويبرهن أن مساحة الشكل المشار إليه تعادل سدس مساحة الدائرة. أما كتابه الثاني فيحتوي على قوانين عدة لاحتساب المساحات والأحجام، وبصورة خاصة أحجام «المجسمات ذات القواعد المختلفة» كالأهرامات والمخروطات مقطوعة الرأس. فإذا أشرنا إلى القاعدتين بـ S_1 وS_2 وإلى الارتفاع بـ h نجد أن حجم هذه المجسمات في كل الأحوال يعادل $V = \frac{1}{3}.h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$؛ وكان ثابت بن قرة قد برهن هذه القاعدة في كتابه مقالة في مساحة المجسمات المكافئة.



الشكل رقم (١٤ ـ ١)

ليس من الممكن، وليس من الضروري حتى، تقديم وصف حسابات عناصر الأشكال والمجسمات العديدة ـ وبالأخص المضلعات والمتعددات السطوح المنتظمة ـ التي قام بها العلماء العرب، بدقة متزايدة وباستمرار. وعند كون أضلاع المضلعات أعداداً صماء من الدرجة الثانية كان العلماء العرب يستنتجونها من حلِ معادلات الدرجة الثانية ومن



الصورة رقم (١٤ ـ ١)

نصير الدين الطوسي، **تنقيح رسالة بني موسى في مساحة الأشكال البسيطة والكرية**
(القاهرة، مخطوطة المكتبة الوطنية، مصطفى فاضل، رياضة ٤١).
ينقح الطوسي هذه الرسالة التي ترجمت إلى اللاتينية ويشرحها،
وكان يتعلم هذا الفرع منها.
وفي هذه الصورة نرى حساباً للعدد ط(=π) باستعمال كثير الأضلاع.

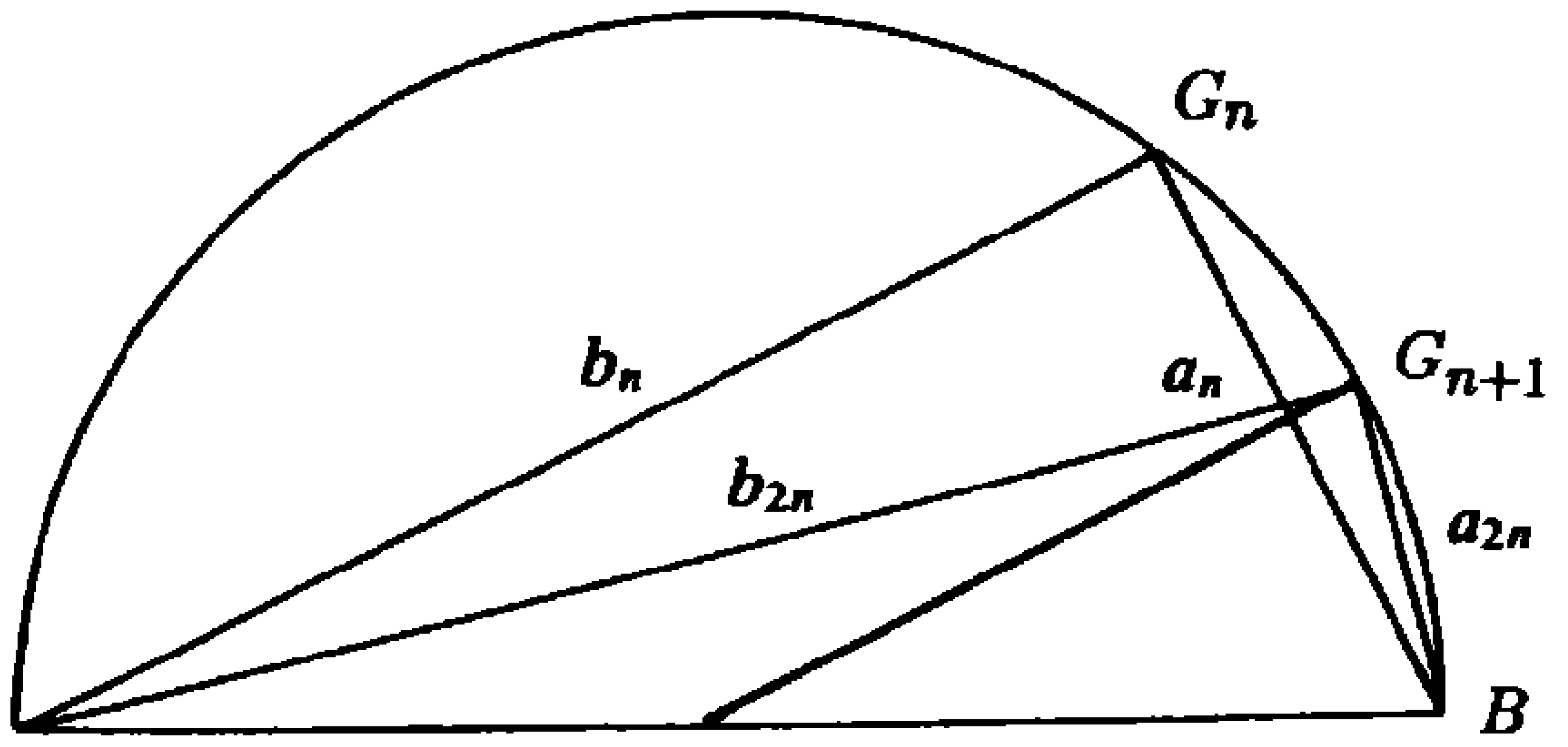
استخراج الجذور مكررين التدبير مرات عديدة أحياناً. وقد استُعْمِلَت الطريقة عينها لتحديد الزوايا في متعددات السطوح المنتظمة، وهي صماء من الدرجة الثانية كما برهن على ذلك إقليدس في الكتاب الثالث عشر من الأصول.

وكان احتساب الأضلاع الصماء من الدرجة الثالثة يجري بحل معادلات من الدرجة الثالثة، هذا الحل الذي كان يجري عن طريق تقاطع قطوع مخروطية أو بطرق مشابهة أو بحسابات تقريبية. فقد استخدموا هذه الطرق في احتساب أضلاع المضلعات المنتظمة ذات السبعة والتسعة والـ ١٨٠ ضلعاً. وهذا الأخير كان ذا أهمية لأنه ساعد في جمع لوحات علم المثلثات على اعتبار أن نصف ضلعه هو $sin1° = R\ sin1°$، حيث R هي الوحدة.

بلغ علماء الرياضيات العرب درجة عالية من الكمال في حساباتهم كما نرى في الفصل الثاني عشر «التحليل التوافيقي، التحليل العددي، التحليل الديوفنطسي ونظرية الأعداد، خاصة فيما يتعلق بمدرسة ألغ بك (Ulugh Beg) في سمرقند. ويلفت الانتباه في هذا المجال عملان مميزان للكاشي. ففي الكتاب الرابع من **مفتاح الحساب** أعطى الكاشي عدداً كبيراً من القوانين التي تحدِد مساحات أشكال مسطحة كالمثلثات والمضلعات الرباعية والمضلعات المنتظمة، وكذلك الدائرة وقطاعاتها ومقاطعها، وكذلك أعطى قوانين تحدِد الأحجام والمساحات الجانبية لأشكال أكثر تعقيداً كالأهرامات والمخروطات مقطوعة الرأس والكرة ومقاطعها، ومتعددات السطوح المنتظمة... الخ. وكان الكاشي يستعمل القيمة التقريبية لِـ π والمتمثلة بالكسر الستيني $3° \ 8' \ 29'' \ 44''' = 3.141593$. وقام الكاشي بقياس أحجام الأجسام ذات الأوزان المعروفة، ثم قدم لوحة موسعة عن الثقل النوعي لمواد مختلفة. وكان الكاشي يولي أهمية خاصة لِطريقة قياس أجزاء الصروح والعمارات مثل الأقواس والقناطر والقبب المجوفة وغيرها من المساحات الهابطة واسعة الانتشار في الشرق في القرون الوسطى. وعند قياسه أحجام المخروطات مقطوعة الرأس والقبب المجوفة استعمل الكاشي طرق التكامل المقارب، كما ندعوها اليوم.

ويمثل كتاب **الرسالة المحيطية**، وهو مؤلف آخر للكاشي، أوجَ الكفاءة في الحساب. ولقد أعطى الكاشي فيه قيمة π بدقة تفوق وإلى حد بعيد ليس فقط كل المحاولات السابقة، وإنما أيضاً الإنجازات اللاحقة لعلماء كثر من أوروبا (انظر لاحقاً). احتسب الكاشي π بالطريقة نفسها التي اعتمدها أرخميدس في كتابه **حساب الدائرة** الذي تُرجم إلى العربية منذ القرن التاسع للميلاد (ولقد رأينا فيما سبق وصف الإخوة بني موسى لحسابات أرخميدس).

وقد حاول الكاشي بلوغ دقة كبيرة جداً في حساباته، حيث درس مضلعاتٍ منتظمة محاطة ومحيطة ذات الـ $3 \times 2^{28} = 805,306,368$ ضلعاً بينما اقتصرت دراسة أرخميدس على المضلعات ذات الـ $3 \times 2^5 = 96$ ضلعاً.



الشكل رقم (١٤ - ٢)

لنأخذ مضلعاً منتظماً له العدد 3.2^n من الرؤوس ولنسمِّ a_n ضلعه وb_n وتر الدائرة الموافقة المحيطة به (كما في الشكل رقم (١٤ - ٢))[١]:

فيكون:

$$a_n^2 + b_n^2 = (2R)^2.$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), a_{n+1} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{(2R)^2 - a_n^2}}$$

حيث $a_o = R\sqrt{3} \equiv BG_o$

وهكذا احتسب الكاشي الـ b_n وليس الـ a_n. وبتطبيقه للقاعدة:

$$b_{n+1} = \sqrt{R(2R + b_n)} \quad \text{حيث} \quad AG_o \equiv R = b_o$$

أرجع عملية حساب الـ a_n، حيث $n = 28$، إلى عملية استخراج جذر تربيعي ٢٨ كرة متتالية. وقد اختار الكاشي هذه القيمة لِـ n لأن الفارق بين محيطَيْ المضلع المحيط والمضلع المحاط بدائرة قطرها D يعادل 600,000 مرة قطر الأرض، أقل من عرض شعرة حصان (نظن أن المقصود لفظة «شعيرة» (المترجم)). وبما أن D يمثل، في ذهن الكاشي، قطر كرة النجوم الثابتة، فإن علوم الطبيعة لن تصادف أبداً دائرة أكبر. وقد نفذ الكاشي حساباته بواسطة الكسور الستينية لأن استعمالها يسهل استخراج الجذور أكثر من الكسور العشرية.

---

(١) $a_n = \overline{BG_n}$، $b_n = \overline{AG_n}$، ونبرهن أن: $a_{n+1} = \sqrt{2R^2 - Rb_n}$، $b_{n+1} = \sqrt{2R^2 + Rb_n}$.

و $a_{n+1} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{(2R)^2 - a_n^2}}$، حيث $OB = AO = R$.

وبعد تحديده محيط مضلع محاط له 3×2^{28} ضلعاً احتسب الكاشي محيط المضلع المحيط الموافق وافترض أن محيط الدائرة يعادل المتوسط الحسابي لمحيطي المضلعين. وحصل على النتيجة التالية:

$$\pi = 3; 8, 29, 44, 0, 47, 25, 53, 7, 25$$

ومن ثم حول هذه القيمة في النظام العشري فتوصل إلى النتيجة التالية:

$$\pi = 3.14\ 159\ 265\ 358\ 979\ 325.$$

ومن السبعة عشر رقماً بعد الفاصلة نرى أن الأخير وحدَه خطأ (والقيمة الصحيحة هي ...38 بدلاً من ...5). وفي أوروبا، وبعد مئة وخمسين سنة من إنجاز الكاشي، توصل العالم الهولندي أ. ڤان رومن (A. Van Roomen) إلى الحصول على الدقة نفسها في تحديده قيمة π. وقد قام لذلك بدراسة المضلعات المحاطة والمحيطة ذات الـ 2^{30} ضلعاً.

وجدير بالذكر أن الكاشي حدد أيضاً جيب $1°$ بالدقة ذاتها التي حدد بها π. واعتبر هذا الجيب كجذر معادلة من الدرجة الثالثة التي قام بحلها بطريقة حسابية تقريبية تكرارية ذات تقاربية سريعة.

ولنلاحظ بهذا الخصوص، أن علماء الرياضيات العرب عبروا في مناسبات عدة عن اقتناعهم بأن نسبة محيط الدائرة إلى قطرها هي عدد أصم. وكان أبو الريحان البيروني (٩٧٣ ـ ١٠٤٨م)، وفي كتابه **القانون المسعودي**، قد أكد أن نسبة «عدد محيط الدائرة» إلى «عدد القطر» (الذي أخذه معادلاً لِ 2) هي عدد «أصم»(٢).

بناءات هندسية

ترافق اهتمام المجتمعات بالبناءات الهندسية الضرورية لحسابات المسح ولتشييد الأبنية مع اهتمامها بالحسابات الهندسية. وفي هذه البناءات لعب الخيط المشدود الدور عينه الذي تلعبه اليوم المسطرة والبيكار. وبصورة خاصة، كانت المثلثات قائمة الزاوية، والتي يبلغ طول أضلاعها ثلاثة وأربعة أجزاء (وطول الوتر خمسة أجزاء)، تُبنى بواسطة خيط مقسم إلى اثني عشر جزءاً متساوياً. وحسب الأسطورة، لقن «شادّو الأوتار» المصريون (أو الـ «Harpedonaps»)، علمَ الهندسة لديموقريطس (Démocrite). وحسب ما تروي **السولباسوتراس** *(Sulbasûtras)* الهندية القديمة، كانت هذه الحبال تستعمل لبناء المذابح في المعابد.

---

(٢) أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني: **القانون المسعودي**، صحح عن النسخ القديمة الموجودة في المكاتب الشهيرة، تحت إعانة وزارة معارف الحكومة العالية الهندية، ٣ج (حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف العثمانية، ١٩٥٤ ـ ١٩٥٦)، ج٣: **المقالة الثالثة من القانون المسعودي**، تحقيق إمام إبراهيم أحمد، مجموعة لجنة إحياء التراث الإسلامي (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٨٥)، ص ١٢٦ و ٥١٠ .

نسب الإغريق اختراع البيكار إلى طاليس (Thalès). وكان إقليدس، في كتابه **الأصول** يرسم بناءاته دائماً بواسطة المسطرة والبيكار ولم يستخدم فيها إلا المقاطع من الخطوط التي يمكن بناؤها، انطلاقاً من مقاطع تمثل أعداداً صحيحة، بواسطة هذه الأدوات. ولهذا، فإن كل الأعداد الصماء، التي نصادف في مؤلفه التقليدي، هي من الدرجة الثانية.

وفي القرن الرابع قبل الميلاد، بدأ الأغريق باستخدام الأدوات لبناء الأعداد الصماء من الدرجة الثالثة، وبالأخص آلة الـ «neusis»، وهي عبارة عن مسطرة معلمة بنقطتين. وباستخدامه مسطرة كهذه، قسم أرخميدس في كتابه *Les Lemmes*، الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية، محوّلاً هذه المسألة إلى مسألة حل معادلات من الدرجة الثالثة.

استعمل الإغريق منحنيات خاصة، من أجل حل هندسي لبعض المسائل القديمة، أي من أجل بناء القاطع أو الزوايا الملائمة. مثلاً، في القرن الرابع قبل الميلاد، استعمل مينيشم (Ménechme) القطوع المخروطية لمضاعفة المكعبات. وهذه القطوع المخروطية طُبقت في حل مسألة أكثر شمولية، وهي إيجاد متناسبَي الوسط بين مقطعين معروفين من خط مستقيم. وفي القرن الثاني قبل الميلاد أدخل نيقوميدس (Nicomède) وديوقليس (Dioclès) المحارية (Conchoïde) والقراضية (Cissoïde) للأهداف عينها.

استُعملت منحنية المحارية لتثليث الزوايا ومنحنية القراضية لمضاعفة المكعبات، وهي حسب المصطلحات العصرية، منحنيات من الدرجة الثالثة. ومن قبلُ، في القرن الخامس قبل الميلاد، حقق هيبياس الإيلي (Hippias d'Elis) تثليث الزاوية بفضل الـ «quadratix» وهو منحنٍ متسام (أي غير جبري (المترجم)). وفي القرن التالي، استعمل دينوسترات (Dinostrate) هذا المنحني لبناء جزء عكسي من π ولتربيع الدائرة، أي لبناء مربع مكافئ (من حيث المساحة (المترجم)) لدائرة معينة. كل هذه المنحنيات، وكذلك حلزونية أرخميدس التي استُعمِلَتْ أيضاً لتربيع الدائرة، دُرِسَتْ في عدة أبحاث نظرية، وخاصة في أوروبا العصرية.

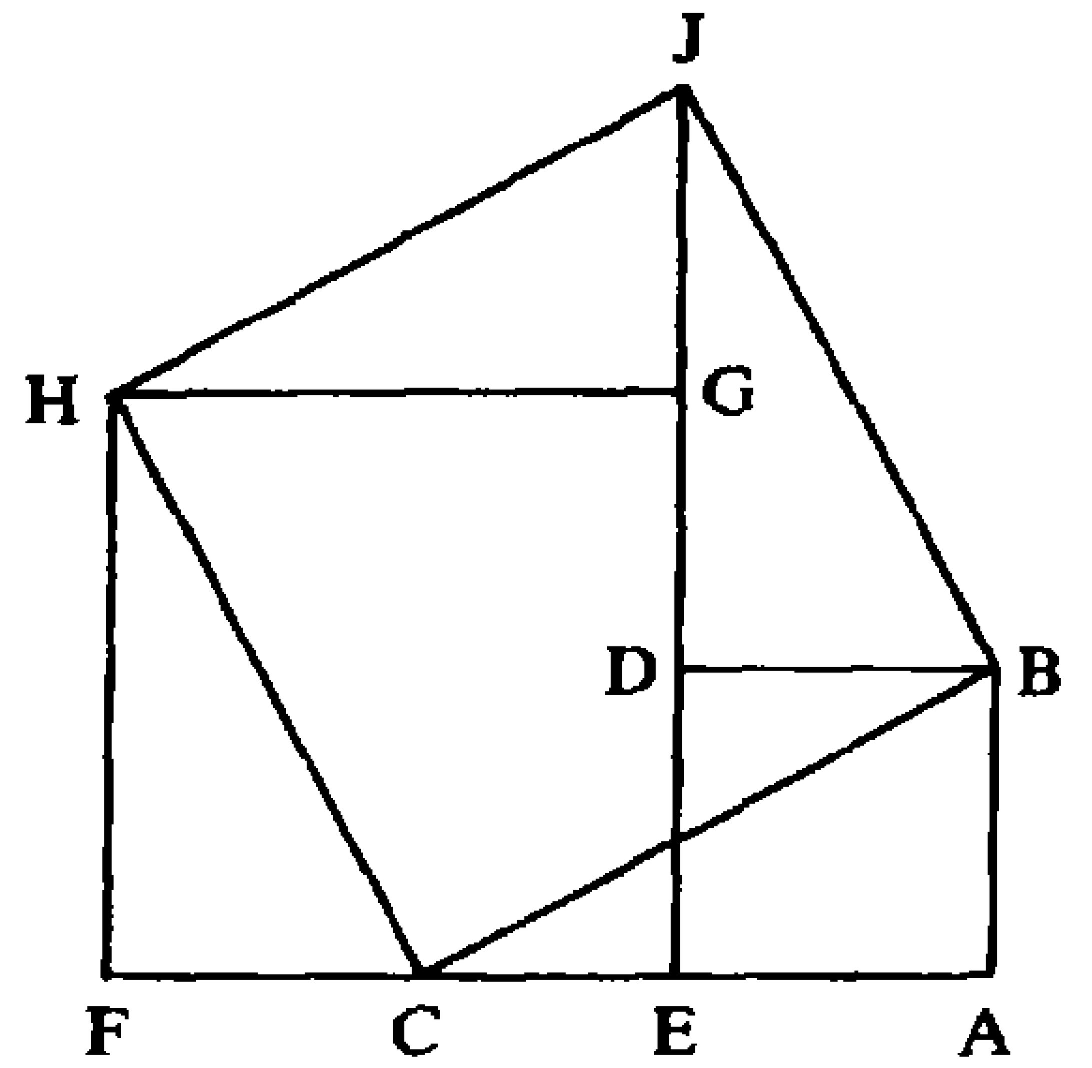
في المخطوطات العربية المعروفة، نجد أمثلة عديدة عن استعمالِ القطوع المخروطية في بناء القطعات والزوايا. في حين لم نلقَ في هذه المخطوطات أياً من المنحنيات المذكورة سابقاً. بَيْدَ أن اليهودي الإسباني ألفونسو، في مؤلفه عن **استقامة المنحنيات** *(Meyyashêr 'âqôb)* الذي كُتِبَ في القرن الرابع عشر للميلاد تحت التأثير القوي لعلماء الرياضيات العرب، استعمل المحارية لتثليث الزاوية، ولبناء «المتوسطين المتناسبين»(٣).

كرس ثابت بن قرة مؤلفين للبناءات الهندسية. ففي كتاب **رسالة في الحجة المنسوبة**

---

(٣) انظر: Alfonso, *Meyashshēr 'Aqōb, Vypryamlyayushchiĭ Krivoye*, texte hébreu, traduction russe de G. M. Gluskina; commentée par G. M. Gluskina, S. Y. Luria et B. A. Rosenfeld (Moscou: [s. n.], 1983), pp. 82-84.

إلى سقراط في المربع وقطره أعطى حلاً للمسألة التالية: تقسيم مربع مبني على وتر مثلث قائم الزاوية إلى قِطع نستطيع أن نركب بها المربعات المبنية على أضلاع المثلث عينه. فالشكل رقم (١٤ ـ ٣) ينقل أحد رسوم ثابت بن قرة. هنا، بُني المربع BCHJ على وتر المثلث ABC وقُطِّع فيما بعد إلى أجزاء أعطت بدورها الشكل $BAFHGD$. وهذا الشكل ليس سوى المربعين $ABDE$ و$EFHG$ المبنيين على أضلاع المثلث ABC.



الشكل رقم (١٤ ـ ٣)

وفي مؤلفه **كتاب في عمل شكل مجسم ذي أربع عشرة قاعدة تحيط به كرة معلومة** درس المؤلف نفسه عملية البناء الفضائي لمتعدد سطوح تحده ستة مربعات وثمانية مثلثات متساوية الأضلاع. ويمكن الحصول على هذا المجسم انطلاقاً من مكعب بُتِرَتْ قممه بقطع نصف كل حافة في المكعب مجاورةٍ لكل قمة.

وهذا المجسم، المحدود بمضلعات منتظمة من نوعين، هو أحد متعددي السطوح الثلاثة عشر المسماة «نصف منتظمة» التي اكتشفها أرخميدس جميعاً.

كتابان كُرسا فقط للبناءات الهندسية: **كتاب الحيل الروحانية والأسرار الطبيعية في دقائق الأشكال الهندسية** للفيلسوف الشهير أبي نصر الفارابي (نحو ٨٧٥ ـ ٩٥٠م)، وكتاب **فيما يحتاج الصانع من الأعمال الهندسية** للكاتب أبي الوفاء. والكتاب الثاني يشتمل على الأول بشكل شبه تام. ونلحظ أن تعبير «حيل» يعني «أساليب بارعة» تدل أيضاً على «علم الحيل» أو الميكانيك، وبشكل خاص على علم الآليات والأدوات الآلية. عند مناقشاته في علم الحساب، استعمل الفارابي هذا التعبير للدلالة على الجبر، واستعمله في علم الهندسة للدلالة على فن البناءات الهندسية.

وهذان الكتابان معاً يحتويان على:

١ ـ بناءات أولية بالمسطرة والبيكار.

٢ ـ بناءات بواسطة أدوات خاصة، لمتناسبَي الوسط ولتثليث الزاوية، وهذه الأساليب تعادل حل معادلات الدرجة الثالثة.

٣ ـ البناء، بواسطة المسطرة والبيكار، للمثلثات متساوية الأضلاع وللمربعات وللمضلعات المنتظمة ذات الـ ٥، ٦، ٧، ٨، ١٠ أضلاع (بناء المضلع ذي السبعة أضلاع،

ويعادل حل معادلة من الدرجة الثالثة، كان يجري بصورة تقريبية. أما بناء المضلع المنتظَم ذي التسعة أضلاع فكان يتم بعملية تثليث الزاوية).

٤ ـ عدد من البناءات بالمسطرة والبيكار على نطاق محدد.

٥ ـ بناء قطع مكافئ («مرآة حارِقة») بتحديد عدد معين من نقاطه بيانياً.

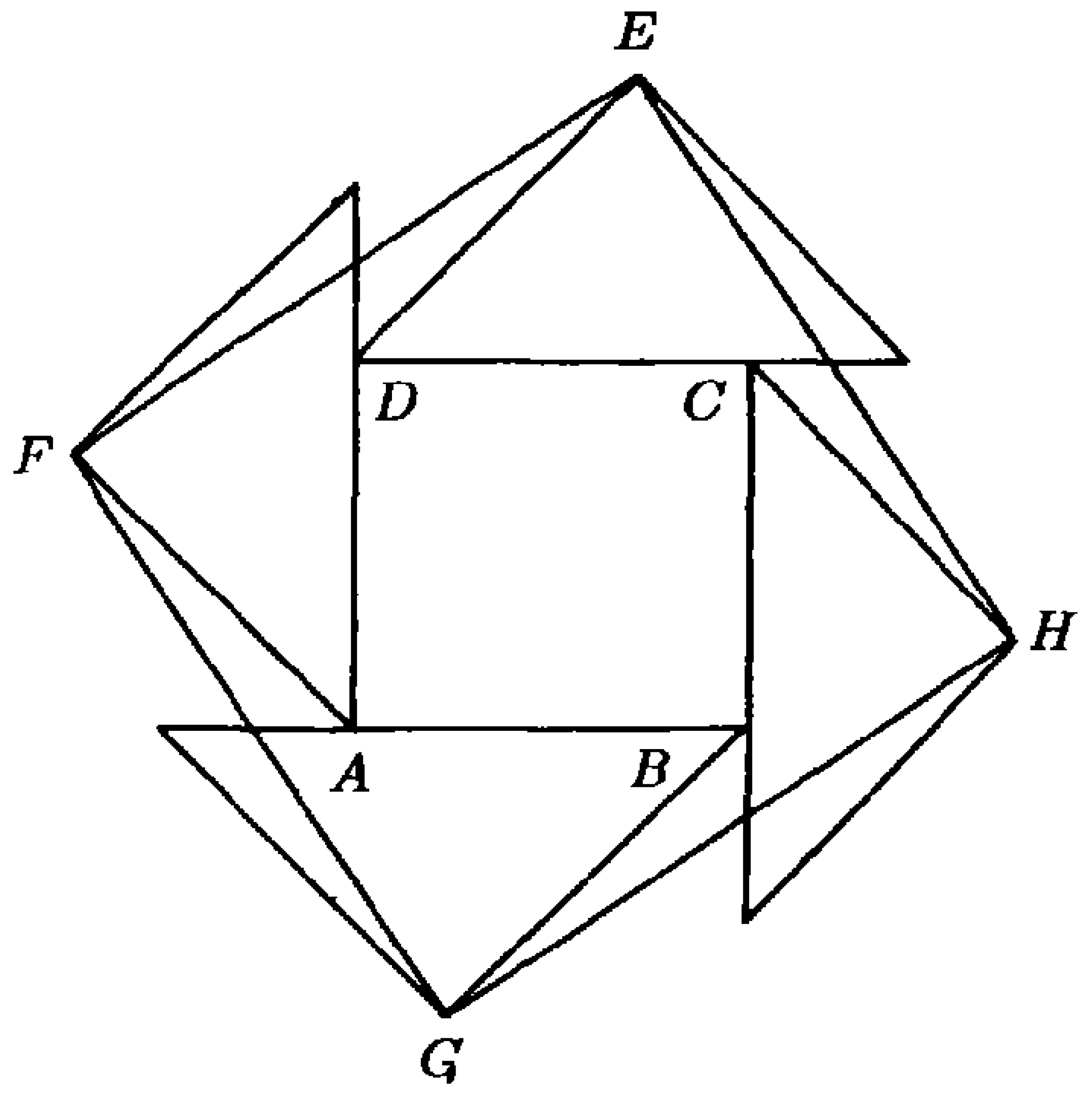
٦ ـ تحويلات مضلع إلى مضلع آخر.

٧ ـ بناءات في الفضاء (الفراغ).

٨ ـ بناءات على كُرات، وبشكل خاص بناءات قمم متعددي السطوح المنتظمة ونصف المنتظمة.

إن التقاليد العائدة إلى السولباسوتراس الهندية القديمة أثرت دون أدنى شك في هذين الكتابين، ويبدو أيضاً أن فيلسوف العرب يعقوب الكندي (ت ٨٧٣م) كان حلقة وصل بين هذه التقاليد من جهة، وأبي الوفاء والفارابي من جهة أخرى. وقد ضاعت مؤلفات الكندي، لكن المؤرخ العربي القفطي (١١٧٣ ـ ١٢٤٨م) وصف مؤلفاته: **كتاب في أعمال شكل الموسِّطَيْن وكتاب تقسيم المثلث والمربع وكتاب قسمة الدائرة بثلاثة أقسام**(٤).

وهناك بناءات أخرى في غاية الأهمية، وهي تقطيع المربع لمجموعة من عدة مربعات، وبالعكس. واحتوت السولباسوتراس أيضاً على مسائل من هذا النوع حُلت بواسطة مبرهنة فيثاغورس. فبوصفهما أساليب مختلفة لبناء مربع يعادل مجموع ثلاثة مربعات أخرى متطابقة فيما بينها، انتقد الفارابي وأبو الوفاء الطرق غير الملائمة المستعملة من قبل الصناع. وكانت إحدى الطرق التي اعتمدها المؤلفان لحل هذه المسألة تعتمد على تقطيع مربعين من المربعات المعطاة وفقاً لقطرها وعلى وضع المثلثات الأربعة، الناتجة عن التقطيع، بطريقة مجاورة للمربع الثالث، كما في الشكل رقم (١٤ ـ ٤). ومن ثم



الشكل رقم (١٤ ـ ٤)

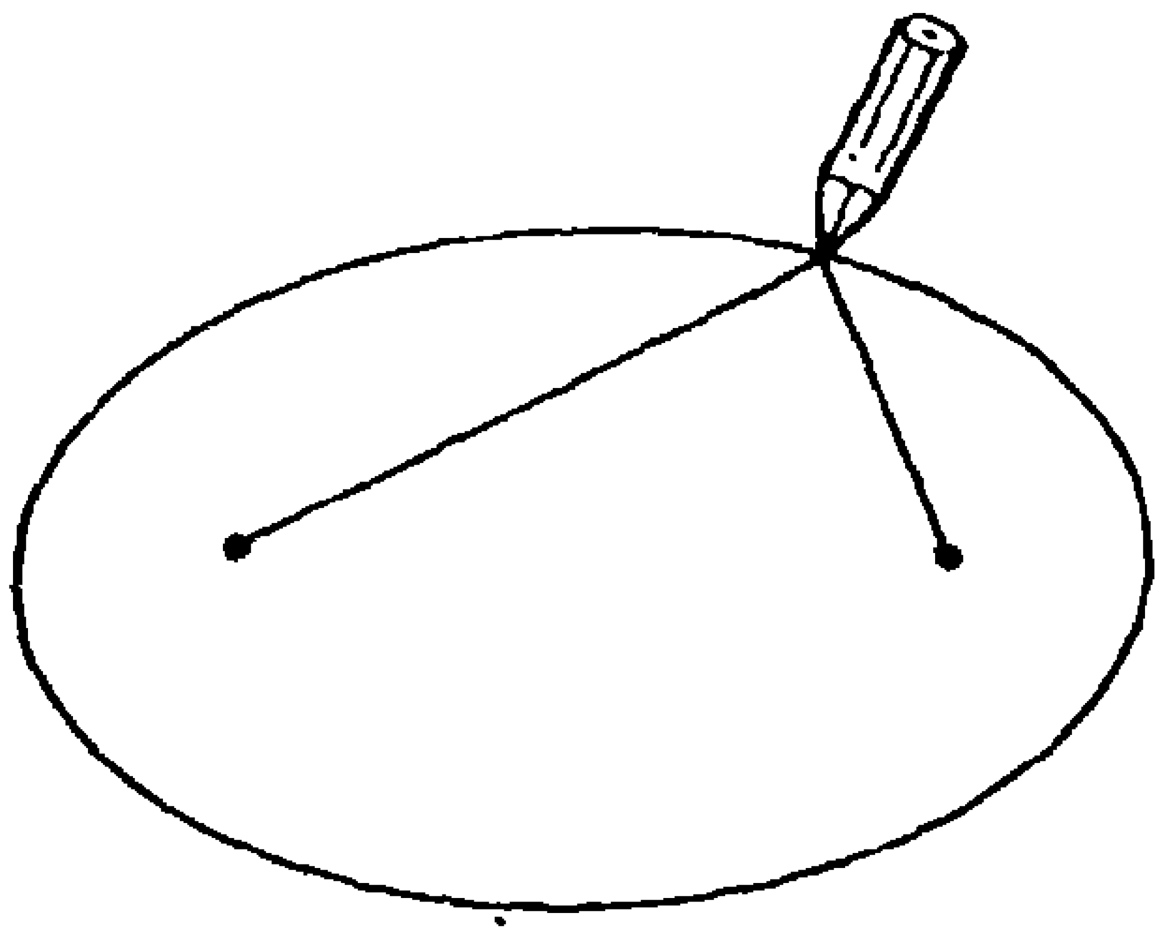
---

(٤) انظر: أبو الحسن علي بن يوسف القفطي، تاريخ الحكماء: وهو مختصر الزوزني المسمى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبزيغ: ديتريخ، ١٩٠٣)، ص ٣٧١.

كانت قمم المثلثات المقابلة لأضلاع هذا المربع توصل بخطوط مستقيمة، وكانت أجزاء المثلثات التي تتجاوز هذه الخطوط تُقطع وتُستَعمل لتكميل شكل المربع المنوي بناؤه.

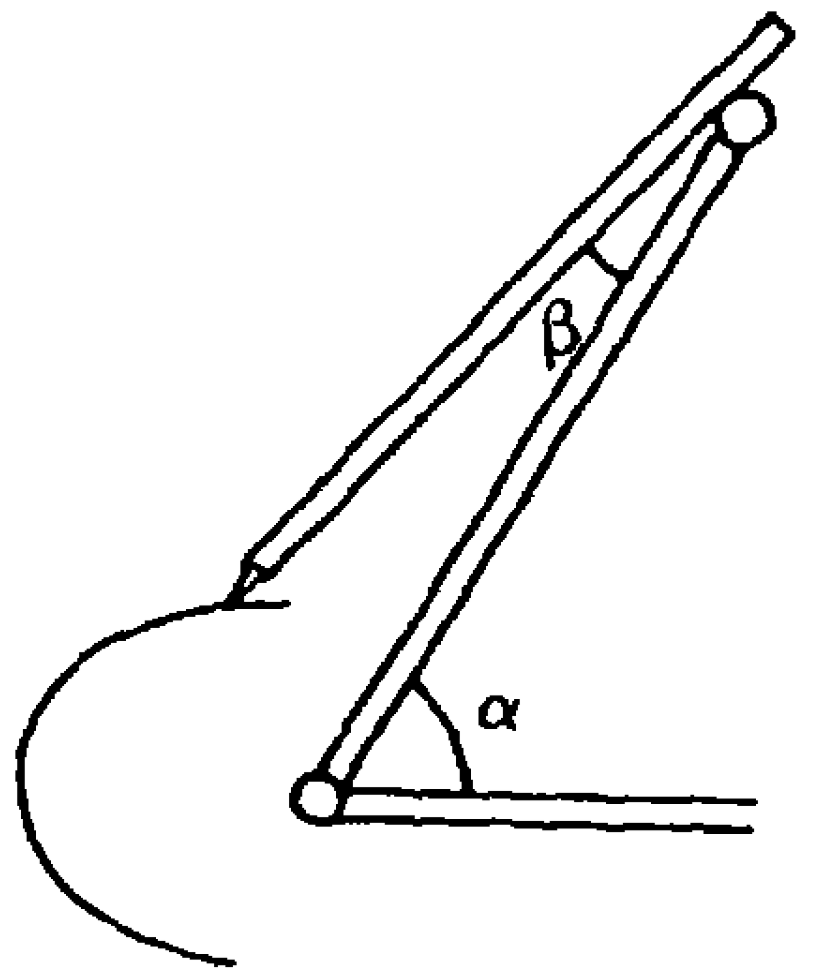
ويمكننا أيضاً ذكرُ بناء في الفضاء، نجد فيه أن ضلع المربع المبني يعادل قطر مكعب حافته مساوية لضلع المربع المعطى.

في كتابه **مقالة في رسم القطوع الثلاثة** بنى إبراهيم بن سنان بن ثابت (٩٠٨ - ٩٤٦م)، وهو حفيد ثابت بن قرة، قطوعاً مكافِئة (كما فعل الفارابي وأبو الوفاء)، وقطوعاً ناقصة وقطوعاً زائدة، وذلك بالتحديد البياني لعدد من نقاطها. واقترح مؤلفون آخرون بناءات متواصلة لقطوع مخروطية. فهكذا بنى الحسن، وهو أحد الإخوة بني موسى في مؤلفه **كتاب الشكل المدور المستطيل** قطوعاً ناقصة بالطريقة نفسها التي يستعملها البستانيون اليوم لرسم الأحواض الاهليلجية. والطريقة تقضي بأن يُربط حبل بمسمارين ويشد جيداً بمسمار آخر (الشكل رقم (١٤ - ٥))، وهذا الأسلوب مرتكز على التحديد (العصري) للقطع الناقص، والذي يقول إن مجموع المسافتين من أي نقطة من نقاطه إلى كل من البؤرتين، ثابت.

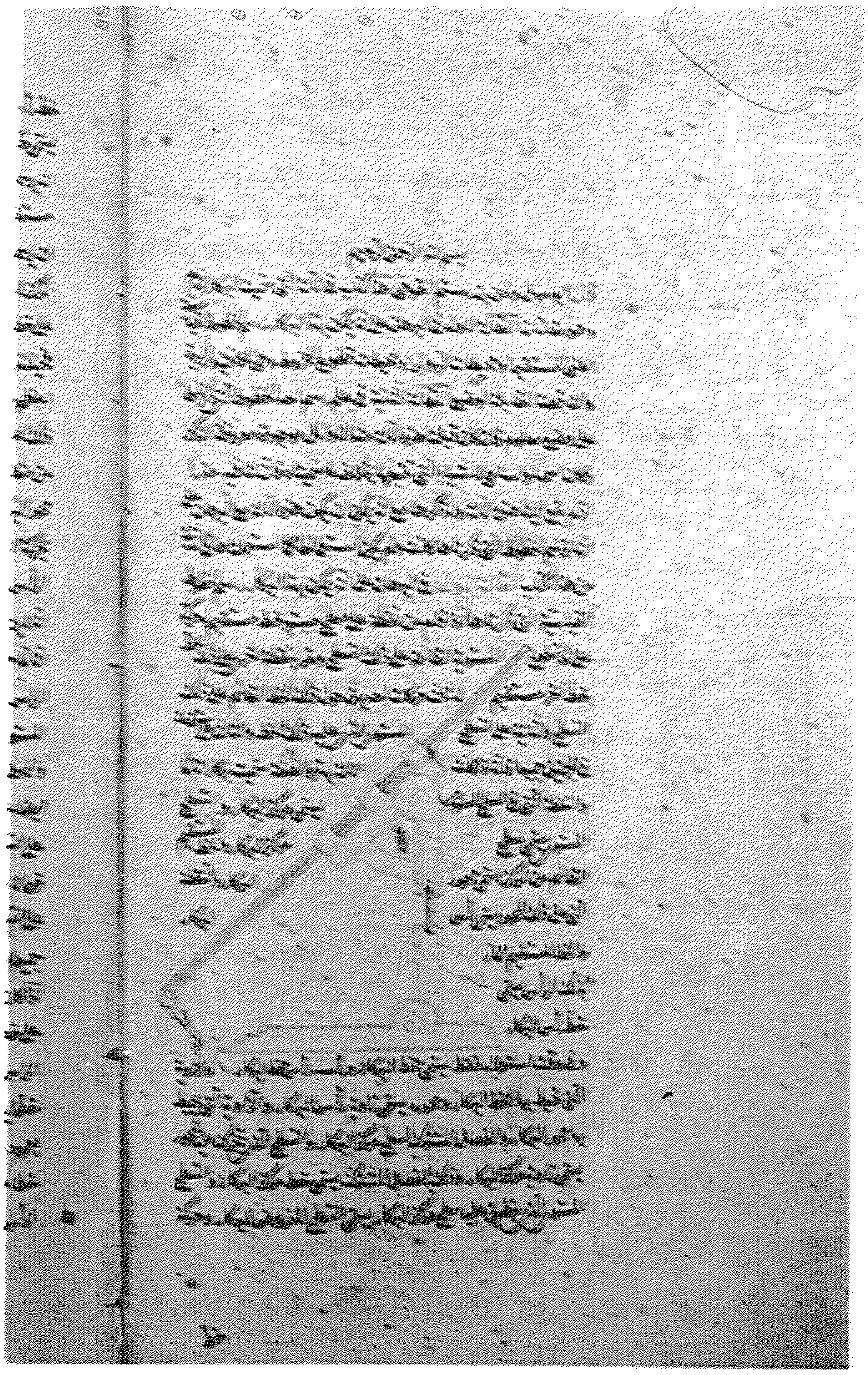


الشكل رقم (١٤ - ٥)

وتوصل ويجان القوهي (القرن العاشر - القرن الحادي عشر للميلاد) إلى تصميم آلة خاصة للبناء المتواصل لقطوع مخروطية. فللبركار التام، كما كان يسميه، ذراع ذو طول متغير بينما يُثبَّت الذراع الآخر مؤلِفاً زاوية ثابتة مع سطح الرسم (الشكل رقم (١٤ - ٦)). وعندما تُدار هذه الآلة، يُحدِد ذراعها الأول مساحة مخروطية، وتقاطُع هذه المساحة مع ذلك السطح يشكل قطعاً مخروطياً. فلنسمِّ الزاوية الثابتة α والزاوية الموجودة بين ذراعي البيكار β. فللقطع المخروطي حينئذٍ انحراف ε(excentricité): $\varepsilon = cos\alpha/cos\beta$. ففي حال $\alpha > \beta$ يكون القطع المخروطي إهليلجاً،



الشكل رقم (١٤ - ٦)



الصورة رقم (١٤ ـ ٢)

أبو سهل القوهي، **في البركار التام**

(القاهرة، مخطوطة المكتبة الوطنية، رياضة ٤١).

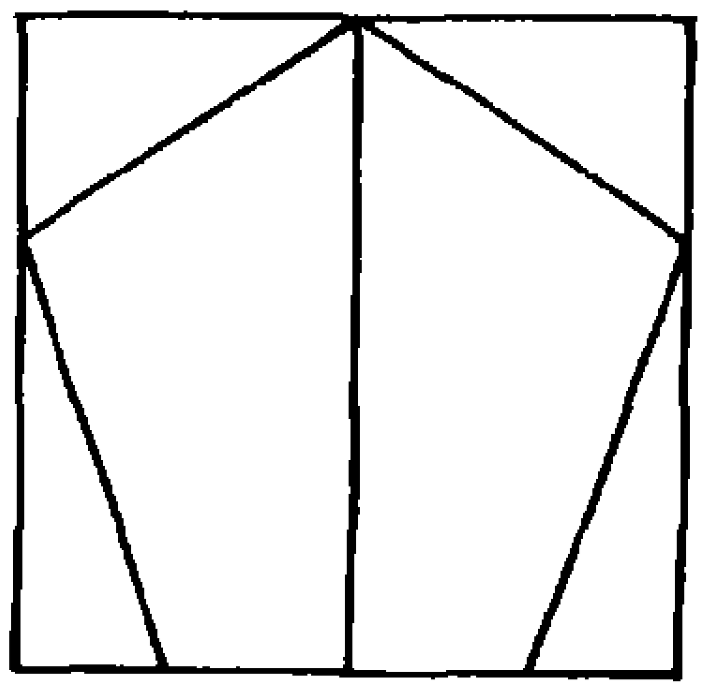
يدرس القوهي في هذا الكتاب إمكانية رسم المنحنيات المخروطية بهذا البركار، كما أنه يصوغ نظرية هذه المنحنيات إذا اعتبرت على وضع معلوم، وهي دراسة هندسية على مستوى عالٍ بالنسبة للعصر.

وفي حال $\beta = \alpha$ يكون قطعاً مكافئاً، وأخيراً في حال $\beta > \alpha$ يكون قطعاً زائداً؛ ولقد وصف القوهي هذه الآلة في مؤلفه **في البركار التام** والعمل به.

ولقد كُشف مُؤَخراً عن أن ابن سهل، وهو عالم رياضيات من بغداد، بنى نظاماً آلياً لرسم قطوع مخروطية بشكل متواصل(٥).

وتعمّد المغربي الحسن المراكشي (ت ١٢٦٢م)، الذي عاش في القاهرة تكريس جزء من كتابه الموسوعي **كتاب جامع المبادئ والغايات** لبناء الأدوات الهندسية واستعمالها لبناءات هندسية، وأعطى في هذا الجزء وصفاً لعدد كبير من هذه البناءات.

وبين الأعمال العديدة المتعلقة ببناء المضلعات المنتظمة ذات السبعة أضلاع علينا التنويه بمؤلف **رسالة في عمل ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة** للقوهي، وبكتاب **مقالة في المسبع في الدائرة** لأبي علي ابن الهيثم. وكان بناء المضلع المنتظم ذي التسعة أضلاع يتم عادة بتثليث زاوية قدرها 60°. وفي المجال نفسه نلحظ أيضاً **رسالة في عمل مخمس متساوي الأضلاع في مربع معلوم**. وفي هذا الكتاب يبني المؤلف مخمساً متساوي الأضلاع، لكنه غير منتظم. وهذا المخمس محاط بمربع بالطريقة التالية: القمة الأعلى للمخمس تقع على وسط الضلع الأعلى للمربع؛ وضلعا المخمس المتصلان عند هذه القمة ينتهيان على الأضلاع الجانبية للمربع؛ والقمتان الأُخريان توجدان على الضلع الأسفل للمربع (الشكل رقم (١٤ ـ ٧)). وهذه المسألة يُمكِن تحويلها إلى معادلة من الدرجة الرابعة، تُحل بواسطة تقاطع قطعين زائدين.



الشكل رقم (١٤ ـ ٧)

أسس الهندسة

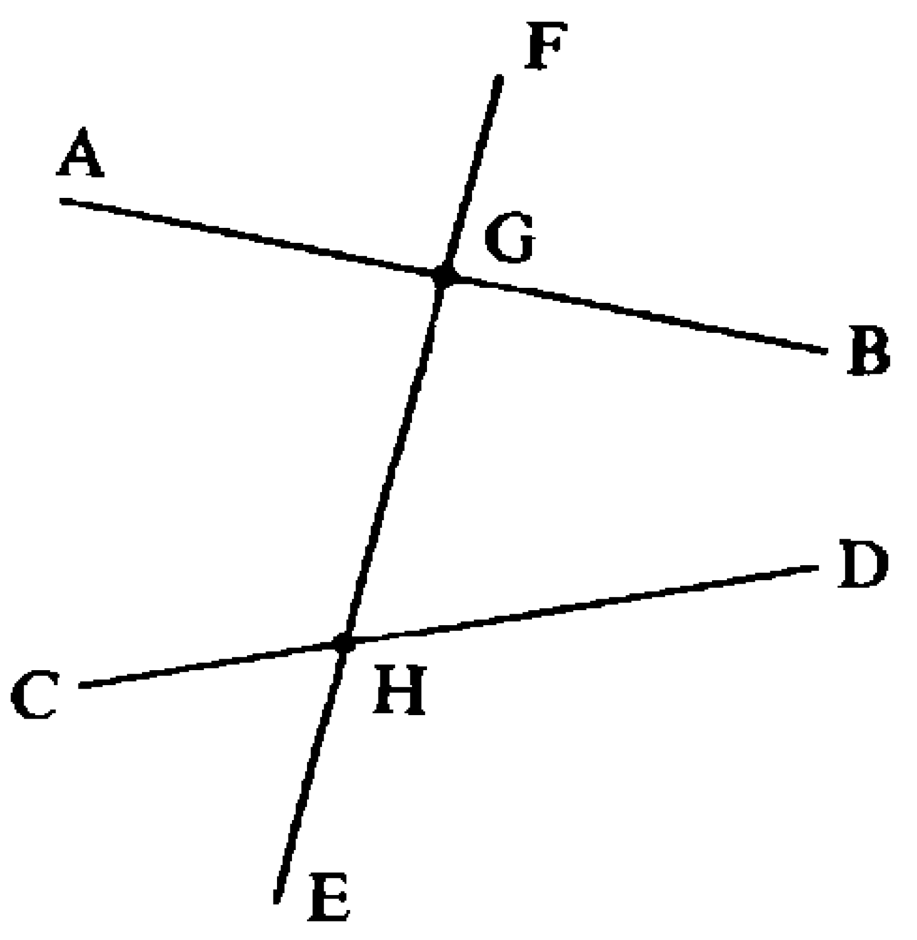
يقدم كتاب **الأصول** لإقليدس العرض الأول المنهجي المهم للهندسة القائم على تحديدات وموضوعات. نجد التحديدات في بداية معظم الكتب الثلاثة عشر التي تؤلف **الأصول**. وهكذا، في بداية الكتاب الأول يعطي إقليدس التحديدات لمختلف عناصر الهندسة المستوية: «١ ـ النقطة هي ما ليس له جزء. ٢ ـ الخط هو طول دون عرض... ٤ ـ الخط المستقيم هو خط قائم بالتساوي على نقاطه. ٥ ـ السطح هو ما ليس له غير الطول والعرض... ٧ ـ السطح المستوي هو سطح قائم بالتساوي على كل خطوطه المستقيمة»(٦).

---

(٥) انظر: Roshdi Rashed, «A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses,» *Isis*, vol. 81, no. 308 (September 1990), pp. 464-491.

(٦) انظر: Euclide, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vols. 1-3, translated and commented by T. L. Heath (Cambridge: [n. pb.], 1926), vol. 1, p. 153.

ويحدد إقليدس أيضاً الزاوية وأنواعها؛ والشكل المستوي، والدائرة، مع مركزها وقطرها؛ والمضلع؛ وأنواع المثلثات ورباعيي الأضلاع؛ والخطوط المتوازية.



الشكل رقم (١٤ ـ ٨)

ويتابع الكتاب الأول تعداد الموضوعات التي من بينها يميز إقليدس «المصادرات» عن «المفاهيم العامة». وهذه الأخيرة تدعى غالباً موضوعات[٧]. فالمصادرات تعطي الخصائص الأساسية للبناءات الهندسية المرسومة بالمسطرة والبيكار التامين. المصادرتان الأولى والثانية تقولان إنه من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين ما وأنه بالإمكان تمديد هذا الخط إلى ما لا نهاية. المصادرة الثالثة تنص على أنه بالإمكان رسم دائرة يكون مركزها أي نقطة مهما كان شعاع هذه الدائرة. وحسب المصادرة *IV*، فإن كل الزوايا المستقيمة متطابقة. والمصادرة *V*، وهي أصل نظرية الخطوط المتوازية (انظر الفقرة (٦) فيما يلي)، هي الأكثر تعقيداً. وهذه المصادرة تُقرَأ هكذا: «إذا كان خط مستقيم (*EF* كما في الشكل رقم (١٤ ـ ٨)) يتقاطع مع خطين مستقيمين (*AB* و*CD*) موجودين في المستوي، حيث يوجد الخط (*EF*)، وإذا كان هذا الخط يكوّن زوايا داخلية ومن جهة واحدة (*BGH* و*GHD*) أقل من زاويتين قائمتين، فإن الخطين (*AB* و*CD*) الممتدين إلى ما لا نهاية يتقاطعان من جهة (*BD*) التي تقع فيها الزاويتان الأقل من زاويتين قائمتين»[٨].

و«المفاهيم العامة» أو الموضوعات الحقة (الصادقة)، تجعل المقارنة بين الكميات ممكنة. وهذه الموضوعات هي التالية:

١ ـ الكائنات المساوية لنفس الكائن، تتساوى فيما بينها.

٢ ـ إذا أضفنا كائنات متساوية لأخرى متساوية، فإن الحواصل تكون متساوية.

٣ ـ إذا طرحنا كائنات متساوية من أخرى متساوية فإن الباقية متساوية.

٤ ـ الكائنات المتطابقة مع كائن (واحد) تكون متساوية.

٥ ـ الكل أكبر من الجزء[٩].

---

(٧) فيما يختص بنظام المصادرات والموضوعات، فالنسخات الموجودة عن **الأصول** (وأقدمها يعود إلى القرن التاسع) تحتوي على نصوص مختلفة. وعلى الأخص، وفي بعض المخطوطات، تسمى المصادرة الخامسة بالموضوعة الحادية عشرة. نتقيد هنا بنص ج. ل. هايبرغ (J. L. Heiberg) أواخر القرن التاسع عشر، والمقبول الآن بشكل عام.

(٨) انظر: المصدر نفسه، ج ١، ص ١٥٥.

(٩) المصدر نفسه.

ومن وجهة النظر الحديثة، فإن هذا النظام من المقدمات ما زال غير كافٍ لبناء الهندسة الفضائية المألوفة، أي التي وُضِعَت في كتاب **الأصول** لإقليدس والمسماة إقليدسية. ولم يتمكن علماء الرياضيات من تقديم نظام كامل لهذه الهندسة قبل بداية القرن التاسع عشر. وتقديم مثل هذا النظام اقتضى المراجعة التامة لكل نظام المقدَّمات الإقليدسية، ولقد تسبب بهذه المراجعة اكتشاف الهندسة «الزائدية القطع» للوباتشفسكي (Lobachevski)، حيث يجري التسليم بكل موضوعات الفضاء الإقليدسي ما عدا المصادرة V؛ كما تسببت بهذه المراجعة هندسات أخرى «غير إقليدسية».

ولكن التحليل النقدي لتحديدات إقليدس ولموضوعاته يعود لعدة قرون. فلقد وسّع العلماء العرب نظرية عامة تتعلق بالكسور والتناسبات حلت محل النظرية التي ذُكِرَت في الكتاب الخامس من **الأصول**.

وكان العديد من علماء العصور القديمة والعصور الوسطى قد اهتم بشكل خاص بالمصادرة V منذ صياغتها بالطريقة المركبة التي رأينا عند إقليدس، مع الإشارة إلى ازدياد في هذا الاهتمام منذ البرهان المُعطى من قِبَل إقليدس للقضية العكسية (القضية ٢٨ من الكتاب الأول **لأصوله**[١٠] دون العودة إلى المصادرة. فمنذ العصور القديمة، حاول مؤلفون، مدفوعون بتعقيد المصادرة V وعدم وضوحها، إقامة الدليل عليها كمبرهنة. سنتكلم فيما بعد عن هذه المساعي التي جرت في العصور القديمة وفي الرياضيات العربية؛ ولكن لنلاحظ منذ الآن، أن نصير الدين الطوسي (١٢٠١ ـ ١٢٧٤م)، أحد علماء الرياضيات العرب الذين درسوا هذه المسألة، اعتبر أن مراجعة أكثرُ جذرية لأنظمة «المفاهيم العامة» وللمصادرات باتت ضرورية. فقد ذكر في بداية كتابه ***تحرير إقليدس*** أنه تكلم أولاً عما هو ضروري: فمن المفروض أن توجد النقطة والخط والخط المستقيم والسطح المستوي والدائرة، وأن يمكن اختيار نقطة على خط أو على سطح ما، وأن نأخذ خطاً على أي سطح أو يكون ماراً بأي نقطة[١١]. وهكذا أوحى الطوسي بإكمال نظام المقدمات الأولية لإقليدس بموضوعات جديدة تتعلق بوجود النقاط والخطوط والخطوط المستقيمة وغيرها من الأشكال الهندسية التي حددها إقليدس في السطور الأولى من الكتاب الأول من **الأصول**.

وقد وُسعت أفكار الطوسي في مؤلف كتاب ***تحرير الأصول لإقليدس*** الذي نُشِر بالعربية (روما ١٥٩٤م) باسمه. إلا أن المؤلِّف الحقيقي قد أكمل الكتاب فعلاً في العام ١٢٩٨م، بعد أربع وعشرين سنة من وفاة الطوسي. ومن المؤكد أن هذا المؤلِّف كان ينتمي إلى مدرسة الطوسي، وكما يبدو كان واحداً من آخر تلامذته. ومن المرجح أن هذا المؤلف هو ابن

---

(١٠) إذا قُطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث تكون الزاويتان الداخلة والخارجة (أو أيضاً المتقابلتان) متساويتين فهذان الخطان متوازيان. (المترجم).

(١١) نصير الدين محمد بن محمد الطوسي، *تحرير إقليدس في علم الهندسة* (طهران: [د. ن.]، ١٢٩٢ هـ/ ١٨٨١م)، ص ٣.

الطوسي، صدر الدين الذي بعد وفاة والده، أخذ على عاتقه مسؤولية مرصد مَراغة. ومن المحتمل أن يكون الكتبة الذين أعادوا كتابة المخطوطة الأصلية، وعند إعداد الطبعة الرومانية، قد أسقطوا سهواً، وبسبب الشهرة الواسعة لنصير الدين الطوسي، الاسمين الأولين للمؤلف الحقيقي: صدر الدين ابن خواجه نصير الدين الطوسي. وبعد اقتناعهم بأن هذا المؤلف قد أُكمل بعد وفاة الطوسي، أطلق العلماء عليه إجمالاً اسم **شرح إقليدس للطوسي المزعوم**.

وبخلاف **تحرير إقليدس** للطوسي نفسه، فإن هذا الكتاب يصوغ، وبوضوح، الموضوعات المتعلقة بوجود الكائنات الهندسية، ويعتبر هذه الموضوعات كمصادرات جديدة؛ وبعد ذلك يُعطي البراهين على كل مصادرات إقليدس (نناقش البرهان على المصادرة *V* في الفقرة التالية «نظرية المتوازيات»). ونشير أيضاً إلى أن مصادرات وجود الكائنات وبراهين مصادرات إقليدس موجودة في القسم الهندسي من كتاب **درة التاج لغرّة الديباج** وهو عمل موسوعي عائد لقطب الدين الشيرازي (القرن الثالث عشر والرابع عشر)، وقطب الدين تلميذ للطوسي.

ويُعتبر ابن الهيثم، في كتابيه المكرسين لشرح **الأصول** والتعليق عليها وهما: **كتاب شرح مصادرات كتاب إقليدس في الأصول** و**كتاب في حل شكوك كتاب إقليدس في الأصول وشرح معانيه**، أولَ عالِم رياضيات عربي عمل على صياغة المسألة المتعلقة بالكائنات الهندسية. واستناداً إلى كتابه الأول، ذكر ابن الهيثم في كتابه الثاني أنه قد تم التأكد، في مقدمة شروحاته، من الوجود الرياضي لكميات مثل المجسمات والمساحات والخطوط ومن أنها موجودة في عين الفكر وهذا الوجود كائن بغضِ النظر عن الأجسام الملموسة[١٢]. وقد وضّح أن التمعن في وجود الأشياء هو شأن الفلاسفة أكثر منه شأن علماء الرياضيات[١٣]. وتابع مؤكداً أن الأشياء الموجودة تقسم إلى فئتين: الأشياء التي توجد بالحواس، والأشياء التي توجد في المخيلة أو بالتجريد، لكن الأشياء التي توجد بالحواس غير قائمة حقيقة، لأن الحواس غالباً ما تخدع المراقب دون أن يتمكن من كشفها... بينما الأشياء الموجودة في المخيلة هي موجودة حقاً وعلى الإطلاق، لأن الشكل المُصاغ في الخيال حقيقي بما أنه لا يختفي ولا يتبدل[١٤].

نظرية المتوازيات

إن الأبحاث حول نظرية المتوازيات، التي سعت لبرهنة مصادرة إقليدس المتعلقة بالموضوع، قد لعبت دوراً هاماً واستثنائياً في تاريخ الهندسة. إن التعقيد الذي رافق صياغة

---

(١٢) انظر: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، **كتاب في حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه**، صورة فوتوغرافية عن مخطوطة اسطنبول (فرنكفورت ـ أم ـ مان: [د.ن.]، ١٩٨٥)، ص ٧.

(١٣) المصدر نفسه، ص ٦.

(١٤) المصدر نفسه، ص ٢٠ ـ ٢١.

هذه المصادرة بالمقارنة مع غيرها ربما يدل على أنها أُضيفَت إلى الأخريات في وقت لاحق، ومهما يكن، فإن هذه المصادرة أو أي نص مكافئ، ضروريان لبرهنة عدد من المبرهنات التي تتعلق بالمثلثات الموجودة في الكتاب الأول من **الأصول**، وكذلك مبرهنة فيثاغورس التي تتوج الكتاب الأول؛ ولهذا السبب تبدو تلك البرهنة إلزامية لكل نظرية التشابه المشروحة في الكتاب السادس من **الأصول**. وأسلاف إقليدس أنفسهم فتشوا ظاهرياً، في القرن الرابع قبل الميلاد، عن مصادرة أكثر بديهية وأكثر إقناعاً لتشكل القاعدة لنظرية المتوازيات.

يمكننا الاعتقاد، وحسب ما قال أرسطو(١٥)، أنه في أيامه، وحتى قبل ذلك، سعى علماء لبرهنة هذه، أو تلك، من القضايا المُكافئة للمصادرة V. وليس مستحيلاً أن يكون أرسطو نفسه قد قدم عرضاً خاصاً لإحدى هذه القضايا. وعلى كل حال، ذكر عمر الخيام في كتابه **شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس** أن سبب الخطأ الذي ارتكبه علماء لاحقون في برهان هذه المقدمة (مصادرة إقليدس الخامسة) يعود إلى أنهم لم يعيروا الانتباه للمبادئ المقتبسة عن الفيلسوف (أي أرسطو). وقد قدم عمر الخيام خمسة من هذه المبادىء:

«(١) يُمكن تقسيم الكميات إلى ما لا نهاية أي أنها لا تُقسم إلى أجزاء لا انقسامية؛ (٢) يمكن رسم خط مستقيم إلى ما لا نهاية؛ (٣) الخطان المستقيمان المتقاطعان ينفرجان ويتباعدان بابتعادهما عن رأس زاوية تقاطعهما؛ (٤) الخطان المستقيمان المتقاربان يتقاطعان ومن المستحيل على خطين مستقيمين متقاربين أن يتباعدا في نفس اتجاه تقاربهما؛ (٥) يمكن مضاعفة الكمية الصغرى من بين كميتين غير متساويتين ومحدودتين بحيث تتجاوز الكمية الكبرى»(١٦).

سنناقش فيما بعد مقولة أرسطو المتكافئة مع المبدأ ١. ونسلّم أيضاً بأن أعماله تحتوي على المقولات المتكافئة مع المبادئ ٢ و٣ و٥. أما المبدأ ٤، أو بالأحرى، كل من بيانَيه، فهو متكافئ مع مصادرة إقليدس الخامسة ومن الممكن أن يكون أرسطو قد اقترح هذا المبدأ في مؤلف لم يصلنا. وحسب المصادرة V، فشرط التقاطع بين خطين مستقيمَين مرسومَين هو أن تكون مجموعة الزوايا الداخلية من جهة واحدة (الزوايا BGF وEHD على الشكل رقم (١٤ ـ ٨)) أقل من زاويتين مستقيمتين؛ بينما في الاقتراح المقابل في المبدأ ٤ فإن الخطينْ AB وCD يقتربان باتجاه B (أو D).

---

(١٥) انظر: Aristoteles, *The Works of Aristote*, translated into english under the editorship of W. D. Ross, 12 vols. (Oxford: Oxford University, 1928-1952), vol. 9, p. 65a.

(١٦) انظر: عمر الخيام، **رسائل الخيام الجبرية**، تحقيق وتحليل رشدي راشد وأحمد جبار، مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣ (حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، ص ١١٩ ـ ١٢٠ و٤١ ـ ٤٢.

وعلى حدِ علمنا، أن العمل الأول، ما بعد إقليدس، المكرس لنظرية الخطوط المتوازية هو مقالة أرخميدس المفقودة «خطوط متوازية». فالمؤرخ العربي القفطي يذكرها تحت عنوان **كتاب الخطوط المتوازية** بين كتابات أخرى للعالِم متيسرة حينئذٍ في الترجمات العربية. حاول كل من بوزيدونيوس (Posidonius) (القرن الثاني ـ الأول قبل الميلاد) وبطلميوس (Ptolémée) (القرن الثاني للميلاد) وبروكلس (Proclus) (القرن الخامس) وأغانيس (Aghânis) وسمبليسيوس (Simplicius) (القرنان الخامس والسادس) برهنة المصادرة V. ونجد برهان أغانيس في التفسير الذي أعطاه عالم الرياضيات العربي النيريزي (ت ٩٢٢م) عن كتاب **الأصول** لإقليدس. بدأ كلٌ من بوزيدونيوس وأغانيس بتحديد الخطوط المتوازية كخطوط موجودة على المسطح (أي المستوي) نفسه، تفصل بينها مسافة ثابتة (وحسب إقليدس، لا تتقاطع الخطوط المتوازية في مسطحها المشترك إذا رسمت في أحد الاتجاهين أو الآخر).

وبما أن احتمال وجود خطوط كهذه هو نتيجة المصادرة V وبعض من موضوعات أخرى من الهندسة الإقليدسية، كان لا بُد لمحاولات برهنة المصادرة أن تستعين ضمناً بقضية مكافئة لهذه المصادرة.

وفي الشرق العربي، يبدو أن عباس الجوهري، وهو معاصر للخوارزمي، كان أول من سجّل مأخذاً على المصادرة V. ففي كتابه **إصلاح لكتاب الأصول** افترض عباس الجوهري أنه بالإمكان، وعبر نقطة ما داخل الزاوية، رسم خط يتقاطع مع ضلعيها. وفيما بعد، استعان عدة هندسيين بهذا الإعلان لبرهنة المصادرة الخامسة. والواقع أن هذا الإعلان متكافئ مع تلك المصادرة، ولا يمكن برهنته بواسطة موضوعات إقليدس الأخرى.

بعد هذه المحاولة للجوهري ببضع عشرات من السنين، اقترح ثابت بن قرة برهانين مختلفين للمصادرة الخامسة. نجد أحد البرهانَيْن في مؤلفه **كتاب في أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فسيرى الزاويتين اللتين في جهة واحدة أقل من قائمتين فإن الخطين إذا أُخرجا في تلك الجهة التقيا** (بعض النسخ المخطوطة عن هذا المؤلف تحمل ببساطة العنوان: **مقالة في برهان المصادرة المشهورة من إقليدس**). ونجد البرهان الآخر في كتاب **مقالة في أن الخطين إذا أُخرجا إلى الزاويتين أقل من القائمتين التقيا**.

يرتكز برهانه الأول على الافتراض الذي يقول: إذا برسمهما باتجاه معين، تقارب خطان مقطوعان بخط ثالث (أو تباعدا)، فإنهما يتباعدان (أو يتقاربان)، توالياً، في الاتجاه الآخر.

وبواسطة هذه المقولة برهن ثابت بن قرة وجود متوازي الأضلاع، ومن هنا استنتج المصادرة الخامسة. نعلم الآن، وحسب الهندسة الزائدية القطع للوباتشفسكي التي أبْعَدَت هذه المصادرة (على الرغم من احتفاظها بالموضوعات الأخرى للنظام الإقليدسي) أن هناك «خطوطاً متباعدة»، تتباعد الواحدة عن الأخرى في كل من الاتجاهين انطلاقاً من خطهما العمودي المشترك. وعلى العكس، ففي نهايات الهندسة الإهليلجية لريمان (Riemann)،

التي سلّمت بالمصادرة V وأهملت موضوعات أخرى من الهندسة الإقليدسية، فإنه أياً يكن الخطان المستقيمان، فهما يقتربان ويتقاطعان، هنا أيضاً في اتجاه ما وفي الآخر انطلاقاً من خطهما العمودي المشترك.

في مؤلفه الثاني، بدأ ثابت بن قرة بافتراض مختلف تماماً. فبالنظر إلى «حركة بسيطة»، أي حركة انسحاب منتظمة على امتداد خط مستقيم ما (انسحاب متوازٍ) لجسم ما (مثلاً، لقطعة مستقيمة عمودية على الخط)، اعتبر أن كل نقاط الجسم (أي القطعة) ترسم خطوطاً مستقيمة. ويستنتج وجود خطوط مستقيمة متساوية البعد. ومع ذلك، فإن افتراضه ليس صحيحاً، في الحقيقة، إلا في الهندسة الإقليدسية. في حين، وحسب الهندسة الزائدية القطع للوباتشفسكي، فإن النقاط المتحرِكة بالانسحاب على امتداد خط مستقيم ترسم أقواساً من خطوط منحنية، يُقال إنها متساوية البعد، أو ترسم «ملتقيات نقط» (أمكنة هندسية) واقعة على مسافة متساوية من الخطوط المستقيمة.

بافتراضه هذا، برهن ثابت بن قرة(١٧) على وجود المستطيل، واستنتج من هنا المصادرة الخامسة. ولنذكر أن المؤرخ والفلكي السوري ابن العبري، الملقب ببرهيبراوس (Bar Hebraeus) (١٢٢٦ ـ ١٢٨٦م) في كتابه التأريخي **مختصر تاريخ الدول** وعند تحريره للائحة الأعمال السريانية لثابت بن قرة، ذكر مؤلَّفيه الاثنين عن الخطوط المتوازية(١٨). فمن الممكن أن يكون ثابت بن قرة وقبل إقامته في بغداد، قد كتب أعماله بالسريانية في الأصل، ثم قام بنفسه فيما بعد بترجمتها إلى العربية.

ويُعطي ابن الهيثم فيما بعد استنتاجاً مبتكراً للمصادرة الخامسة في كتابه **شرح مصادرات إقليدس**. ويبدأ بدراسة حركة خط عمودي على امتداد خط مستقيم. وانطلاقاً من تبنيه مفهوم «الحركة البسيطة» التي ارتكز عليها ثابت بن قرة، برهن ابن الهيثم أن طرف الخط العمودي الذي يبقى طرفه الآخر على نفس الخط، يرسم خطاً مستقيماً. ويعلن أن كل نقاط الخط العمودي ترسم خطوطاً متساوية ومتشابهة، وبما أن طرف هذا الخط يتحرك على امتداد خط مستقيم، فإن الطرف الآخر يتحرك بالمثل. ولنذكّر مع ذلك (انظر أعلاه) بأن الفرضية القائلة بأن كل النقاط المتحركة بانسحاب على امتداد خط مستقيم ترسم خطوطاً متساوية ومتشابهة، هي مقولة متكافئة مع مصادرة إقليدس الخامسة.

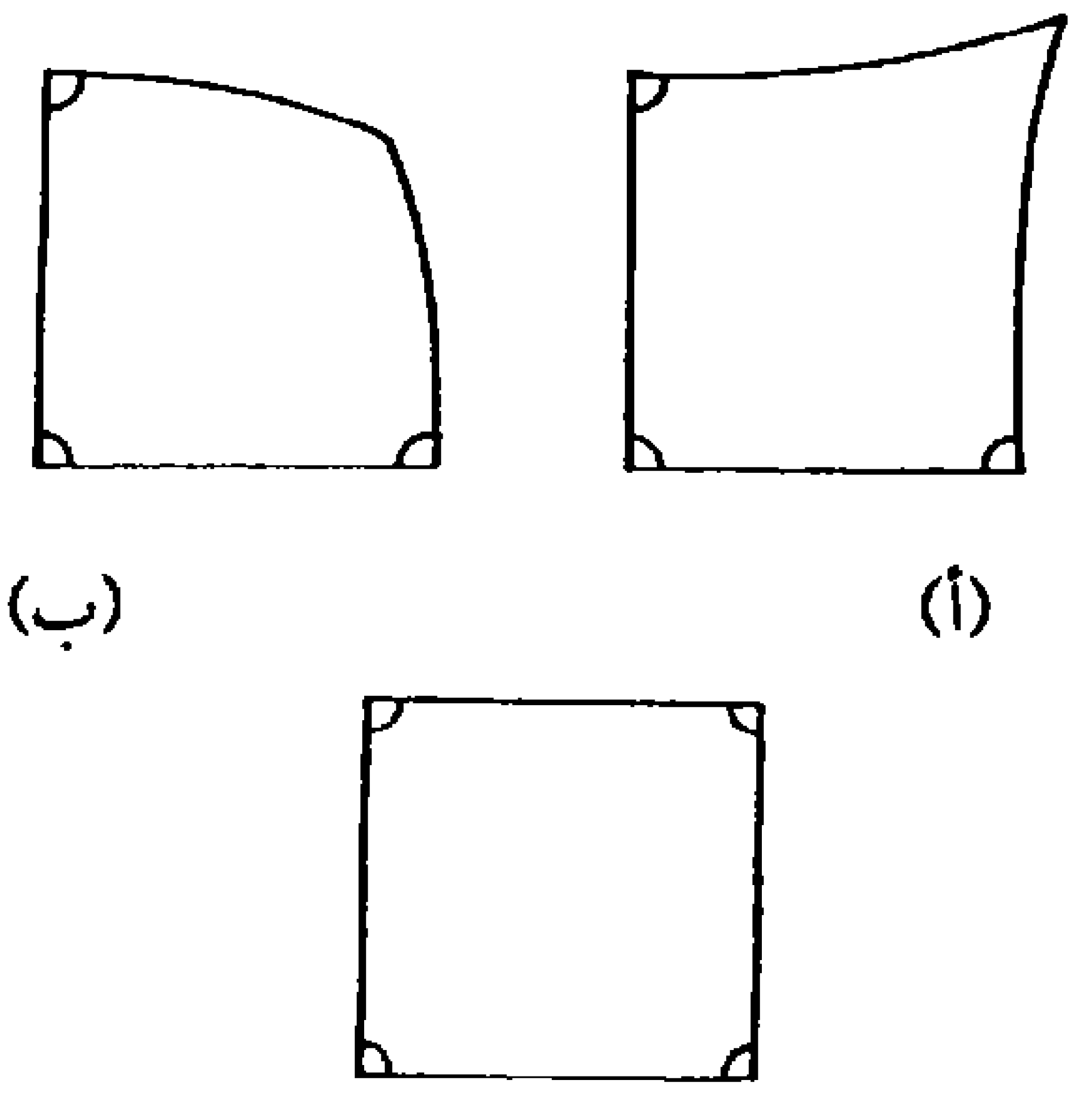
يكمن تجديد ابن الهيثم في إدخاله مضلعاً رباعياً فيه ثلاث زوايا قائمة. وقد استخدم

---

(١٧) انظر: Christian Houzel, «Histoire de la théorie des parallèles,» dans: Roshdi Rashed, ed., *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique* (Paris: Editions du CNRS, 1991), pp. 163 - 179.

(١٨) انظر: G. Bar Hebraeus, *Gregorii Abulpharagii sive Bar-Hebraei Chronicon Syriacum,* noté par Paulus Iacobus Bruns; édité par Georgius Guilielmus Kirsch, 2 vols. (Lipsiae: Apud Adamum Friedericum Boehmium, 1789), p. 180.

ج. هـ. لامبرت (J. H. Lambert) (الذي أتينا على ذكره سابقاً) مثل هذا المضلع الرباعي فيما بعد في محاولة لبرهان المصادرة V. وبإمكان الزاوية الرابعة من «مضلع لامبرت الرباعي» أن تكون حادة أو منفرجة أو قائمة (الشكل رقم (١٤ ـ ٩)). وكان ابن الهيثم يرفض الاحتمالين الأولين مستخدماً مبرهنته القائلة إن النقطة القصوى للخط العمودي المتحرك ترسم خطاً مستقيماً. فبعد تقديم البرهان على وجود رباعي الأضلاع، يستنتج، بسهولة، المصادرة الخامسة. وبالفعل، فإن الفرضيتين المرفوضتين تشكلان مبرهنتين هندسيتين: الأولى من هندسة القطع الزائد، والثانية من الهندسة الإهليلجية.



(أ) (ب) (ج)

الشكل رقم (١٤ ـ ٩)

ونذكر بشكل خاص أن ابن الهيثم، ببرهانه تقاطع خطين مرسومين على نفس الخط، الأول منهما عمودي والثاني مائل، قد صاغ فرضية مهمة اعتبرها بديهية. ففي العام ١٨٨٢م، قدم الهندسي الألماني م. باش (M. Pasch) هذه الفرضية على أنها موضوعة أساسية: إذا مدّدنا بما فيه الكفاية خطاً مستقيماً موجوداً مع مثلث على مستوٍ واحد وإذا كان هذا الخط يتقاطع مع أحد أضلاع المثلث، فبتقديره، ان هذا الخط المستقيم سيتقاطع مع ضلعٍ ثانٍ من المثلث أو أنه سيمر عبر القمة المقابلة للضلع الأول. وقد استخدم نصير الدين الطوسي الاقتراح عينه في نظريته المتعلقة بالخطوط المتوازية.

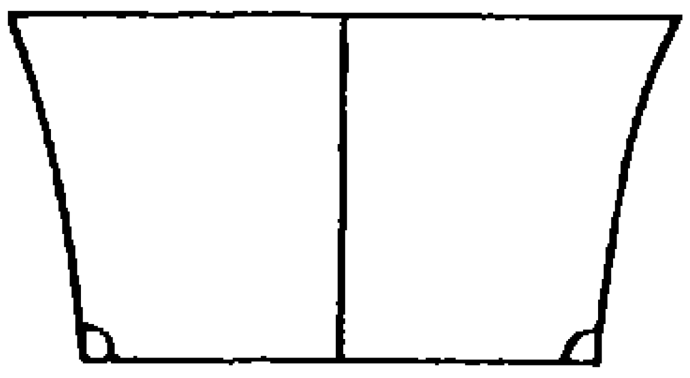
وهكذا، بمحاولتهما برهنة المصادرة V، ارتكب ثابت بن قرة وابن الهيثم، وكذلك أسلافهما في الواقع الخطأ المنطقي الذي لحظه أرسطو في «المصادرة على قول» (petitio principi).

لامس ابن الهيثم أيضاً نظرية الخطوط المتوازية في مؤلفه الثاني المكرس لشرح **الأصول** وهو **كتاب حل شكوك إقليدس في الأصول**. ومع ذلك فقد اكتفى في كتابه هذا بالإحالة إلى كتابه الأول، وبالملاحظة أنه بالإمكان استبدال المصادرة V بأخرى تكون أكثر حتمية وأكثر ملامسة لإدراكنا، وهي أنه لا يمكن لخطين مستقيمين متقاطعين أن يكونا موازيين لنفس الخط المستقيم[19].

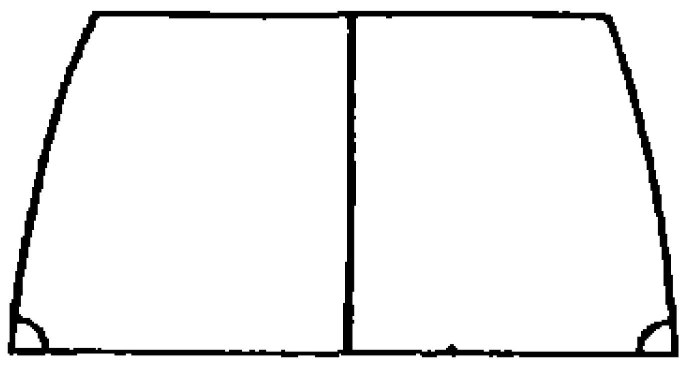
أما عُمر الخيام في القسم الأول من كتابه **شرح ما أشكل من مصادرات كتاب**

---

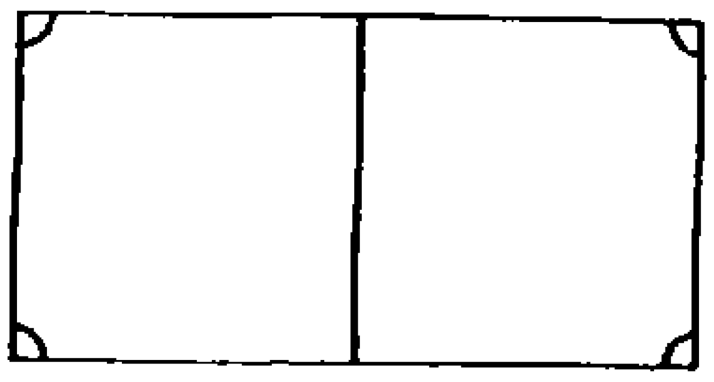
(١٩) ابن الهيثم، **كتاب في حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه**، ص ٢٥.



(أ)



(ب)



(ج)

الشكل رقم (١٤ ـ ١٠)

إقليدس، فقد انتقد برهان ابن الهيثم واستبدله بآخر. رفض الخيام استعمال الحركات في الهندسة وبرهن المصادرة V بالاستناد إلى مصادرة أخرى واضحة اعتبرها أكثر بساطة، وهي المبدأ الرابع من الخمسة «المبادئ العائدة للفيلسوف» (أرسطو). وهكذا، تجنب الخيام الخطأ المنطقي الذي ارتكبه أسلافه. وفيما بعد، استخدم رباعي أضلاع له زاويتان قائمتان عند قاعدته وله أضلاع جانبية متساوية ودرس الاحتمالات الثلاثة الممكنة للزاويتين المتساويتين الباقيتين (الشكل رقم (١٤ ـ ١٠))؛ وقدم ج. ساكيري (G. Saccheri) (١٦٦٧ ـ ١٧٣٣م) رباعي الأضلاع ذاته، في نظريته عن الخطوط المتوازية؛ لذلك يدعى هذا الشكل غالباً باسم عالِم الرياضيات الإيطالي هذا). وكان ابن الهيثم، استناداً إلى مبدئه الذي أتينا على ذكره سابقاً، قد دحض إمكانية أن تكون تلك الزوايا حادة أو منفرجة وبرهن المصادرة الخامسة.

واندفع البيروني أيضاً في نظرية الخطوط المتوازية. وفي لائحة أعماله، التي جمعها بنفسه، نجد كتاب **مقالة في أن لوازم تجزيء المقادير إلى ما لا نهاية قريبة من أمر الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان في الاستبعاد**.

ويحتوي مقطع اكتُشف حديثاً من مؤلف البيروني على استدلال يعقوب الكندي، الذي، بارتكازه على وجود الخطوط المتوازية، برهن أنه بالإمكان تجزئة الكميات إلى ما لا نهاية؛ كذلك يضم المقطع أفكار المؤلف الخاصة عن المسألة، ولهذا السبب يُعتقد أن هذا المقطع ينتمي إلى المؤلف المذكور. وبما أن الخيام، وعند «برهانه» المصادرة الخامسة، قد استعمل المبدأ الرابع والأول لأرسطو، مرتكزاً على الكميات المتجزئة إلى ما لا نهاية، فإنه من المعقول الاستنتاج بأن الخيام كان على معرفة بأعمال الكندي والبيروني.

ولا شك بأن حسام الدين السالار (ت ١٢٦٢م) قد قرأ مؤلف الخيام. فلقد عمل أولاً في خوارزم، وبعد استيلاء المغول على هذا البلد، أكمل في بلاط جنكيزخان وخلفائه ومنهم هولاكوخان. كتب السالار **مقدمات لتبيان المصادرة التي ذكرها إقليدس في صدر المقالة الأولى في ما يتعلق بالخطوط المتوازية**. فيظهر من محاولته العرجاء لبرهان المصادرة V (التي ارتكب فيها خطأً جلياً) كما يظهر من برهانه لمبدأ أرسطو الثالث، الذي استخدمه الخيام، أن مؤلَّف هذا الأخير كان معروفاً من السالار.

كان نصير الدين الطوسي على علم هو أيضاً بمؤلف الخيام وربما أيضاً بعمل السالار. فلقد عمل مع السالار في مرصد مراغة، في بلاط هولاكوخان. وقد أعمل نصير الدين الطوسي فِكره في الخطوط المتوازية وذلك من خلال عملين، الأول: **الرسالة الشافية عن شك في الخطوط المتوازية** المكرس خصيصاً لهذه النظرية، والثاني: **شرح إقليدس**، وهذا الأخير هو في الحقيقة عرض لِـ **أصول** إقليدس مع زيادات مهمة عائدة للمؤلف. وفي كل من المؤلفين استخدم الطوسي، كالخيام، «رباعي أضلاع ساكيري (Saccheri)» ودرس الفرضيات الثلاث المتعلقة بزواياه العليا. وفي **الرسالة الشافية عن شك**. . .، وقبل أن يعرض برهانه الخاص للمصادرة V، يستعرض الطوسي نظريات الخطوط المتوازية التي وسعها الجوهري وابن الهيثم والخيام. ويدل بشكل صحيح على نقطة الضعف في برهان الجوهري. إن الطوسي لم يقرأ البرهان المُعطى من قبل ابن الهيثم في **شرح مصادرات إقليدس**. وهو لم يعرف سوى **كتاب حل شكوك إقليدس في الأصول** حيث لم يجد إلا ذِكراً للمرجع الأول. لذلك كان الطوسي يعرف أن ابن الهيثم استخدم الحركة لبرهان المصادرة V. بيد أنه استنتج خطأً أن برهان الكتاب الأخير يرتكز على المقولة: «خطان مستقيمان متقاطعان لا يمكن أن يكونا موازيين لنفس الخط»؛ وانتقد ابن الهيثم لعدم استنتاجه المصادرة V من هذه المقولة.

وكذلك لم يكن الطوسي يعرف مؤلف الخيام بأكمله. فقد وصف القضايا التي قدمها الخيام دون ذكر «مبادئ الفيلسوف» (أرسطو (المترجم)) الخمسة ومن بينها مبدأ متكافئ مع المصادرة الخامسة. وأخذ على الخيام ارتكابه خطأً منطقياً عند برهان هذه المصادرة. وكما رأينا، لم يكن هذا الانتقاد عادلاً.

ويتابع الطوسي عارضاً برهانه الخاص للمصادرة V. وكما يذكر هو نفسه، فإنه استعار بعضاً من القضايا من الخيام. إضافة إلى ذلك، عرض مرتين كلاً من القضيتين الأخيرتين من البرهان؛ والصيغة الثانية من هذه الإعادة ترجع إلى الجوهري. وخلافاً للخيام، وفي مؤلفه **الرسالة الشافية**. . .، لم يستخدم الطوسي مصادرة مكافئة لمصادرة إقليدس الخامسة؛ وكغيره من الهندسيين السابقين، ارتكب خطأً يتعلق بالـ «petitio principi» («مصادرة على قول»). وقد نبه علم الدين قيصر الحنفي إلى هذا الخطأ في رسالة وجهها للطوسي. وعلى الأثر بدأ الطوسي، وهو ينقل برهان المصادرة الخامسة من **الرسالة**

الشافية. . . . إلى كتاب **تحرير إقليدس**، بإعلان مصادرة شبيهة بالتي استخدمها الخيام، لكنها أقوى منها (استبعدت مصادرةُ الخيام حالةَ هندسة القطع الزائدة بينما استبعدت مصادرةُ الطوسي في وقت واحد الهندسة الإهليلجية والهندسة زائدية القطع). وهكذا تُقرأ مصادرة الطوسي: «إذا تباعدت خطوط مستقيمة، متواجدة في مستوٍ واحد، في اتجاه، فليس بإمكانها التقارب في هذا الاتجاه إلا إذا تقاطعت»[٢٠].

أما في مؤلف **شرح إقليدس** المنسوب خطأً للطوسي، والذي كتبه أحد أعضاء مدرسته، فقد استُخدِم بيان آخر بدل المصادرة. وهذا البيان مستقل عن المصادرة V وسهل البرهان. ومع ذلك، وفيما بعد، ارتكب هذا «الطوسي» المزعوم خطأ «المبدأ الصغير». لكنه راجَعَ بصورة أساسية وفي وقت واحد نظام الموضوعات والمصادرات الإقليدسية والبراهين على عدة قضايا من كتاب **الأصول**.

ولقد أثر كتابه المنشور في روما بشكل واسع على التطور اللاحق لنظرية المتوازيات. وبالفعل، فقد ضمّن ج. واليس (J. Wallis) (١٦١٦ - ١٧٠٣م) مؤلفَه الخاص حول **المصادرة الخامسة والتحديد الخامس من الكتاب السادس لإقليدس** (*Du cinquième postulat et de la cinquième définition du livre VI d'Euclide*, 1663)، ترجمةً لاتينيةً لبرهان المصادرة V من كتاب **شرح إقليدس**. وذكر ساكيري هذا البرهان في كتابه **إقليدس المخلّص مِن كل خطأ** (*Euclide débarassé de toute erreur*) المنشور عام ١٧٣٣م، ويبدو محتملاً أنه اقتبس فكرة استخدام الفرضيات الثلاث المتعلقة بالزوايا العليا من «رباعي أضلاع ساكيري» من هذا الطوسي المزعوم. وكان هذا الأخير قد أدخل في أعماله عرضاً عن هذا الموضوع مأخوذاً من الطوسي ومن الخيام.

وقد أعطى قطب الدين الشيرازي أيضاً برهاناً آخر للمصادرة الخامسة في القسم الهندسي من مؤلفه الموسوعي المذكور سابقاً[٢١]. لكنه، ومثل علماء آخرين، ارتكب خطأ «المصادرة على قول».

كان الشيرازي، بعرضه لعدد معين من المواضيع، وخاصة بصياغته للمصادرات، أقرب إلى **شرح إقليدس** للطوسي المزعوم منه إلى الأعمال الخاصة التي تحمل الاسم عينه للطوسي.

وهكذا، وخلال أربعة قرون على الأقل، استحوذت نظرية المتوازيات على اهتمام علماء الرياضيات في الشرقين الأوسط والأدنى. وتكشف كتابات هؤلاء العلماء عن تواصل في الأفكار. وقد أتى ثلاثة علماء وهم ابن الهيثم والخيام والطوسي بالإسهام الأهم لهذا الفرع من الهندسة، الذي لم تُعرَف أهميتُه بالكامل سوى في القرن التاسع عشر.

---

(٢٠) الطوسي، **تحرير إقليدس في علم الهندسة**، ص ٤.

(٢١) قطب الدين الشيرازي، **كتاب درة التاج لغرة الدبياج**.

والشيء الأساسي هو أن افتراضاتهم عن خصائص رباعي الأضلاع، التي درسوها بافتراض أن بعضاً من زواياها حادة أو منفرجة، تحتوي على المبرهنات الأولى «لهندسة القطع الزائد» وللهندسة الإهليلجية. وبرهنت افتراضاتهم الأخرى أن كثيراً من المقولات الهندسية كانت متكافئة مع مصادرة إقليدس الخامسة. هذا، وتجدر الإشارة إلى الأهمية القصوى لكون هؤلاء العلماء قد أقاموا ربطاً متبادلاً بين هذه المصادرة ومجموع الزوايا في المثلث وفي رباعي الأضلاع.

ومن خلال أعمالهم في نظرية المتوازيات، مارس علماء الرياضيات العرب تأثيراً مباشراً على أعمال نظرائهم الأوروبيين في الميدان نفسه. فبمراجعته كتاب **المناظر** لابن الهيثم، قام العالم البولوني ويتلو (Witelo) في القرن الثالث عشر بالمحاولة الأوروبية الأولى لبرهنة مصادرة المتوازيات، وهذه المحاولة مستوحاة من دون شك من مصادر عربية. وفي القرن الرابع عشر، أعطى العالمان اليهوديان، ليڤي بن جرسون (Levi ben Gerson)، الذي عاش في جنوب فرنسا، وألفونسو الإسباني، الذي ذكرناه سابقاً، براهين تصبُّ مباشرة في سياق براهين ابن الهيثم. وقد سبق أن أشرنا سابقاً إلى أن **شرح إقليدس** المنسوب زعماً إلى الطوسي، قد نشّط دراسات ج. واليس وج. ساكيري المتعلقة بنظرية المتوازيات. ولا شك في أن التطابق في طرح الفرضيات المتعلقة بزوايا المربع التي طرحها العلماء الشرقيون في القرون الوسطى من جهة، وكما طرحها ساكيري ولامبرت من جهة أخرى، هو تطابق له دلالته كما أن له أهميته البالغة.

التحويلات الهندسية

يعود استخدام الحركات الميكانيكية في علم الهندسة إلى العصور القديمة. ولقد أشرنا إلى مثل هذا الاستخدام في القرون الوسطى في سياق تناولنا لأعمال ثابت بن قرة وابن الهيثم والخيام التي عالجت «برهان» المصادرة الخامسة. وكان استخدام الحركة والتطابق موجوداً في خلفيات براهين القضايا التي قدمها طاليس، في الوقت الذي لم تكن فيه الموضوعات والمصادرات قد صيغت بعد. وهكذا، استخدم الفيثاغوريون الحركة. ونظروا إلى الخط على أنه رسم لنقطة متحركة.

بيد أن أرسطو قد انتقد استخدام الحركة في المبرهنات الرياضية، وحاول إقليدس بوضوح تقليص عدد الحالات التي «تتطابق» فيها الرسوم؛ لكن، على الرغم من جهوده، لم يتمكن من استبعادها كلياً. وقد برر أرسطو رأيه بالإعلان عن أن النقطة تجريد بدرجة أرفع من الخط؛ وتجريد الخط أرفع من تجريد السطح وكذلك فالسطح أرفع من الجسم. وارتأى بالمناسبة استنتاج التجريدات الأقل درجة من التجريدات الأرفع منها.

كان تأثر الفارابي بأرسطو قوياً. فلقد استعاد الفكرة عينها في كتابه **شرح المستغلق من**

مصادرة من المقالة الأولى والخامسة من إقليدس. وعند تعرضه للمقطع الذي يعطي فيه إقليدس تحديداته للنقطة وللخط وللسطح وللجسم، يشير الفارابي إلى أنه يجب أن تبدأ المعرفة بدراسة الجسم المادي وينتقل بعد ذلك لدراسة الأجسام وهي منفصلة عن الأحاسيس المرتبطة بها، وبعدها إلى المسطحات، وأخيراً إلى الخطوط والنقاط[٢٢].

وحافظ الفارابي على مواقف أرسطو عند تحليله للتحديدات الأخرى الموجودة في الكتابين الأول والخامس من **الأصول**. وانطلاقاً من وجهة النظر عينها، اكتشف الخيام خطأ في البرهان المقدم على المصادرة V من ابن الهيثم فهو يتساءل: «. . . أية نسبة بين الهندسة والحركة وما معنى الحركة»، ويتابع مؤكداً رأي علماء سابقين بأنه ليس هناك من شك في أن لا وجود لخط ما سوى على سطح، ولا وجود لسطح سوى على جسم، وأنه لا بد للخط من التواجد على جسم ما، وعليه، فلا يمكن لخط أن يستبق سطحاً. فكيف إذاً باستطاعة هذا الخط التحرك مفصولاً عن مسببه؟ وكيف يمكن الخط أن يتكون من حركة نقطة في الوقت الذي جوهره ووجوده يسبقان فيه جوهر، ووجود، النقطة؟[٢٣].

وعلاوة على الحركة، استخدم علماء الرياضيات في العصور القديمة تحويلات هندسية أكثر عمومية. فكان استدلال ديموقريطس (Démocrite) على تطابق حجم الأهرامات ذات القاعدات والارتفاعات المتساوية يرتكز على حالة خاصة من التحويل التآلفي أو الأفيني (Affine)، وهو الانزلاق، حيث كل نقاط قاعدة الهرم تبقى ثابتة والسطوح الموازية للقاعدة تتغير حسب بُعدِها عن هذه الأخيرة.

احتسب أرخميدس في مؤلفه حول **الكرويات والمخروطيات** *(Des sphéroïdes et conoïdes)*، مساحة الإهليلج بواسطة تحويل تآلفي آخر وهو تقليص دائرة بالنسبة إلى قطر منها.

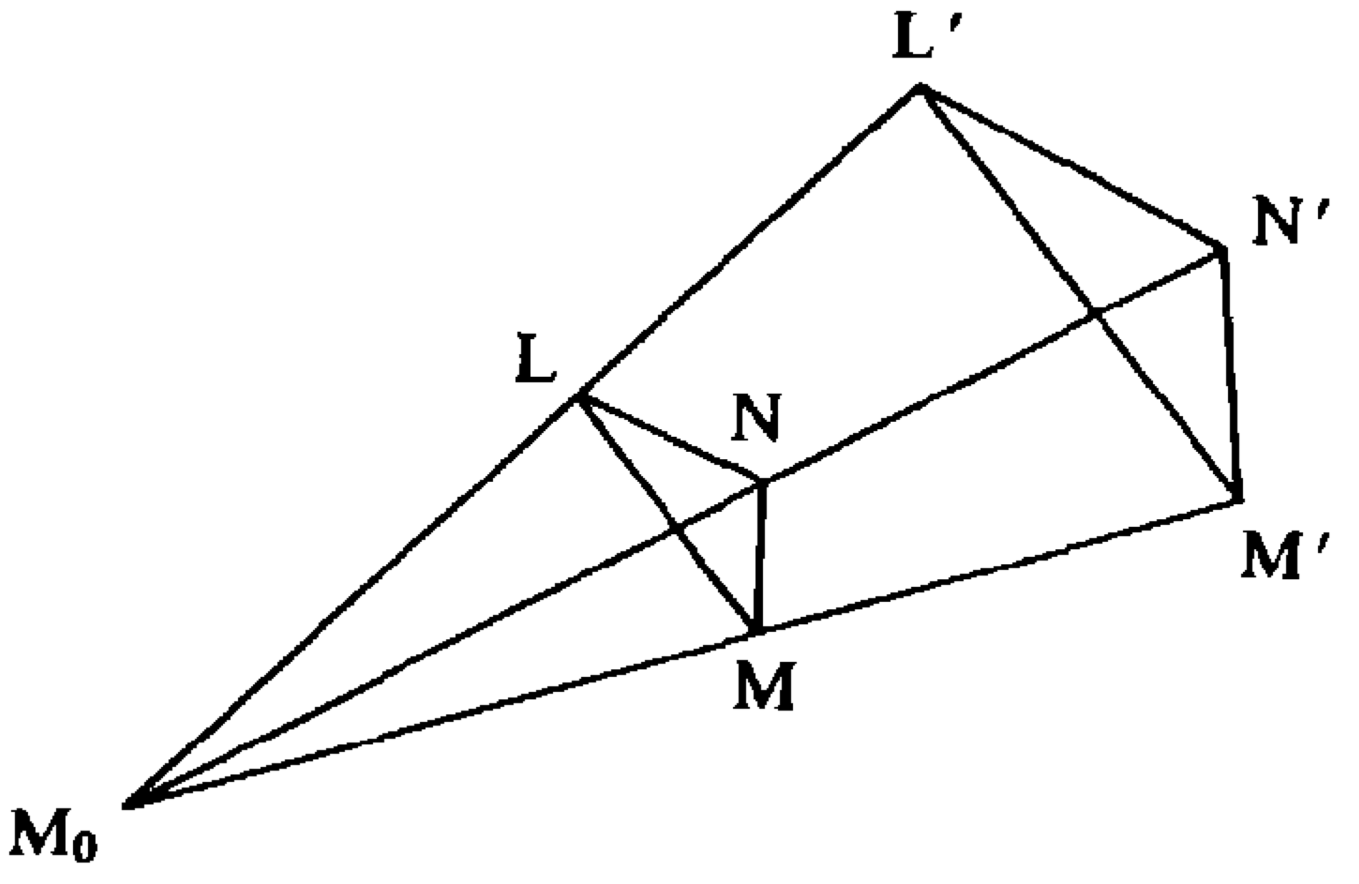
واستخدم أبولونيوس (Apollonius) أيضاً تحويلاً تآلفياً آخر، وهو التحاكي (Homothétie) (التشابه المركزي) والتعاكس بدائرة، في مؤلفه **في الأمكنة الهندسية في المستوي** *(Des lieux géométriques)*. فالتحاكي هو تحويل في مستوٍ حيث كل نقطة M تتحول إلى النقطة M' من الخط المستقيم M_0M' على الشكل التالي: $M_0M' = k.M_0M$، حيث M_0 هي مركز التحاكي وk هي نسبته (الشكل رقم (١٤ ـ ١١)). وبالتعاكس بدائرة، كل نقطة M في المستوي تتحول إلى النقطة M' من الخط المستقيم M_0M على الشكل التالي: $M_0M' = r^2/M_0M$ حيث النقطة M_0 هي مركز التعاكس وr شعاع دائرة التعاكس (الشكل

---

(٢٢) Abu Naṣr Muḥammad Ibn Muḥammad Al-Fārābī, *Al-Rasā'il al-riyāḍiyya (Matematicheskie Traktaty)*, traduction russe et édition de A. Kubesov et B. A. Rosenfeld (Alma-Ata: [s. n.], 1973), p. 239.

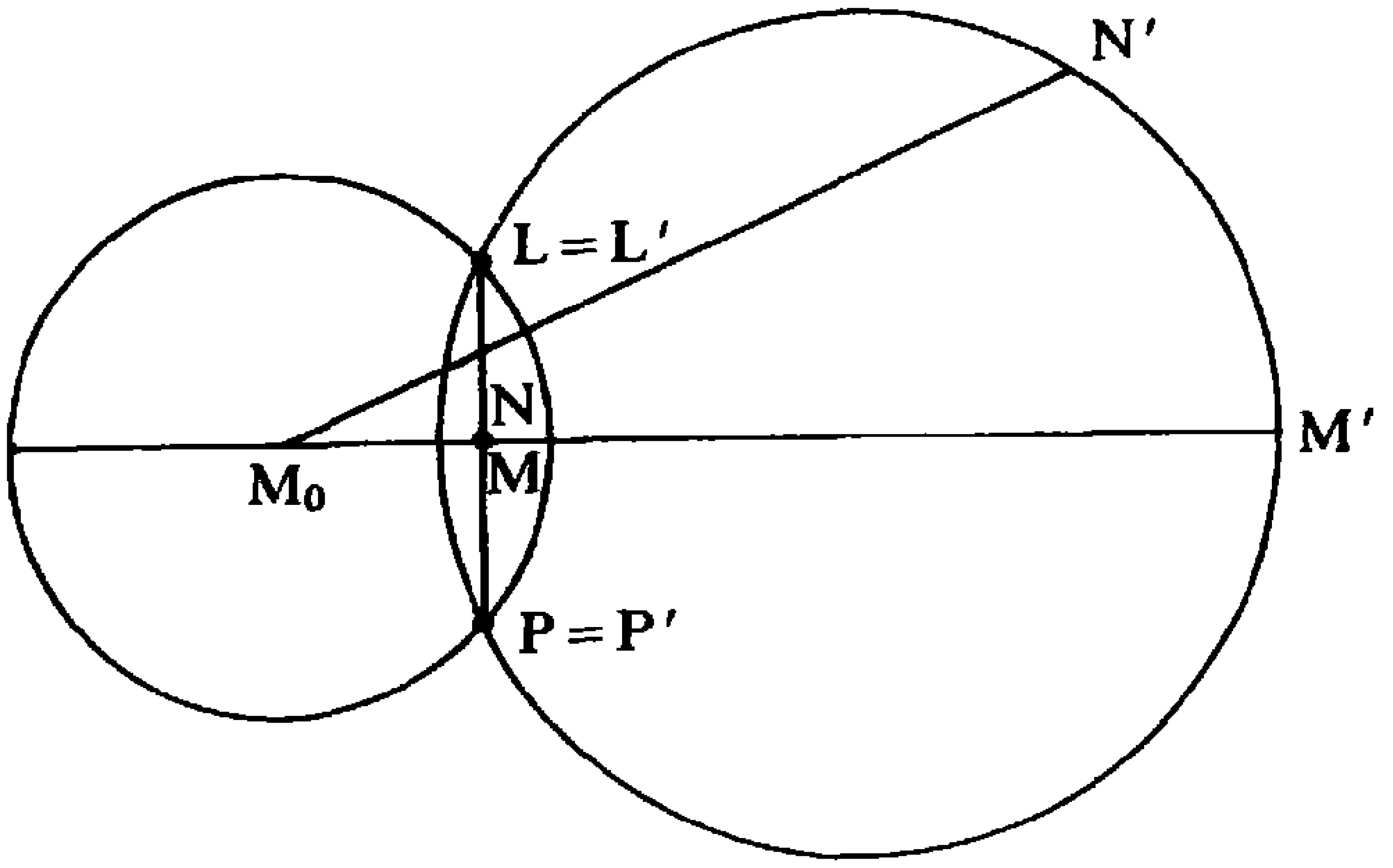
(٢٣) الخيام، رسائل الخيام الجبرية، ص ١١٥-١٣٨.

رقم (١٤ ـ ١٢)). يحول التحاكي الخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة والدوائر إلى دوائر، والتعاكس يغير الخطوط المستقيمة والدوائر إلى دوائر إلا تلك التي تمر بمركز التعاكس والتي تتحول إلى خطوط مستقيمة.



الشكل رقم (١٤ ـ ١١)

كان أبولونيوس على علم بكل هذه المعطيات وبرهن أن ملتقيات النقاط (الأمكنة الهندسية) في المستوي (loci) تتحول إلى ملتقيات نقاط في المستوي. و«loci» هي الكلمة التي استخدمها للدلالة على المستقيمات والدوائر. وبالفعل، ففي القضية (١، ٣٧) من كتابه **المخروطات**، لم يعالج أبولونيوس التعاكس بدائرة فحسب، وإنما أيضاً بإهليلج وبقطع زائد، أي التحويلات للنقاط M من مستوٍ معطى إلى M' وهي نقاط التقاء خطها المستقيم القطبي مع قطرِ القَطْعِ المخروطي المناسب المار بـ M. وفي القضايا (١، ٣٣) و(١، ٣٥) يتعرض إلى تعاكس بقطعٍ مكافئ.



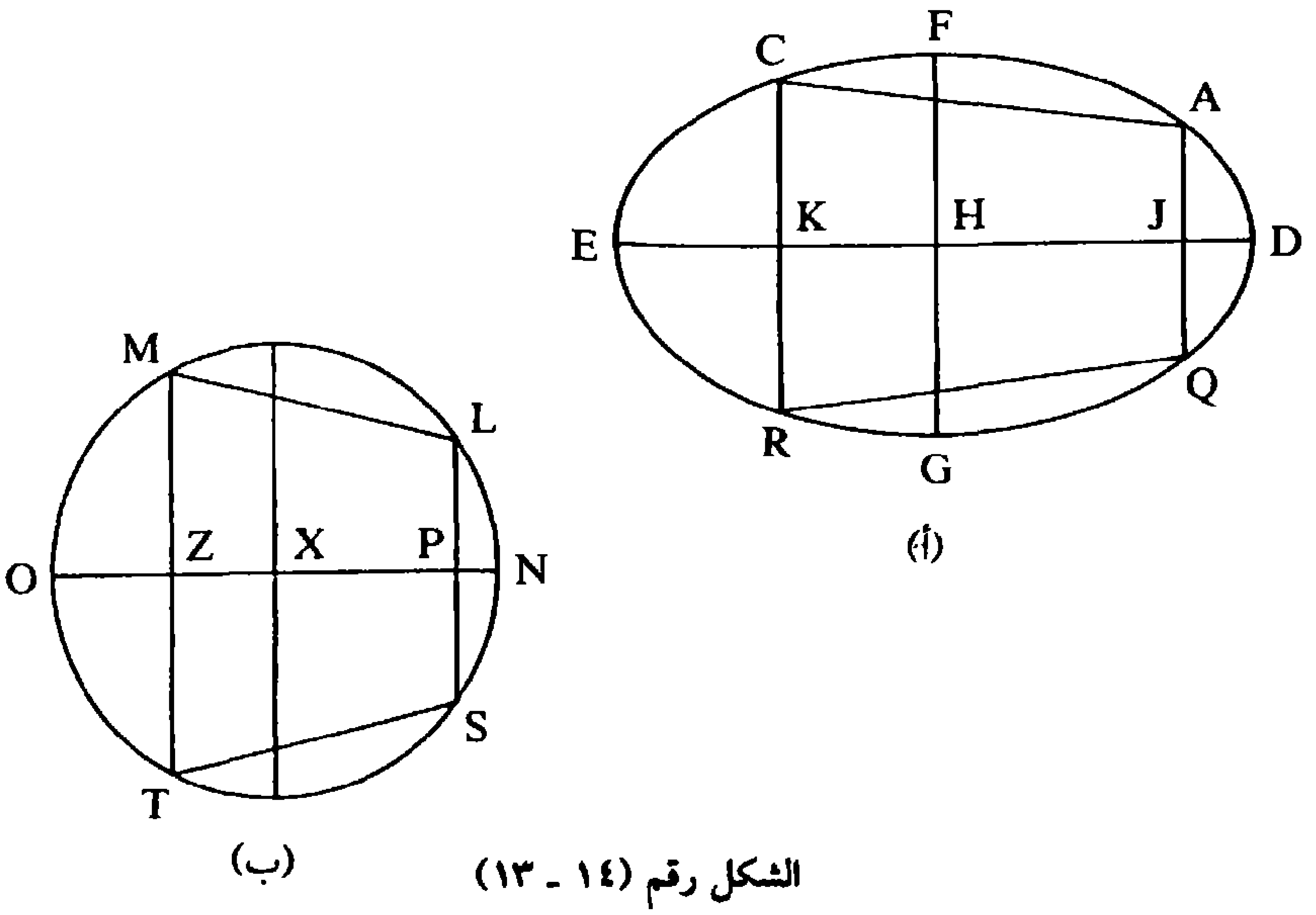
الشكل رقم (١٤ ـ ١٢)

إن التحويلات التآلفية في مستوٍ أو في الفضاء هي تحويلات لهذه الكائنات تتحول بها

الخطوطُ المستقيمة إلى خطوط مستقيمة (وهذه التحويلات تكون تقابلية، تحول خطوطاً متوازية إلى خطوط متوازية). والحركات والانزلاقات المستعملة من قبل ديموقريطس، والتقلصات أو التمددات المُباشَرة المستعملة من قبل أرخميدس، والتقلصات أو التمددات المائلة حيث تتحرك النقاط على امتداد خطوط مستقيمة غير متعامدة مع المحور أو مع المستوي الثابت، والتحاكيات، كلها تشكل حالات استثنائية للتحويلات التآلفية. كل تحويل تآلفي يحفظ نسب مساحات الأشكال المسطحة وأحجام المجسمات. وإذا، بالإضافة إلى ذلك، بقيت المساحات والأحجام على حالها، كما في الحركات والانزلاقات على سبيل المثال، فإن التحويل المتآلف (أو التآلفي) الموافق يدعى تقايساً (Isométrie).

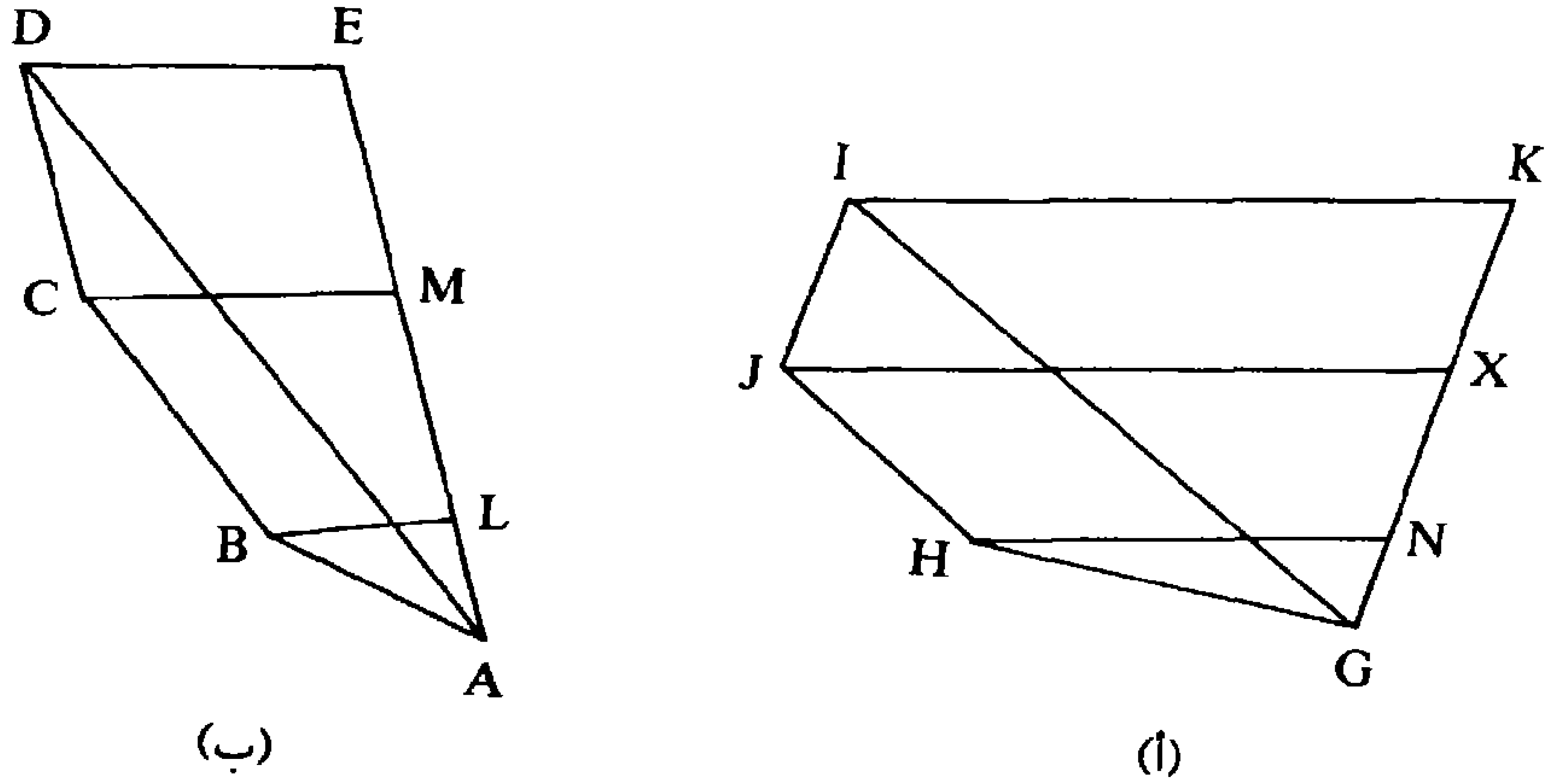
استعان ثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان بالتحويلات التآلفية وبالتقايسات المألوفة. وقد بنى هذا الأخير في مؤلفه **مقالة في رسم القطوع الثلاثة** قطوعاً ناقصة بواسطة التقلص المباشر للدوائر. وبنى أيضاً قطوعاً زائدة متساوية الأضلاع وأخرى اختيارية، وذلك بالحصول على الكثير من نقاطها انطلاقاً من النقاط الموافقة من الدائرة (يمكن الحصول على قطوع زائدة كيفية بعمليات تقلص مباشرة لقطوع زائدة متساوية الأضلاع).

وعالج ثابت بن قرة التقايسات التي تحول إهليلجاً نصف ـ محاوره a وb إلى دائرة شعاعها $\sqrt{ab}$ وذلك في كتابه **كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها**. وبرهن أن قطعات من الإهليلج تتحول بواسطة هذا التحويل إلى قطعات بنفس المساحة من الدائرة الموافقة. والشكل رقم (١٤ ـ ١٣) ينقل أحد الرسوم التي بينت هذه المبرهنة.



الشكل رقم (١٤ ـ ١٣)

وأخيراً، لنلاحظ أن إبراهيم بن سنان استعمل في مؤلفه **كتاب في مساحة القطع المكافئ** تحويلاً تآلفياً لمضلعات ولمقاطع من قطع مكافئ اختياري. ففي القضية الأولى تعرض لمضلعين $ABCDE$ و$GHJIK$، كلُّ واحد منهما صورة للآخر بواسطة تحويل تآلفي (الشكل رقم (١٤ ـ ١٤))، وبرهن أن نسبة مساحة أول مضلع إلى مساحة الثاني تساوي نسبة مساحات المثلثين المحاطين ADE وIKG.



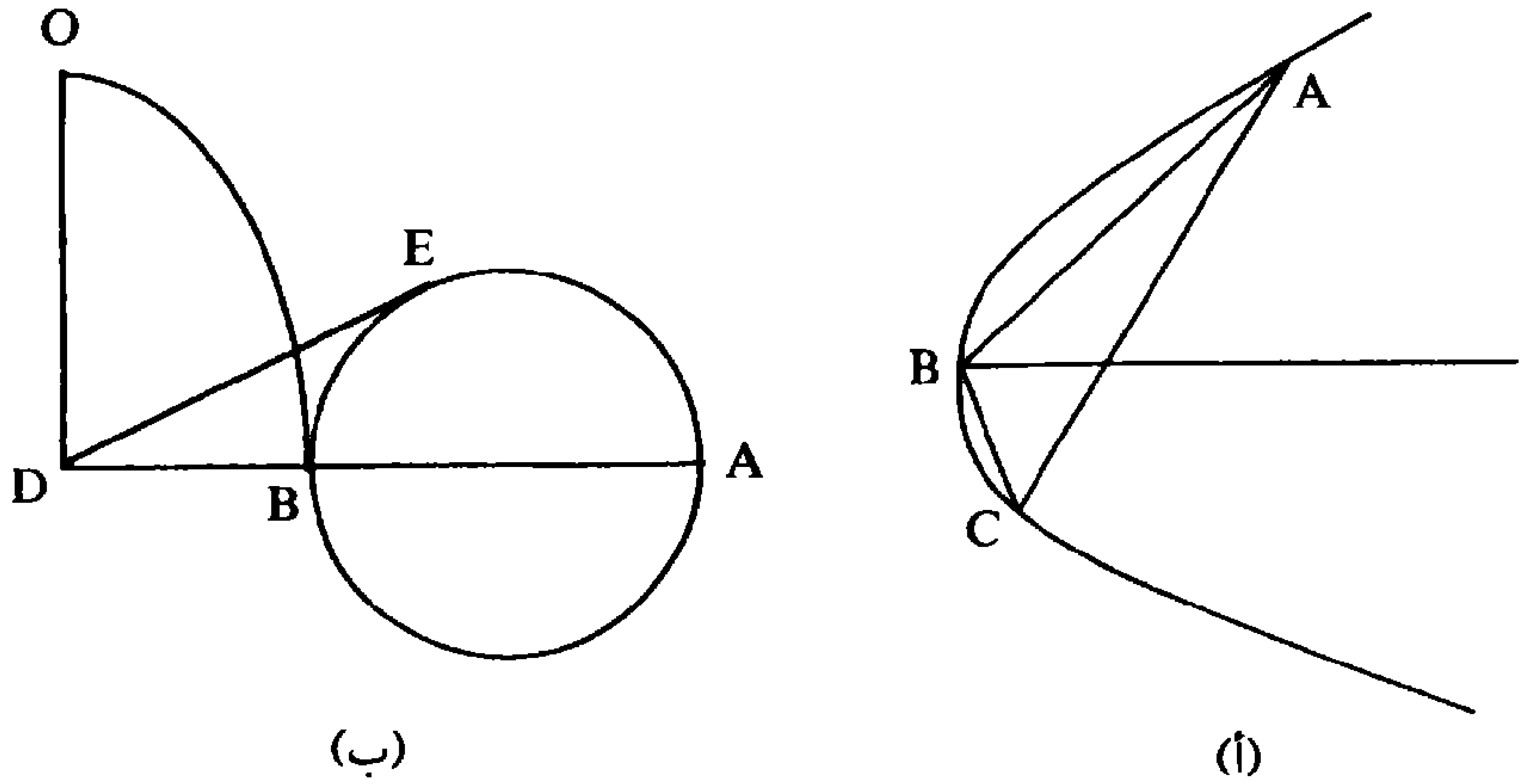
الشكل رقم (١٤ ـ ١٤)

وفي القضية الثانية، وسع ابن سنان بيانه ليشمل مقاطع من قطوع مكافئة (انظر الفصل الثالث عشر: التحديدات اللامتناهية في الصغر...).

منذ عهد قريب برهن كل من إيرينا أ. لوثر (Irina O. Luther) وصديقجان أ. ڤاهابوف (Sadiqjân A.Vahabov) وغيرهما، أن إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة والبيروني تطرقا في أعمالهما إلى التحويلات الإسقاطية التي تحول الدائرة إلى قطوع مخروطية. وفي كتابه **مقالة في رسم القطوع الثلاثة** اقترح إبراهيم بن سنان بناء قطع زائد متساوي الأضلاع «بواسطة دائرة» بالطريقة التالية: إذا رسمنا المماس المار بنقطةٍ ما E من الدائرة AEB (الشكل رقم (١٤ ـ ١٥)) والتقى هذا المماسُ وقطر الدائرة AB عند النقطة D ومن هذه الأخيرة رفعنا الخط العمودي DO على الخط AB بحيث يكون $DO = ED$، فإن O تُعتبر نقطة من القطع الزائد. وإذا اعتبرنا أن معادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 = a^2$ حيث القطر AB هو المحور Ox، فمعادلة القطع الزائد الناتج عن التحويل تكون: $x^2 - y^2 = a^2$ وهذا التحويل الإسقاطي مُعطى بالمعادلات:

$$y' = \frac{ay}{x} \quad و \quad x' = \frac{a^2}{x}$$

وهو تحويل ارتدادي (Involutif) مركزُه A ومحوره مماس للدائرة عند النقطة B.



الشكل رقم (١٤ ـ ١٥)

وباستبداله الخط العمودي $DO = ED$ بخطوط لها نفس الطول ومرسومة تحت زاوية ثابتة، حصل ابن سنان على قطع زائد مشترك هو الناتج عن الدائرة المعطاة بعملية تركيب التناظر الارتدادي والتحويل التآلفي؛ ولهذا القطع الزائد نفس المعادلة، لكن بإحداثيات مائلة. وللحصول على قطع زائد عادي من آخر متساوٍ، استخدم ابن سنان تقلص القطع الزائد حسب القطر AB والمشابه لتقلص الدائرة إلى إهليلج، وقد استخدم هذا التقلص في الكتاب عينه.

واقترح الفارابي وأبو الوفاء عدداً من البناءات المرتكزة فعلاً على التحاكي. وكرس القوهي واحدة من مسألتيه المعروفتين «مسألتان هندسيتان» ليبرهن أن هذا التحويل يحول الدوائر إلى دوائر.

وبمرور القرن العاشر، فقدت التحولات الهندسية ـ باستثناء تلك التي كانت ضرورية لبناء الأسطرلابات وغيرها من الأدوات الفلكية ـ الكثير من أهميتها. ففي أوروبا، ظهرت التحويلات التآلفية العامة أولاً في القرن الثامن عشر في أعمال أ. ك. كليرو (A. C. Clairaut) ول. أولير (L. Euler). وخلال القرن التالي، وُضِعَتْ نظرية هذه التحويلات، وكذلك نظرية التحويلات الإسقاطية الأكثر عمومية في المستوي وفي الفضاء، كما وُضِعَت نظريات التحويلات المتعاكسة لموبيوس (Möbius) في المستوي أو في الفضاء (التعاكسات في الدوائر أو في الكرات تولد هذه التحويلات).

الصورة رقم (١٤ ـ ٣)

أبولونيوس، **في قطع الخطوط على النسب**

(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٤٨٣٠).

لم تبقَ إلا الترجمة العربية لهذا الكتاب بعد أن فُقد الأصل اليوناني، وقد نقل من العربية إلى اللاتينية في القرن السابع عشر.

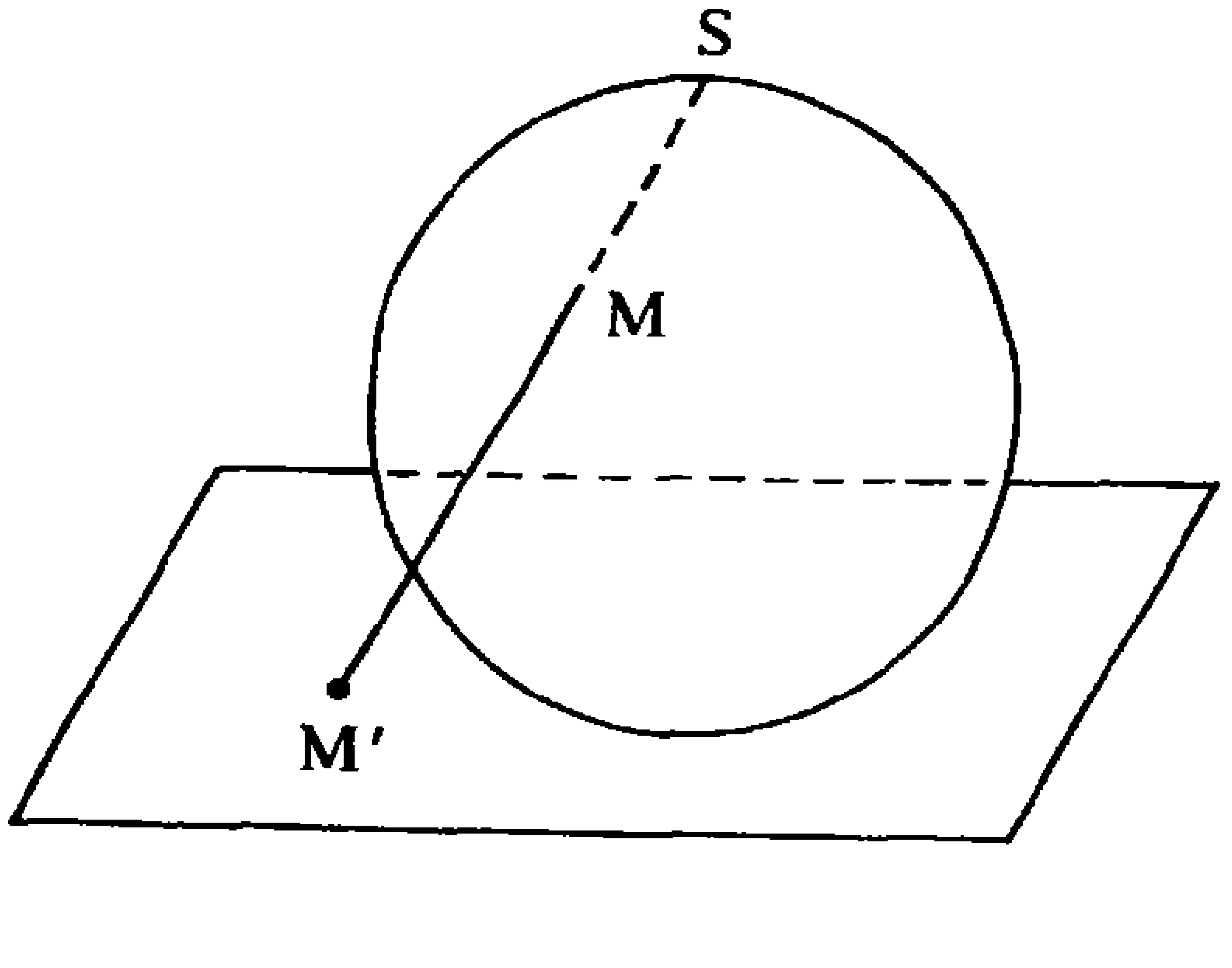
الإسقاطات

تآلف قدامى الإغريق مع إسقاط سطح (أو مستوٍ) على سطح آخر. وهذه الممارسة هي من خلفيات مفهوم التحويل الإسقاطي المذكور آنفاً. ويذكر المهندس المعماري الروماني ڤيتروڤ (Vitruve) (القرن الأول) ثلاثة أنواع من الإسقاطات المستعملة في عصره: الإسقاطات الأفقية والعمودية للبناءات (ichnographie et orthographie) والصور المعروضة في تزيينات المسارح (scénographie).

وفي مؤلفه *Analemma*، كان ديودور (Diodore) (القرن الأول قبل الميلاد) قد أسقط الكرة السماوية عمودياً على مستوٍ، وكذلك فعل بطلميوس في كتاب يحمل العنوان نفسه. وتحتوي الأعمال الجغرافية لإيراتوستين (Eratosthène) وأعمال بطلميوس في الموضوع ذاته، على إسقاطات عديدة للجزء المسكون في الأرض على مستوٍ.

في كتاب **تسطيح الكرة** *(Planisphère)* لبطلميوس، نجد إسقاطاً تجسيمياً للكرة على مستوٍ، أي إسقاطاً للكرة انطلاقاً من إحدى نقاطها، وهذا الإسقاط يكون إما على مستوٍ مماس للكرة في النقطة المقابلة للنقطة المُنتقاة، وإما على مستوٍ موازٍ لهذا الأخير (الشكل رقم (١٤ ـ ١٦)). وربما عرف بطلميوس أن الدوائر المارة بمركز الإسقاط كانت تتمثل بخطوط مستقيمة، أما دوائر الكرة الأخرى فتتمثل بدوائر. وباستطاعتنا أن نبرهن الشيء نفسه (عرَضاً) بواسطة القضية (١، ٥) من **مخروطات** أبولونيوس فيما يتعلق بمجموعتين من القطوع الدائرية لمخروط دائري مائل، ومن الممكن أن يكون أبولونيوس نفسه قد عَرف خاصية الإسقاط التجسيمي هذه.

ونَهج علماء الرياضيات العرب النهج نفسه بتمثيلهم المنظَّم للرسوم المجسَّمة بواسطة

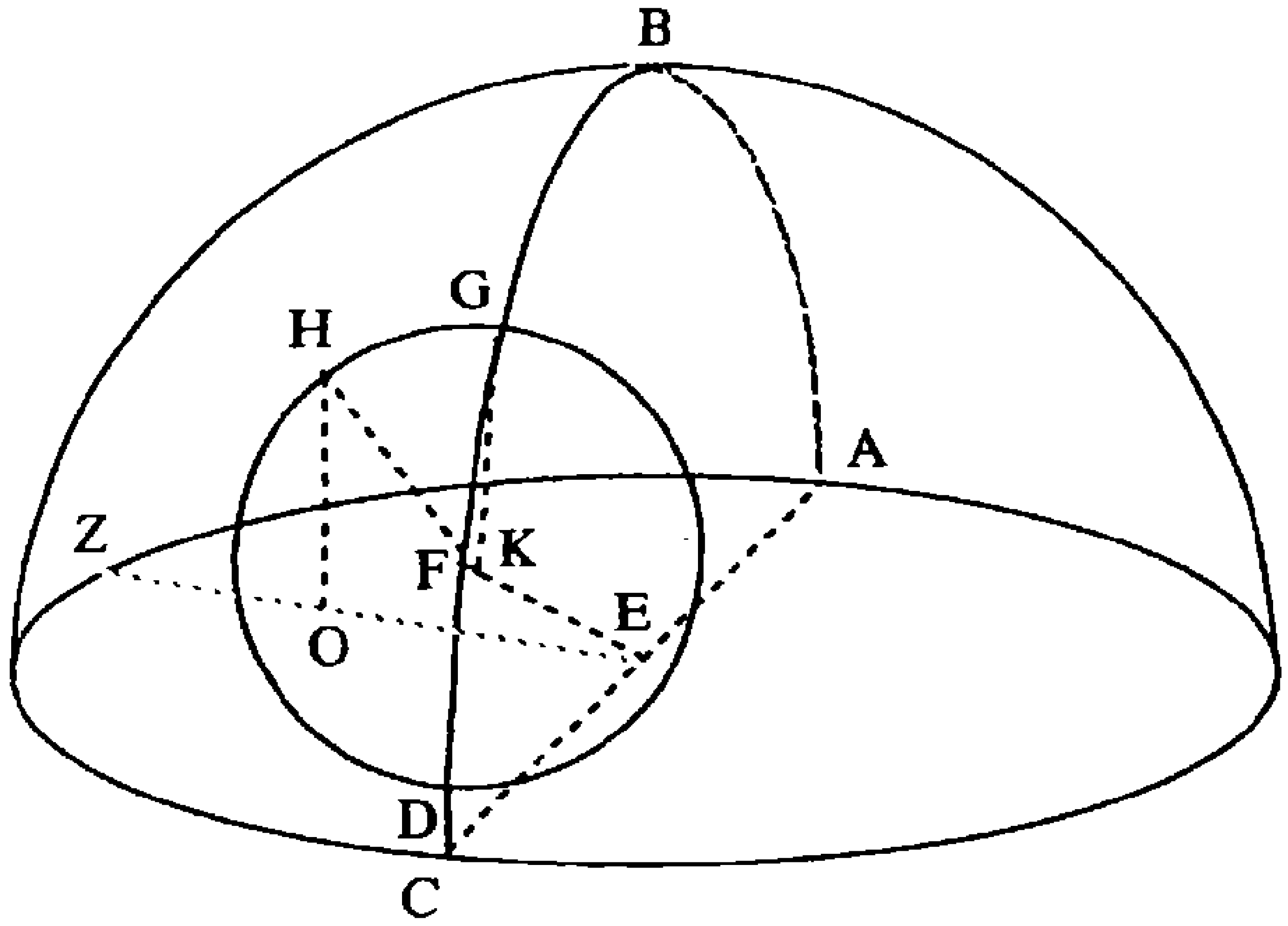


الشكل رقم (١٤ ـ ١٦)

الإسقاطات المتوازية، وخاصةً الإسقاط العمودي؛ فقد عرف حبش الحاسب (منتصف القرن التاسع للميلاد) جيداً كما عرف البيروني الأساليب التي وصفها ديودور في كتابه *Analemma* واستخدماها لتحديد وجهة القِبلة (اتجاه مكة الذي يدير المسلمون وجوههم نحوه عند الصلاة). وقد عرض البيروني أعمال حبش الحاسب حول هذه المسألة في رسالة خاصة موجهة إلى صديقه أبي سعيد السجزي. وكذلك عرض حلوله لهذه المسألة في مؤلفه كتاب **تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن** المسمى عادة علم مساحة الأرض *(Géodésie)*، كما عرضها أيضاً في مؤلفه **القانون المسعودي**. وقد أعطى ابن الهيثم حلاً شبيهاً لهذه المسألة في كتابه **قول في استخراج سَمت القِبلة**.

وسنصف تسلسل أفكار البيروني في كتابه **القانون المسعودي**، الذي يبدو مهماً من حيث طرقه الهندسية. يقوم حل البيروني بشكل خاص على تحديد سمت مكة على الكرة السماوية، وعلى بناء إسقاطه العمودي على مستوي أفق المدينة المذكورة. ومن ثم بناء الخط المستقيم الذي يصل هذه النقطة مع مركز دائرة الأفق، أي الإسقاط العمودي لسمت هذه المدينة على مستوي الدائرة المذكورة، وهذا ما يحدد اتجاه القِبلة بالنسبة إلى هذه المدينة.

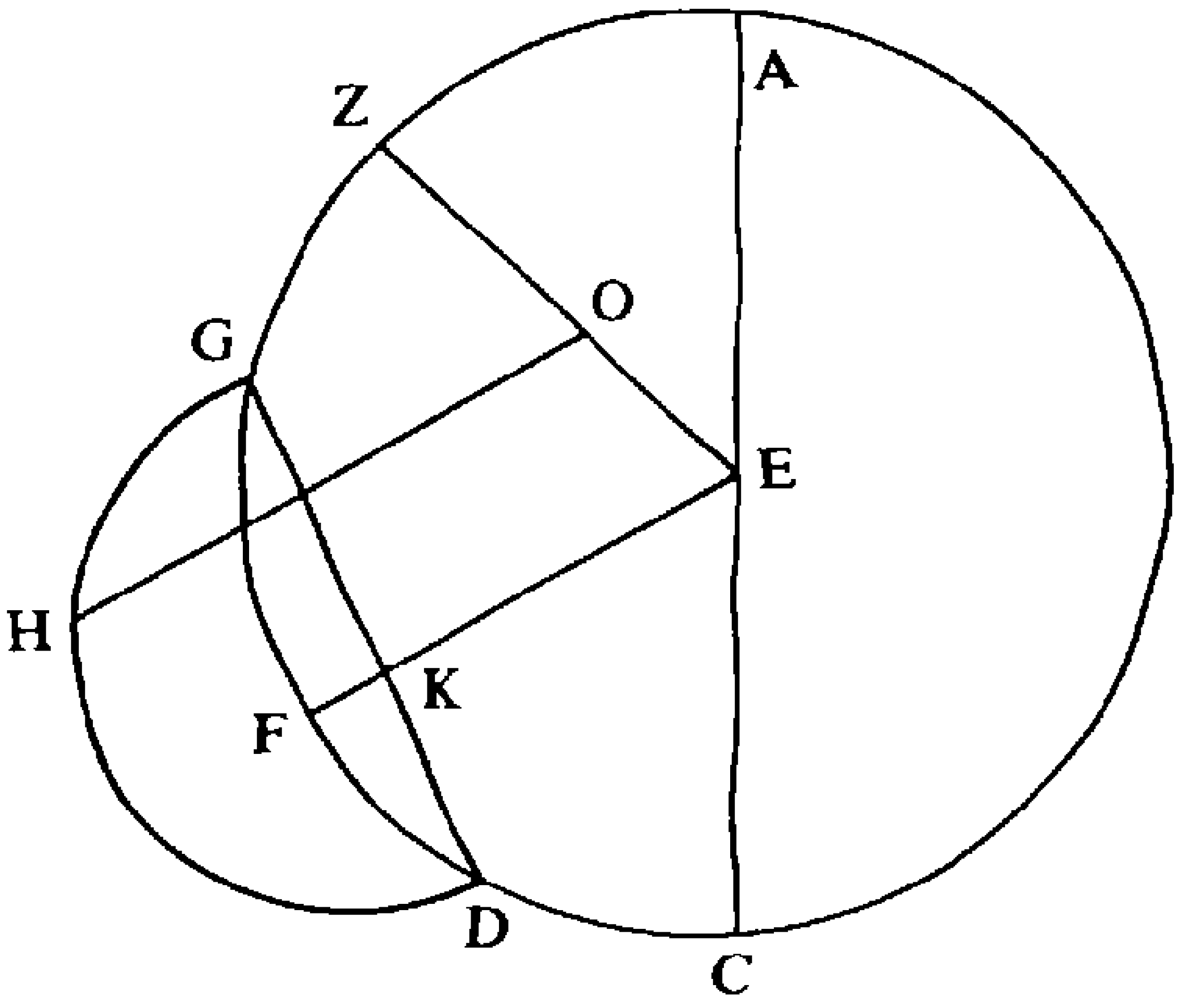
وقبل إعطاء الحل الصحيح، نفذ البيروني البناء الذهني التالي على الكرة السماوية. لتكنْ AZC دائرة أفق المدينة وB مركزها، وليكن أيضاً AEC قطر دائرة خط الزوال أو خط التنصيف (Méridienne)، حيث A نقطة الجنوب وC نقطة الشمال، بحيث تكون ABC نصف دائرة خط الزوال المرتكز على مستوي الأفق (الشكل رقم (١٤ ـ ١٧)). وبقياسنا للقوس CF المساوي لخط عرض المدينة على دائرة الزوال، نحدد النقطة F وهي قطب الكون. وفضلاً عن ذلك، إذا كانت القوس FG المساوية لمتمم خط العرض المار



الشكل رقم (١٤ ـ ١٧)

بمكة قد قيست على امتداد الدائرة ذاتها، تكون النقطة G على الدائرة النهارية لسمت مكة. ومركز هذه الدائرة، وهو النقطة K، ليس سوى موقع العمود المُسقَط من G على قطر الكرة EF. وببنائه الذهني للدائرة النهارية GHD، حدد البيروني سمت مكة H معتبراً إياه النقطة من الشعاع KH لهذه الدائرة (KH مُوازٍ لشعاع خط الاستواء السماوي) بحيث تكون المسافة الزاوية إلى خط الزوال تساوي الفارق بين خطي طول المدينة المعطاة ومكة(٢٤).

وبعد تحديده لسمت مكة، قام البيروني بإسقاطه عمودياً على مستوي أفق المدينة وحصل على النقطة O وعلى الاتجاه EOZ نحو مكة.



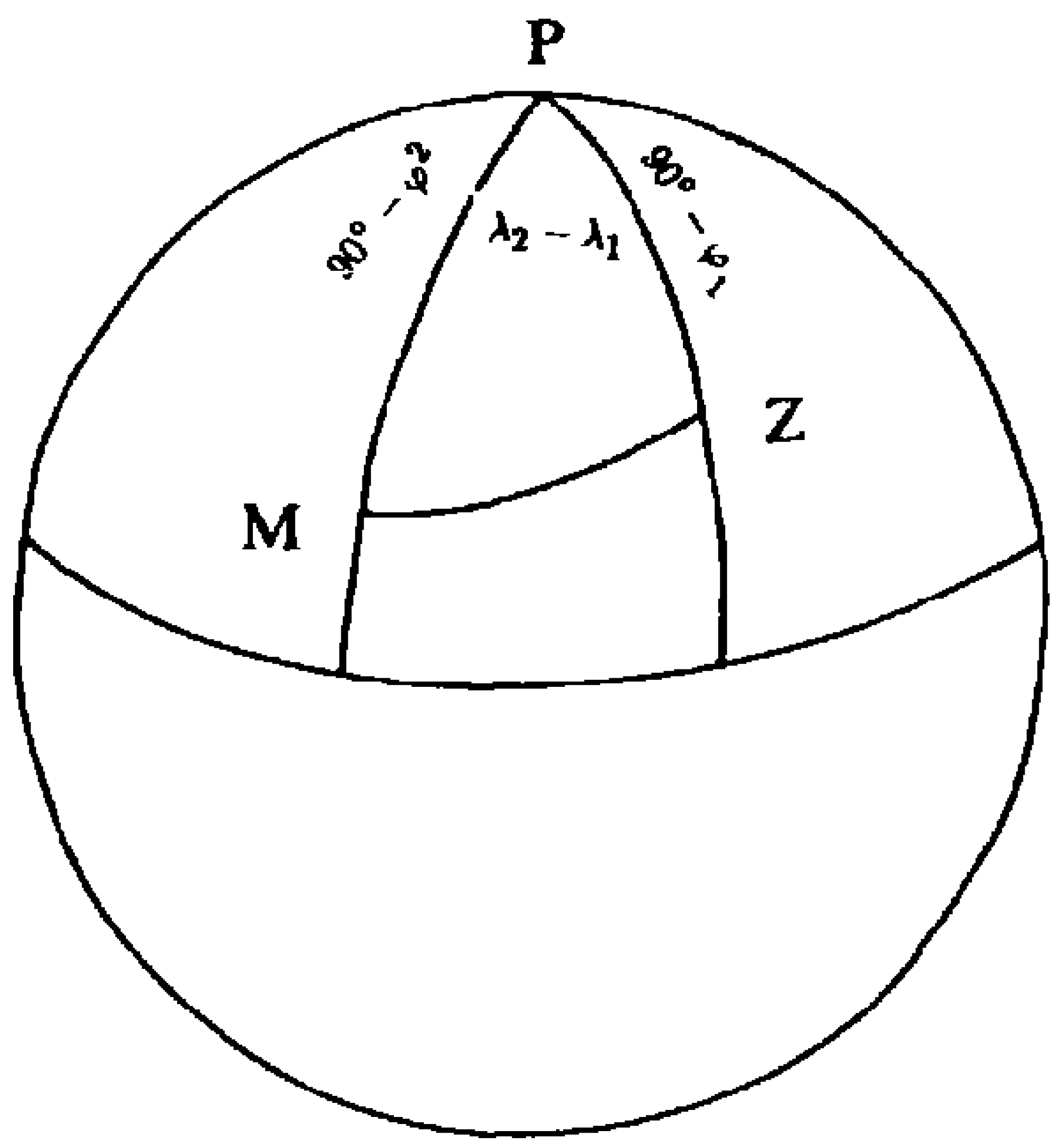
الشكل رقم (١٤ ـ ١٨)

أدار البيروني (الشكل رقم (١٤ ـ ١٨)) دائرتي خط الزوال وخط الاستواء السماوي حول المحور AC وطابقهما على دوائر الأفق. علاوة على ذلك، أدار البيروني نصف الدائرة النهارية GHD الموازية لخط الاستواء السماوي، حول المحور GD بطريقة يصبح معها هذا النصف موازياً لمستوي دائرة الأفق. وهكذا، أتم البيروني كل بناءاته على المستوي نفسه.

وفي مؤلفه كتاب **في إفراد المقال في أمر الأظلال** طابق البيروني مرةً أخرى عدة مستويات. ووصف أيضاً في مؤلفه هذا، النتائج الأهم من كتاب *Analemma* لديودور. وقد عرف الإسقاط المجسم شعبية كبيرة في العالم العربي، وذلك لأنه استُخدم في بناء الأسطرلابات. ولم يستطع بطلميوس، في كتابه **تسطيح الكرة** والموجود إلى الآن بترجمة عربية، أن يبرهن أن هذا الإسقاط يحول الدوائر غير المارة بمركزه إلى دوائر. وهذا البرهان أعطاه أحمد الفرغاني (ت ٨٦١م) في مؤلفه **كتاب صنعة الأسطرلاب**. وقد أعطى علماء لاحقون براهين أخرى عن هذه الخاصية المهمة جداً عن الإسقاط التجسيمي. وعند إعطائه هذا البرهان في مؤلفه **رسالة في الأسطرلاب**، استند إبراهيم بن سنان على القضية (١، ٥) من **مخروطات** أبولونيوس.

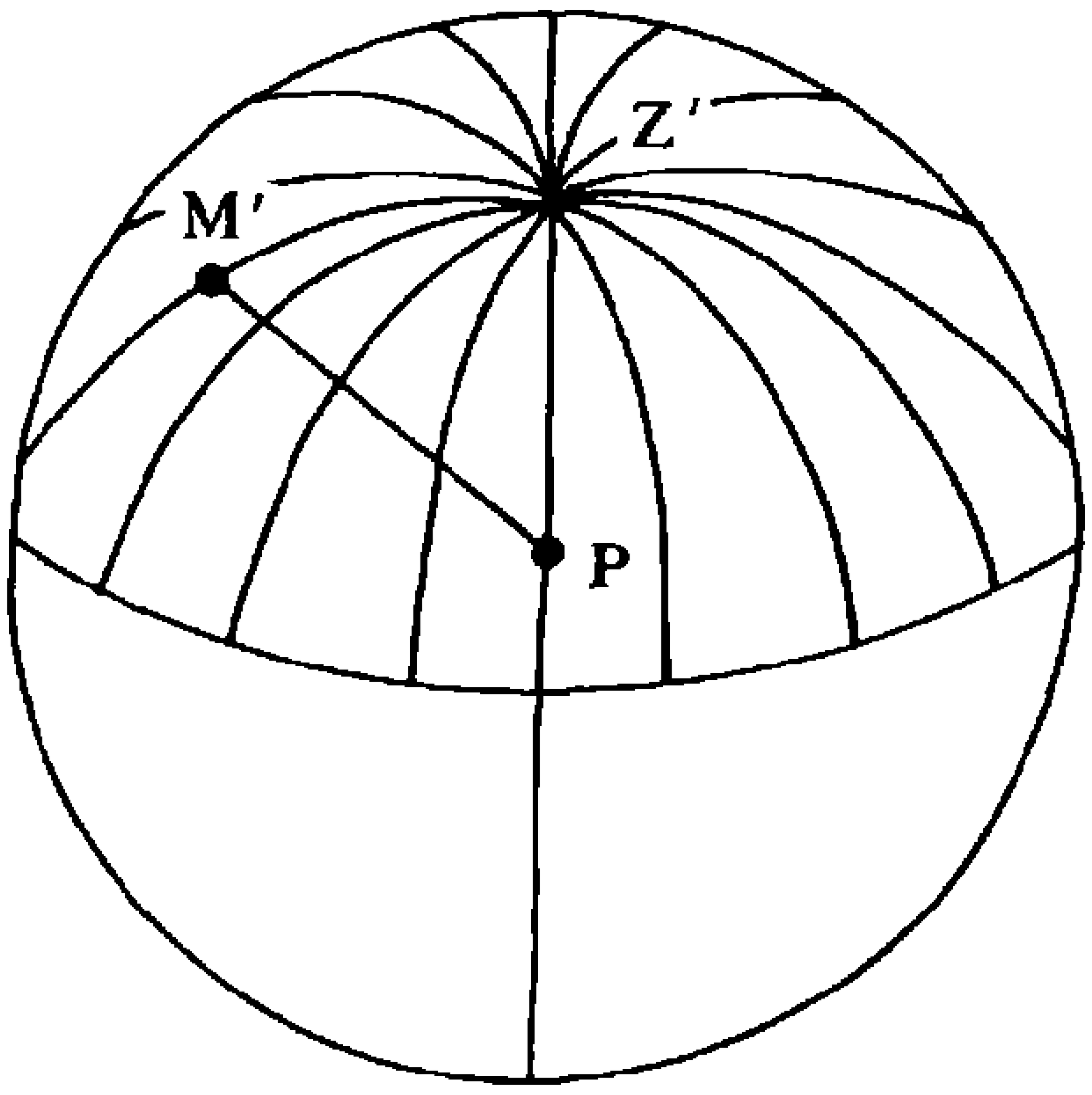
(٢٤) في المخطوطات المنسوخة المتوفرة من **القانون المسعودي**، لا وجود لهذا القوس على امتداد خط الاستواء السماوي، إنما على دائرة خط الزوال (أو التنصيف).

وفيما يلي نُقدم برهاناً آخراً للبيروني حول تحديد وجهة القبلة؛ وهذا البرهان مأخوذ من مؤلفه كتاب **في إخراج ما في قوة الأسطرلاب إلى الفعل**. وفي هذا البرهان يستخدم المؤلف خاصية أخرى هامة عن الإسقاط التجسيمي، وهي التطابق في الشكل (الزوايا الموجودة بين خطوط الكرة تساوي الزوايا الموجودة بين إسقاطات هذه الخطوط على المستوي). والبرهان هو التالي:



الشكل رقم (١٤ ـ ١٩)

أخذ البيروني المثلث الكروي *MPZ* الموجود على سطح الأرض. وقمم هذا المثلث هي (Z) المدينة المعطاة و(M) مكة و(P) القطب الشمالي (الشكل رقم (١٤ ـ ١٩)). تُدعى الزاوية *PZM* من هذا المثلث سمت القبلة، واحتساب هذه الزاوية يتعادل مع تحديد اتجاه القبلة. وفي المثلث *MPZ* يساوي الضلعُ *PM* متمم خط عرض المدينة المعطاة والضلع *PZ* متمم خط عرض مكة، وتُعتبر الزاوية *MPZ* الفارق بين خطي طول هاتين المدينتين. واستبدل البيروني هذا المثلث بآخر مشابه له موجود على الكرة السماوية وقممه هي سمت كل من مكة والمدينة المعطاة والقطب الشمالي للكون (سنعطي لهذه القمم الأسماء نفسها: M وZ وP) واعتبر الإسقاط التجسيمي للكرة السماوية انطلاقاً من القطب الجنوبي للكون على المستوي المماس للكرة عند القطب الشمالي P. وبهذا الإسقاط تمثل الضلعان *PM* و*PZ* من المثلث الكروي الجديد *MPZ* بالقطعتين *PM'* و*PZ'* والمنحدرتين من نقطة المستوي P (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٠)). ويمر الضلع الثالث *MZ* من المثلث بالقوس *M'Z'* من «دائرة السمت» بحيث لا يبقى علينا سوى قياس الزاوية الموجودة بين القوس *M'Z'* والقطعة *Z'P'* لتحديد سمت القبلة.



الشكل رقم (١٤ ـ ٢٠)

وقد طور عبد الجبار الخرقي (ت ١١٥٨م)، الذي عمل في مَرو وفي

خوارزم، طريقة البيروني، وذلك في كتابه **منتهى الإدراك في تقاسيم الأفلاك**. وبينما أكد البيروني بإلحاح على ضرورة نقش خطوط السمت (العمودية) على صفائح الأسطرلاب، لم تتطلب طريقة الخرقي مثل هذه الخطوط. عوضاً عن ذلك، كان على الخرقي أن يقوم بالأرصاد الفلكية في الوقت الذي يعادل فيه ارتفاعُ الشمس خط عرض سمت مكة، بحيث يتطابق سمت القبلة مع الزاوية الزمنية (أي مع الزاوية *ZPS* من المثلث الكروي *SPZ*) ويكون الظل الشمسي للشاخص متوجهاً نحو القبلة.

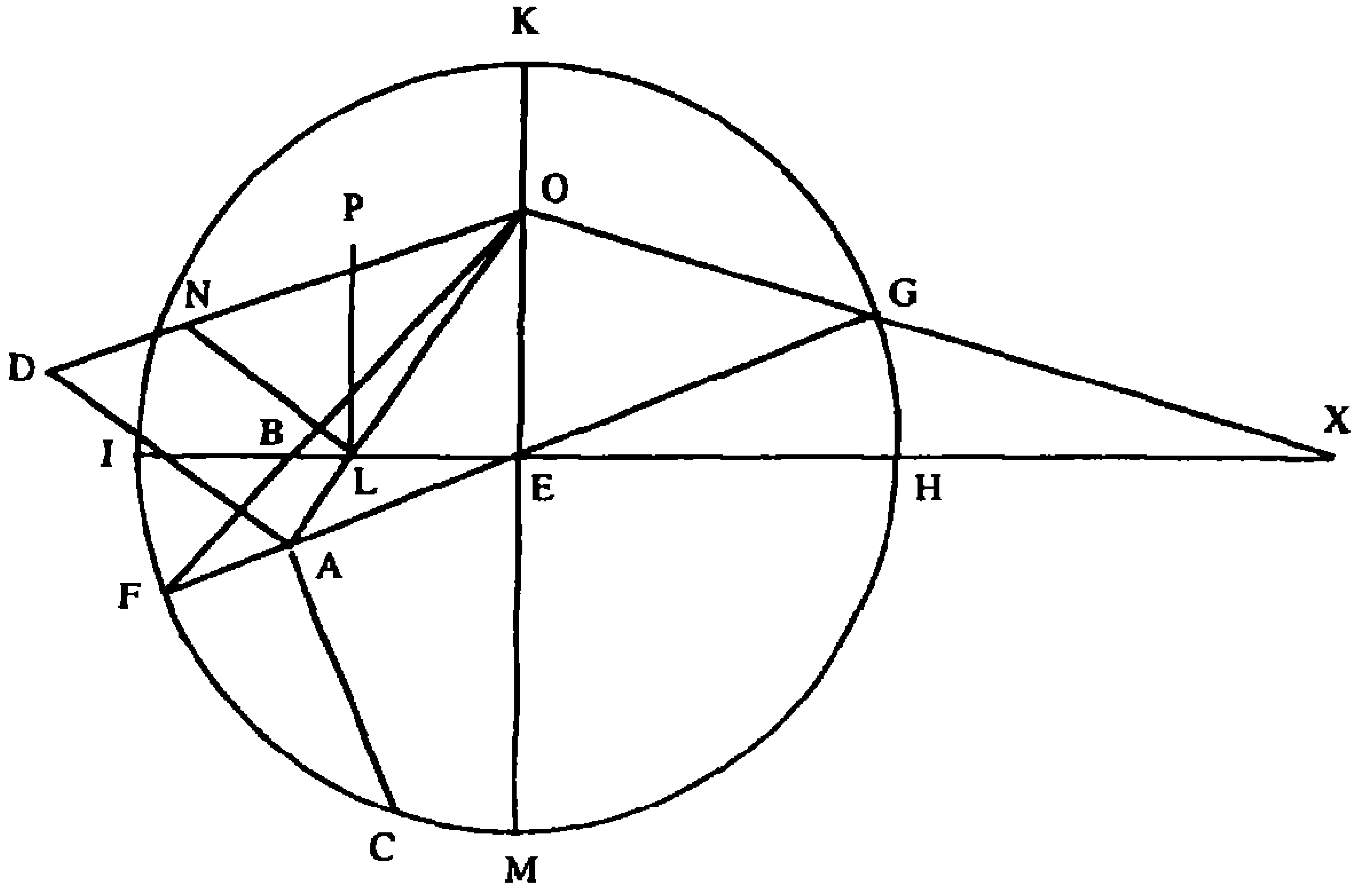
شرح محمود الجغميني (ت ١٢٢٠م)، الذي عمل في خوارزم، طريقة الخرقي في مؤلفه **الملخّص في الهيئة** الذي حافظ على شيوعه الذائع طيلة القرون الوسطى. وتوجد عدة تعليقات على هذا المؤلَّف تناولت هذه الطريقة. ومن بين مؤلفي هذه الدراسات نستطيع ذكر كمال الدين التركماني (القرن الرابع عشر) الذي عمل في ساراي (Saray) عاصمة الـ «Horde Dorée». وعرض بالتفصيل طريقة الخرقي.

واستُخدم الإسقاط التجسيمي لرسم خريطة سطح الأرض على مستوٍ، أي لرسم الخرائط. وبما أن هذا الإسقاط متطابق (Conforme)، فالزوايا الموجودة بين خطوط سطح الأرض تتمثل دون اعوجاج. ومثل هذه الخرائط تكون عملية خاصة بالنسبة إلى البحّارة.

كرس البيروني مؤلفه **رسالة في تسطيح الصور وتبطيح الكور** لتطبيق الإسقاط التجسيمي في رسم الخرائط. وكان هذا الإسقاط يدعى في البلاد العربية «تسطيح الأسطرلاب»؛ وفي بداية القرن السابع عشر أدخل الفيزيائي الفلمندي ف. داغيّون (F. D'Aguillon) تسميته العصرية «الإسقاط التجسيمي أو المجسامي» (Projection Stéréographique)، أو المجسم. وقد نشر ل. أولير مذكرتين عن استخدام هذا الإسقاط في تجميع الخرائط: فقد استخدم دالات تحليلية بمتغير عقدي (Complexe) ليحصل على تمثيل عام مطابق لسطح الأرض، دامجاً الإسقاط التجسيمي مع إسقاط خرائطي مطابق شكلاً لمستوٍ على نفسه.

وبالإضافة إلى الإسقاط التجسيمي، استُخدم إسقاطان آخران في بناء الأسطرلابات، «الإسقاط التام» الذي سماه الصاغاني «التسطيح التام» و«الإسقاط الأسطواني» لكرة على مستوٍ للبيروني. يكون الإسقاط الأول، انطلاقاً من نقطة غير مرتكزة على الكرة، على مستوٍ عمودي على الخط المستقيم الذي يصل مركزي الإسقاط والكرة. والإسقاط الثاني هو إسقاط موازٍ. وفي الحالتين، تتمثل عامة دوائر الكرة بقطوع مخروطية.

ويدرس البيروني في كتابه **استيعاب الوجوه الممكنة في صنعة الأسطرلاب** الإسقاط المنسوب للصاغاني - وهو إسقاط للكرة السماوية على مستويها الاستوائي انطلاقاً من نقطة على محورها غير المار بالقطب. كما يدرس بناء المقاطع المخروطية مستعيناً لذلك بالتحويل الإسقاطي لدائرة إلى قطع مخروطي من مستويها. واعتبر البيروني تحويل الدائرة *KIMH* على القطع المخروطي *KBM* (الشكل رقم (١٤ - ٢٠أ)) المحدد كما يلي: يأخذ قطراً *FG* من

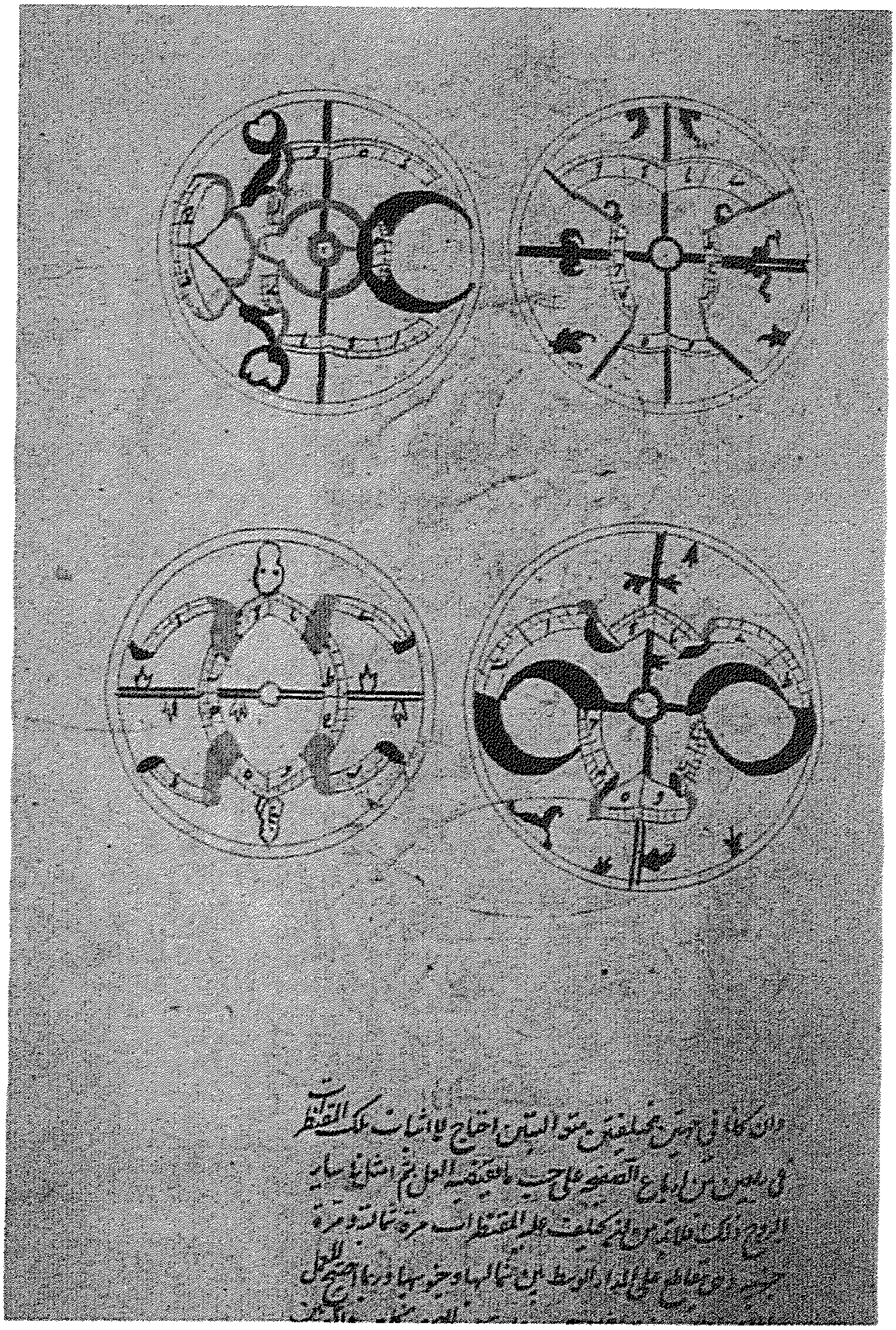


الشكل رقم (١٤ ـ ٢٠أ)

الدائرة $KIMH$ ويأخذ نقطة O من القطر KM. ومن أية نقطة C من الدائرة يرسم الخط العمودي CA على القطر FG، ثم يربط A بـ O وبعدها يرفع الخط العمودي على OA وهو $AC = AD$، ومن ثم يصل D بـ O، ومن النقطة L وهي نقطة التقاء HI وOA يرسم الخط العمودي LN على OD، وأخيراً يرفع الخط العمودي LP على HI بحيث يكون $LN = LP$. ويُنظر إلى النقطة P على أنها النقطة من القطع المخروطي التي تحولت إليها النقطة C من الدائرة. فمدى انفراج الزاوية MOG يحدد نوع القطع المخروطي، فالزاوية MOG تكون حادة أو قائمة أو منفرجة، وبالتالي فالقطع المخروطي يكون إهليلجاً أو قطعاً مكافئاً أو قطعاً زائداً. واستُبدلت نقطتا الدائرة F وG بالنقطتين B وX، وهما نقطتا تقاطع الخطين OF وOG مع القطر HI (في حال القطع المكافئ يكون الخطان OG وHI متوازيين)، وطرفا قطر الدائرة العمودي على FG يصبحان النقطتين K وM. فإذا كانت المسافة EO بين مركز الدائرة والنقطة O تساوي ρ، وإذا كانت الزاوية FEI تعادل α، يكون شكل هذا التحويل الإسقاطي كالتالي:

$$y' = \frac{\rho(x\ sin\alpha - y\ cos\alpha)}{(x\ cos\alpha + y\ sin\alpha)\ sin\alpha + \rho} \quad \text{و} \quad x' = \frac{\rho(x\ cos\alpha + y\ sin\alpha)cos\alpha}{(x\ cos\alpha + y\ sin\alpha)\ sin\alpha + \rho}$$

والقطع المخروطي المبني يكون متطابقاً مع الإسقاط المركزي للدائرة ذات القطر FG على المستوي العمودي على مستوي الرسم (الدائرة هي أفق مدينة ذات خط العرض $\alpha - 90°$) انطلاقاً من النقطة O على المستوي الاستوائي للكرة. ويصف البيروني أيضاً بناءً شبيهاً «للمقنطرات» ـ الموازية للأفق على مسافة كروية h ـ أياً يكن خط عرضها h.

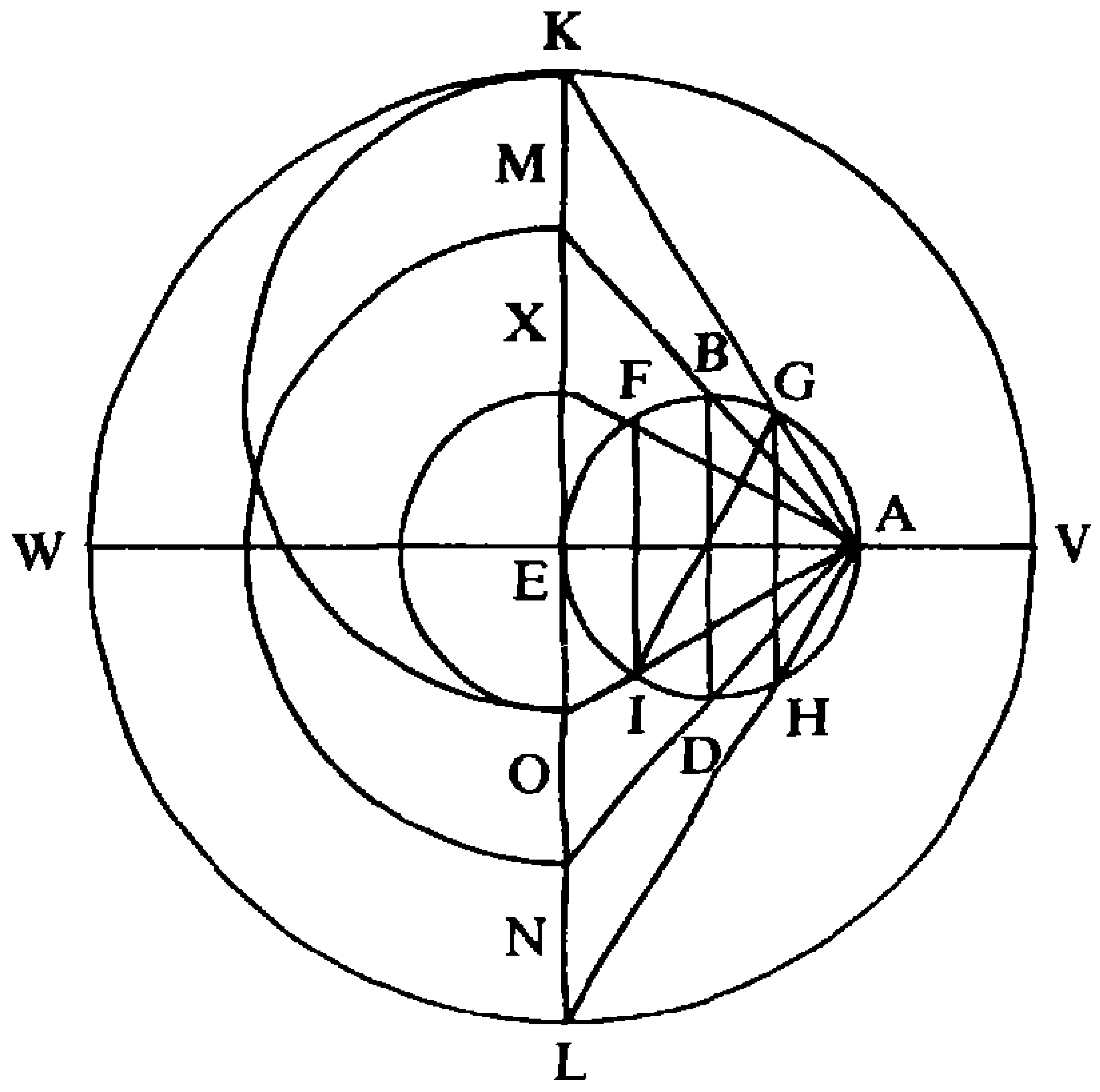


الصورة رقم (١٤ ـ ٤)

أبو الريحان البيروني، **استيعاب الوجوه الممكنة في صنعة الأسطرلاب**
(طهران، مجلس شورى، ١٩٢٦).

لعل أهم مخطوطة علمية عن الأسطرلاب من بين ما كتب بالعربية هي هذه المخطوطة، ففيها يصف البيروني بعناية عمل الأسطرلاب ويناقش بدقة التسطيحات أو الإسقاطات اللازمة. ونرى هنا أشكال متعددة من العنكبوت، وهو جزء من آلة الأسطرلاب.

وقد اكتشف رشدي راشد مؤخراً إسقاطات «مخروطية» وأسطوانية في كتابات القوهي وابن سهل عن الأسطرلابات[٢٥].



الشكل رقم (١٤ ـ ٢١)

ونذكر، من بين كتابات أخرى عن الأسطرلابات، مؤلف **تسطيح الأسطرلاب** لمحيي الدين المغربي (ت نحو ١٢٩٠م) وهو ممن عملوا في مرصد مراغة. وفي هذا المؤلف، بنيت كل الدوائر وكل النقاط المرتكزة على الصفيحة وعلى عنكبوت هذه الآلة بطريقة هندسية بحتة. والشكل رقم (١٤ ـ ٢١) يعيد رسم المغربي الذي يضع عليه الدائرة الكبيرة العمودية من الكرة السماوية *ABED*. فالقطر *BD* والوتران *GH* و*FI* الموازيان له هي إسقاطات الخط الاستوائي السماوي ومداري الجدي والسرطان على التوالي، والقطر *GI* هو إسقاط «فلك البروج». يظهر رسم المؤلف بوضوح كاف بناء الدوائر التي أقطارها *MN* و*KL* و*XO* و*KO*، وهذه الأقطار هي إسقاطات للدوائر المذكورة على مستوي الأسطرلاب.

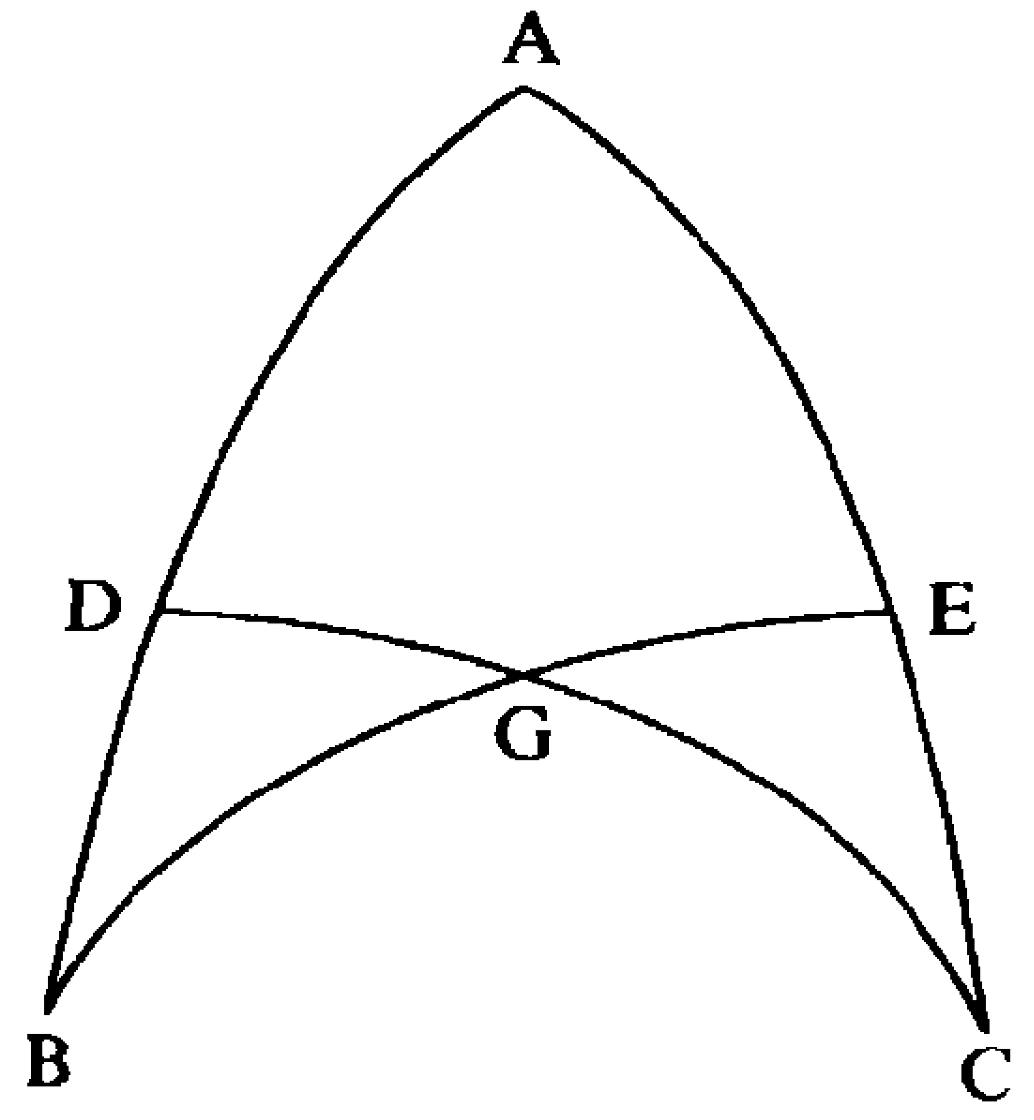
على هذا الرسم، يشكل تراكب الإسقاطات على مستويين متعامدين، واحداً من الإسقاطات الأكثر أهمية. وفي نهاية القرن الثامن عشر، أصبح مثل هذا التراكب القاعدة «لمنهج ج. مونج» (G. Monge) في الهندسة الوصفية العصرية.

الهندسة الكروية

لقد ذكرنا في الفقرة الأولى أنه في القرن التاسع تمت ترجمة كتاب **الكرويات** لثيودوس (القرن الثاني ـ الأول قبل الميلاد) وكتاب منلاوس (القرن الأول) الذي يحمل العنوان عينه، إلى العربية. حاول ثيودوس خلْقَ هندسة كروية شبيهة بعلم التسطيح كما قدمه إقليدس في **الأصول**، بينما اكتشف منلاوس عدداً من خصائص الرسوم الهندسية فوق الكرة، وهي

(٢٥) انظر: Roshdi Rashed, *Dioptrique et géométrie au Xe siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris: Les Belles lettres, 1991).

خصائص لم يكن لها ما يشابهها في الهندسة المستوية. من هذه الخصائص تجاوز مجموع زوايا المثلثات الكروية لزاويتين قائمتين والعلاقات بين زوايا وأضلاع هذه المثلثات. فضلاً عن ذلك، برهن منلاوس المبرهَنة الأولى من علم المثلثات الكروي، التي تحمل اسمه اليوم وتدعى أيضاً «مبرهَنة رباعي الأضلاع (الكروي) التام». وهذا التعبير يعني رسماً مؤلفاً من مضلع رباعي كروي حيث يتم رسم الأضلاع المتقابلة حتى تقاطعها، (انظر الشكل رقم (١٤ ـ ٢٢)). وهذه المبرهَنة تصل أوتار الأقواس الستة المنحنية في رباعي الأضلاع.



الشكل رقم (١٤ ـ ٢٢)

وقد استخدم بطلميوس في كتابه **المجسطي** مبرهَنة منلاوس لحل مسائل من علم الفلك الكروي. وناقش كثير من العلماء العرب وطوروا **كرويات** ثيودوس ومنلاوس. فلقد قام العالم أبو نصر بن عراق من خوارزم (ت ١٠٣٦م)، وهو أستاذ البيروني، بتدقيق في غاية الأهمَية لكتاب **كرويات** منلاوس. كما كُرِست أعمال عديدة لمبرهَنة منلاوس. وكذلك اندفع علماء عرب في دراسة رباعي الأضلاع التام. وقد نسبوا مبرهَنة منلاوس إلى «شكل القِطاع» بينما سُمِيَ رباعي الأضلاع في مصطلحاتهم «شكل القطاع». وبين الأعمال المتعلقة بهذا الموضوع يمكننا ذكر مؤلف ثابت بن قرة **رسالة في شكل القطاع** ورسالة حسام الدين السالار المفقودة التي يعود إليها الطوسي وكذلك كتاب **كشف القناع عن أسرار الشكل القطاع** المسمى أيضاً **كتاب الشكل القِطاع** لنصير الدين الطوسي، المعروف في الأدب الأوروبي بـ **رسالة المربع التام**.

وقد خُصِصت أعمال عديدة للبناءات الهندسية على الكرة. ففي كتابه **عمل السمت على الكرة** شرح يعقوب الكندي كيفية بناء نقطة على الكرة تكون المسافتان بينها وبين نقطتين (معطاتين على نفس الكرة) معلومتين. يتم هذا البناء بالبركار، فتُرْسَم دوائر تكون مراكزها النقاط المعطاة وشعاعاتها تعادل المسافات المعطاة. وفي علم مساحة الأرض العصري، يُدعى هذا البناء بناء «بالتقاطع الخطي».

استعمل الكندي هذا البناء لتحديد مكان الشمس S على الكرة السماوية انطلاقاً من علوها ومَيلها. (ومتَمِمتا هاتين الكميتين إلى $90°$ تساويان المسافتين الكرويتين من الشمس إلى النقطتين Z وP وهما سمت الكون وقطبه). وحسب مصطلحات الكندي كان «اتجاه الكرة» يعني اتجاه شعاعها الملامس للنقطة المبنية من الدائرة.

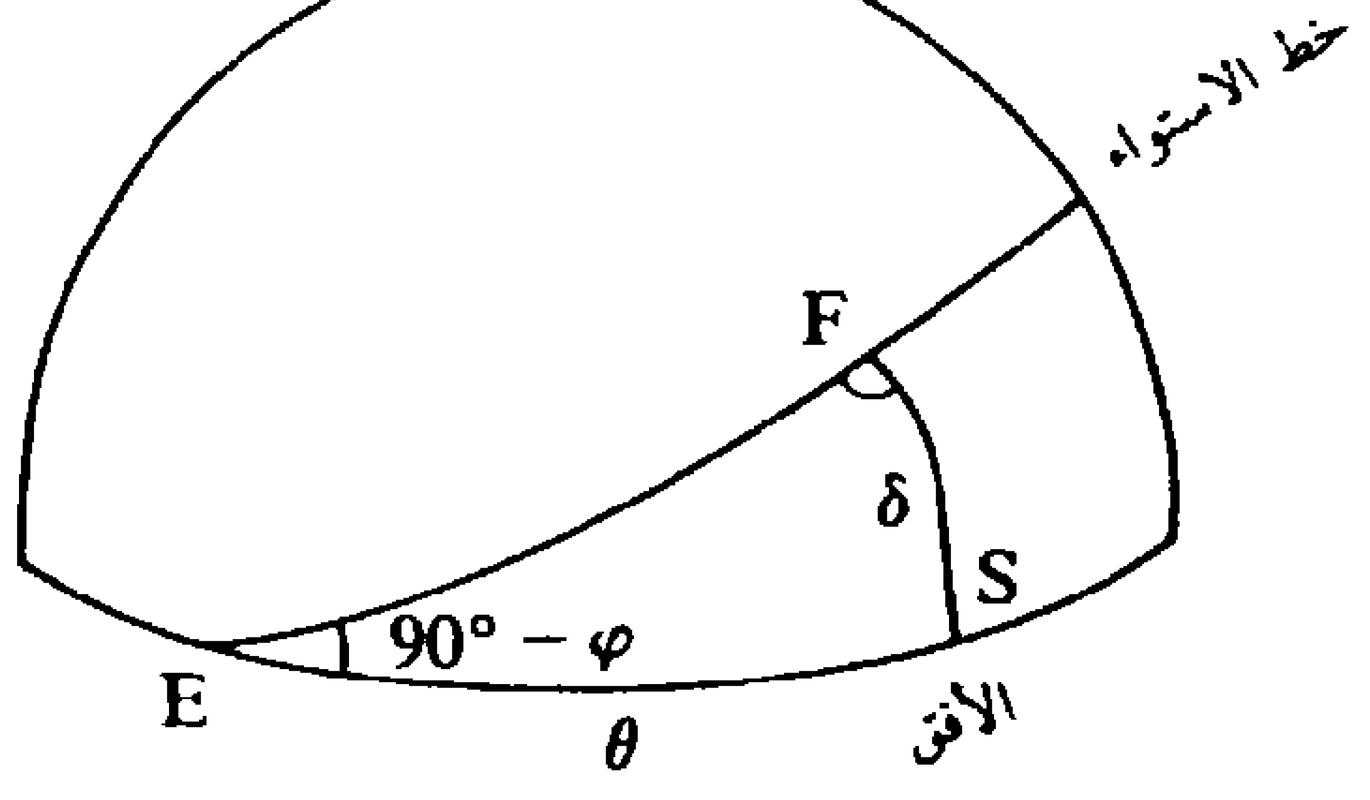
وقد درس الفارابي وأبو الوفاء كذلك البناءات على الكرة، مكرسَين لهذا الموضوع بعضاً من الفصول الأخيرة من أعمالهما الهندسية المذكورة سابقاً. قسم الأولُ الكرة إلى مضلعات كروية منتظمة تتطابق قممُها مع قمم متعددات سطوح محاطة منتظمة وإلى نوع من متعددي السطوح محاط ونصف منتظم. وأضاف الثاني تقسيمات جديدة من هذا النوع لمتعددي سطوح أخرى نصف منتظمة. وكرس ابن الهيثم كتابه **قول في بركار الدوائر العظام** لبناءات هندسية على الكرة دون سواها.

وقد لعب تطبيق الطرق الهندسية في حل مسائل علم المثلثات الكروي، دوراً كبيراً في هذا العلم. ونُذَكِر هنا بما أوردناه بشأن دراسات البيروني والخرقي (الفقرة السابقة: التحويلات الهندسية) لتحديد سمت القبلة بإسقاط تجسيمي للكرة السماوية على مستوي الأسطرلاب. وكان هذا التحديد يتم عادة بطرق مكافئة لاستعمال قوانين جيب التمام الكروي.

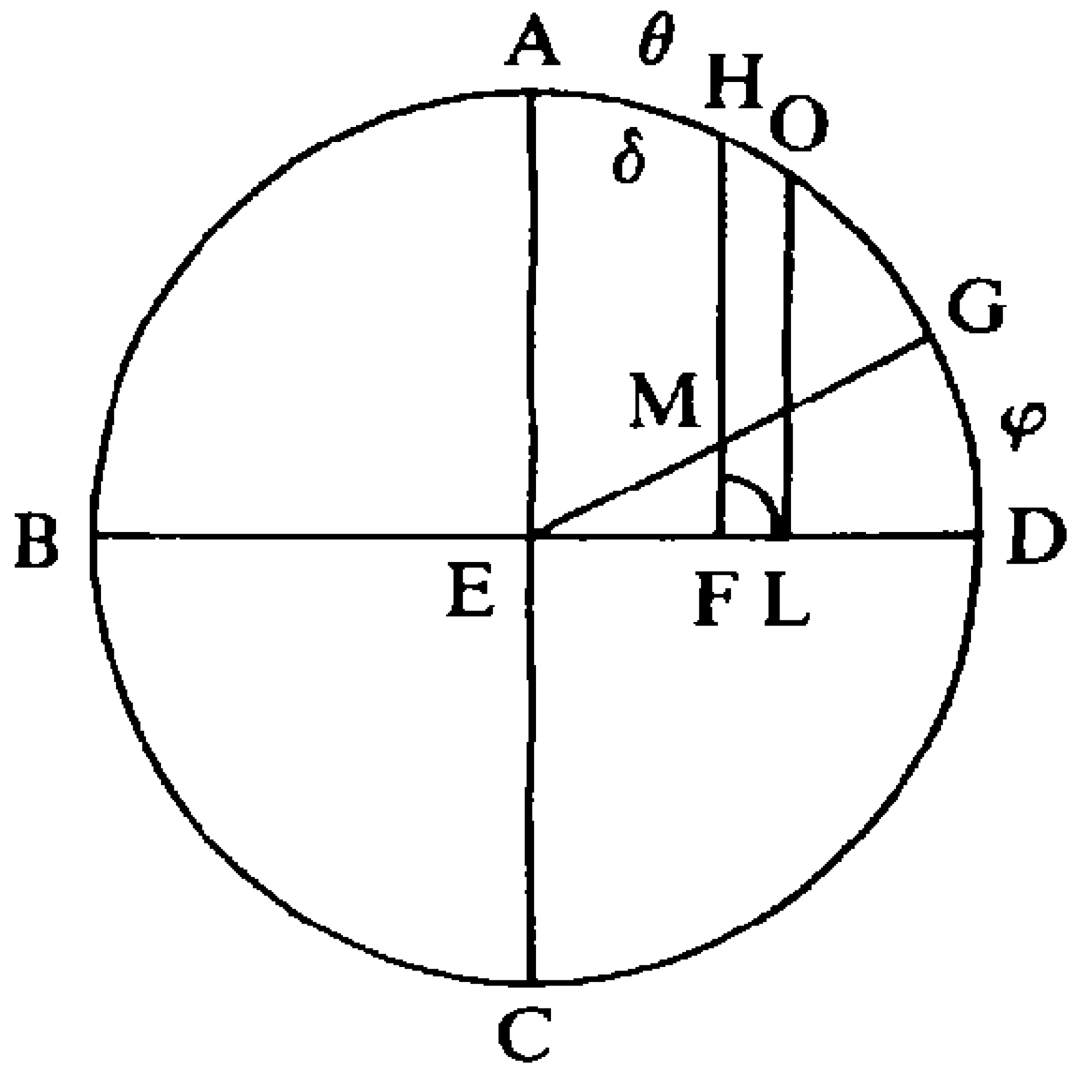
اكتشف الخوارزمي حلاً هندسياً آخر لمسائل علم المثلثات الكروي. وقد وصف هذا الحل في مؤلفه **عمل سعة أي مشرق شئت من البروج في أي عرض شئت بالهندسة**. وعرفت طريقة الخوارزمي انتشاراً واسعاً: إذا كان φ خط عرض مكان الرصد وكان δ ميل الشمس في يوم ما، يبني الخوارزمي خط الطول أي القوس θ من دائرة الأفق المشدود بين نقطة الشرق ونقطة الفجر حسب القانون التالي:

$$sin\theta = sin\delta/cos\varphi$$

وباعتبار أن القوس θ هو وتر المثلث القائم الكروي EFS (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٣)) وأن القوس δ هو الزاوية المشتركة لمواقعه وأن متمم خط العرض $(90° - \varphi)$ الزاوية المقابلة لهذا الموقع، فإن طريقته تتكافأ مع تطبيق قوانين الجيب الكروي على المثلث EFS. وقد حصل الخوارزمي هندسياً على القوس θ بالطريقة التالية: بنى الدائرة $ABCD$ مع



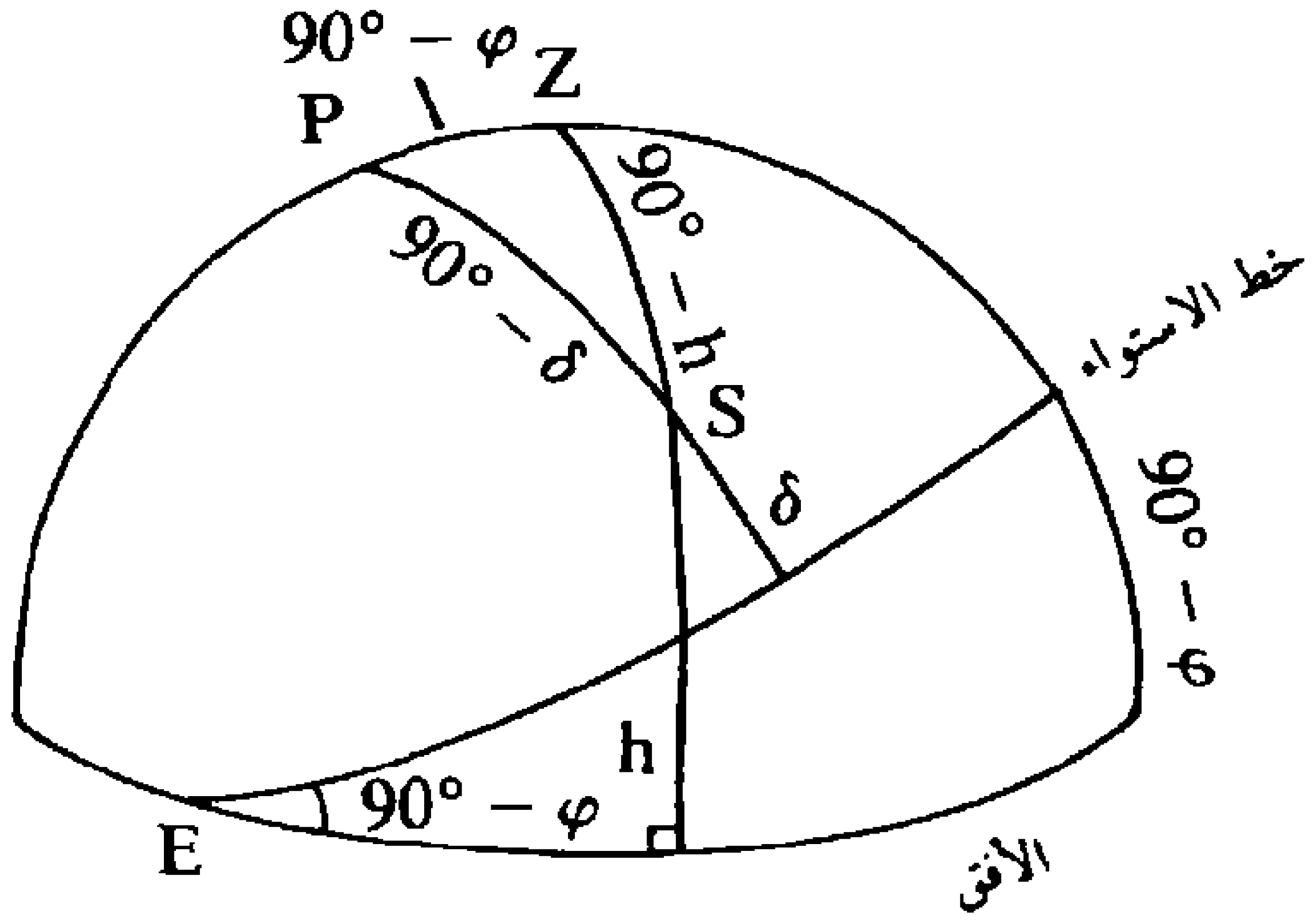
الشكل رقم (١٤ ـ ٢٣)



الشكل رقم (١٤ ـ ٢٤)

قطرين متعامدين AC وBD يلتقيان في مركز الدائرة E؛ وقاس القوس AH المساوي لـ δ والقوس DG المساوي لـ φ (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٤)) على القوس AD؛ ورسم الشعاع EC والخط المستقيم HF الموازي للقطر AE؛ وحدد نقطة التقائهما M؛ وبعد ذلك رسم قوساً شعاعُه EM ومركزه E ويحدد النقطة L وهي التقاؤه بالقطر BD؛ وأخيراً، رسم الخط المستقيم LO الموازي لـ AE ولـ HF، جامعاً القوس AD بطريقة يعادل معها القوس AO خط الطول المجهول.

أعطى محمد الماهاني (ت بين ٨٧٤ و٨٨٤م) والأصغر سناً بقليل من الخوارزمي، بناءً هندسياً مشابهاً لقوسٍ يعادل سمت الشمس A انطلاقاً من علوه h وخط الطول δ وخط العرض φ لمركز الرصد الذي وصفه في مؤلفه **مقالة في معرفة السمت لأي ساعة أردت وفي أي موضع أردت**. وهذا البناء للماهاني تطابق مع القاعدة التي أدخلها الخوارزمي في مؤلفه **معرفة سمت من قبل ارتفاع**. إذا استُنْتِجت θ من δ وφ حسب قاعدة الخوارزمي، تصبح العبارة التي تعطي A تبعاً لـ δ وh وφ متكافئة مع قانون جيب التمام الكروي للمثلث الكروي SPZ (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٥)). ونشير هنا إلى أن كثيراً من الزيج العربية اللاحقة ومن الأعمال الفلكية الأخرى استخدمت بناءات الخوارزمي والماهاني.



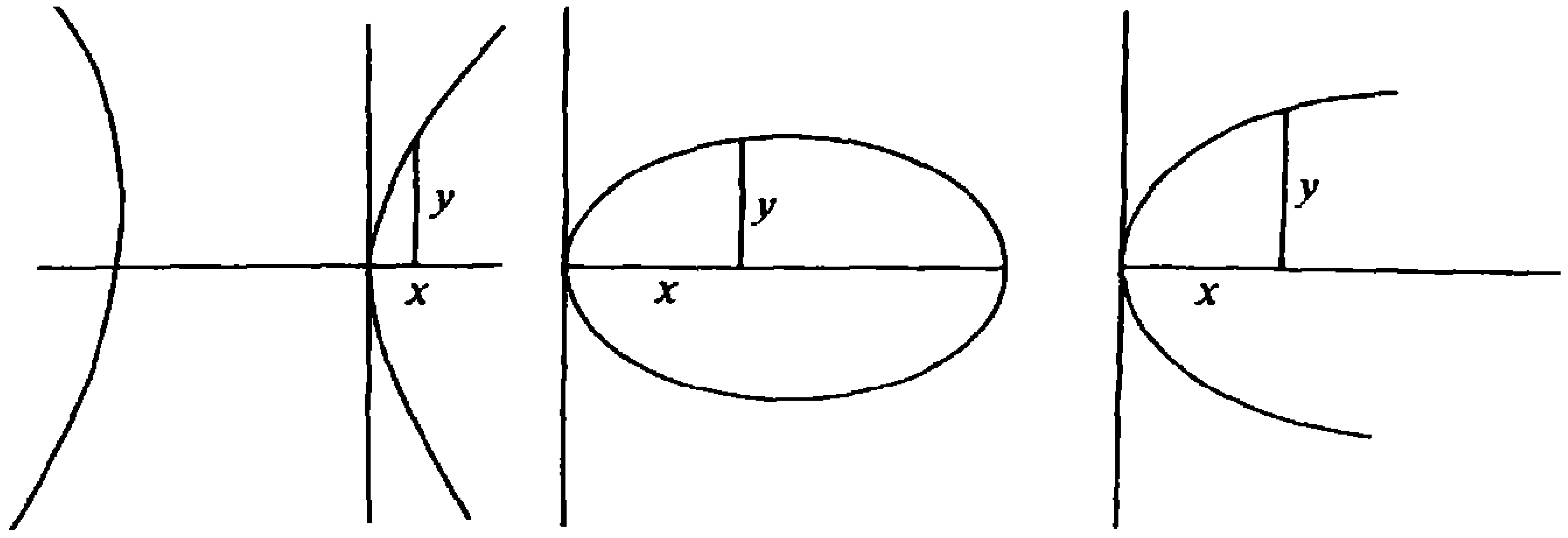
الشكل رقم (١٤ ـ ٢٥)

الإحداثيات

عند مضاعفته المكعب بتحديد تقاطع قطعين مكافئين، كان مينيشم (Ménechme) (القرن الرابع قبل الميلاد) بالفعل أول من استخدم الإحداثيات المتعامدة، المعتبرة كقطعات من خطوط مستقيمة. لقد ظهرت إحداثيات مشابهة في «مخروطيات» إقليدس المفقودة استخدمها هذا المؤلف لتمثيل، ودراسة، خصائص القطوع الناقصة والزائدة ودراستها. طبق

أرخميدس مثل هذه الإحداثيات في مؤلّفيه **تربيع القطع المكافىء** و**الكرويات والمخروطيات** (Conoïdes). وفي **مخروطاته**، استخدم أبولونيوس إحداثيات متعامدة وإحداثيات مائلة على حد سواء؛ بينما أدخل أرخميدس الإحداثيات القطبية في مؤلفه **الحلزونيات**.

مع ذلك، فإن هذه الوقائع لا تعني أن العلماء الأقدمين تمكنوا من طريقة الإحداثيات كما فعل علماء الرياضيات في نهاية القرن السابع عشر. ففي العصور القديمة، كانت الإحداثيات مرتبطة بشدة بالمنحنيات التي تتناولها. وفي أعمال مينيشم وإقليدس، كانت الإحداثيات المتعامدة قطعة من أحد محاور قطع مخروطي وقطعة أخرى موازية للمحور الآخر (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٦أ وب وج)). أما أبولونيوس فقد استخدم قطعة من قطرٍ من قطع



(ج) (ب) (أ)

الشكل رقم (١٤ ـ ٢٦)

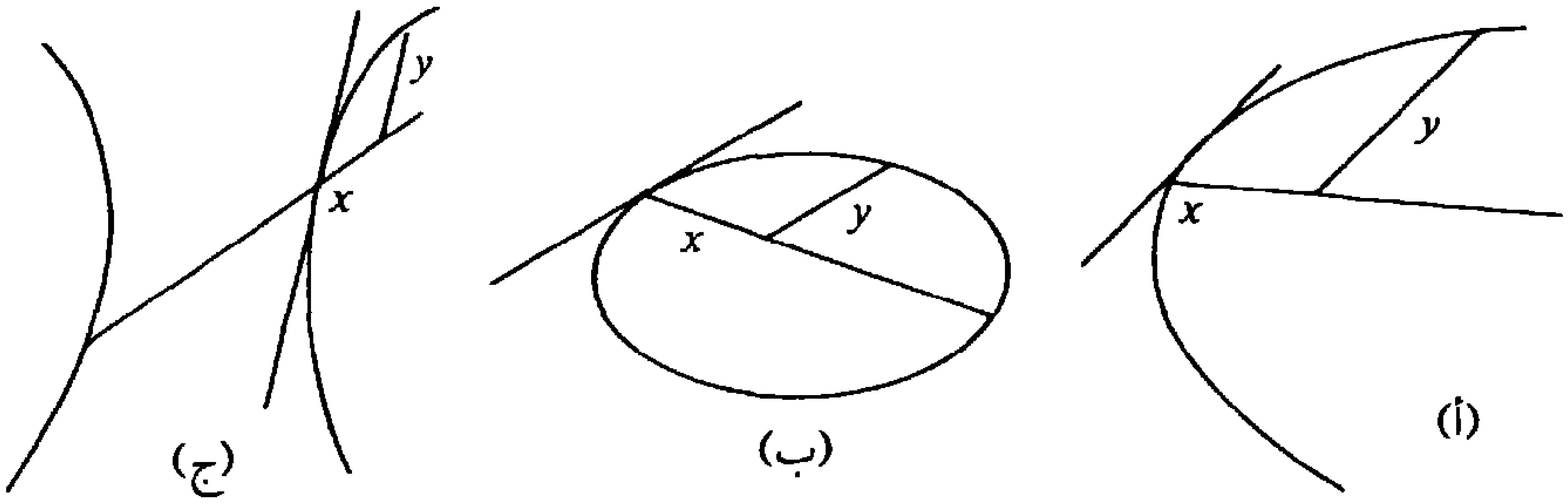
مخروطي وقطعة من الوتر المرافق (Conjugué) لهذا القطر كإحداثيات مائلة لمخروطياته (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٧)). وأخيراً، يمكن تقديم إحداثيات أرخميدس «القطبية» كالتالي: نأخذ مقطعاً مستقيماً، أصله ثابت، على محور ثابت، تتغير الزاوية التي يصنعها هذا المقطع مع المحور بحيث تبقى متناسبة (بنسبة ثابتة) مع طول المقطع، فيرسم الطرف الثاني لهذا المقطع «حلزونية أرخميدس».

وهكذا، لم يمتلك العلماء الأقدمون أدنى فكرة عن الصور الهندسية للمعادلات ما بين نوعي الإحداثيات[٢٦]. لم يناقشوا سوى العلاقات الخاصة من هذا النوع بين إحداثيات نقطة من منحنٍ، وحتى أنهم استخدموا تعبيراً خاصاً لهذه العلاقات، فسموها دلالات (أو علامات) المنحنيات المدروسة. غير أن، الإحداثيات بمفهوم ديكارت (Descartes) وفيرما (Fermat)، لم تكن دون صلة مع إحداثيات العلماء الأقدمين لأن تعابيرهما العصرية: «abcisse» و«ordonnée» هي الترجمات اللاتينية المختصرة للتعابير المقابلة «مقطوع من الرأس» و«موضوع بترتيب» التي استعملها أبولونيوس.

---

(٢٦) الإحداثي السيني والإحداثي الصادي، س وَ ص، x وَ y.

استخدم جغرافيو العصور القديمة نظاماً من الإحداثيات موجوداً على سطح الأرض، كانوا يعتقدون أولاً أنه على شكل مستطيل، ثم على شكل كرة. وظهر تعبيرا خط الطول (طول) وخط العرض (عرض) في الزمن الذي استُعْمِل فيه النموذج الأول، واستمر استعمالهما حتى في النموذج الكروي.

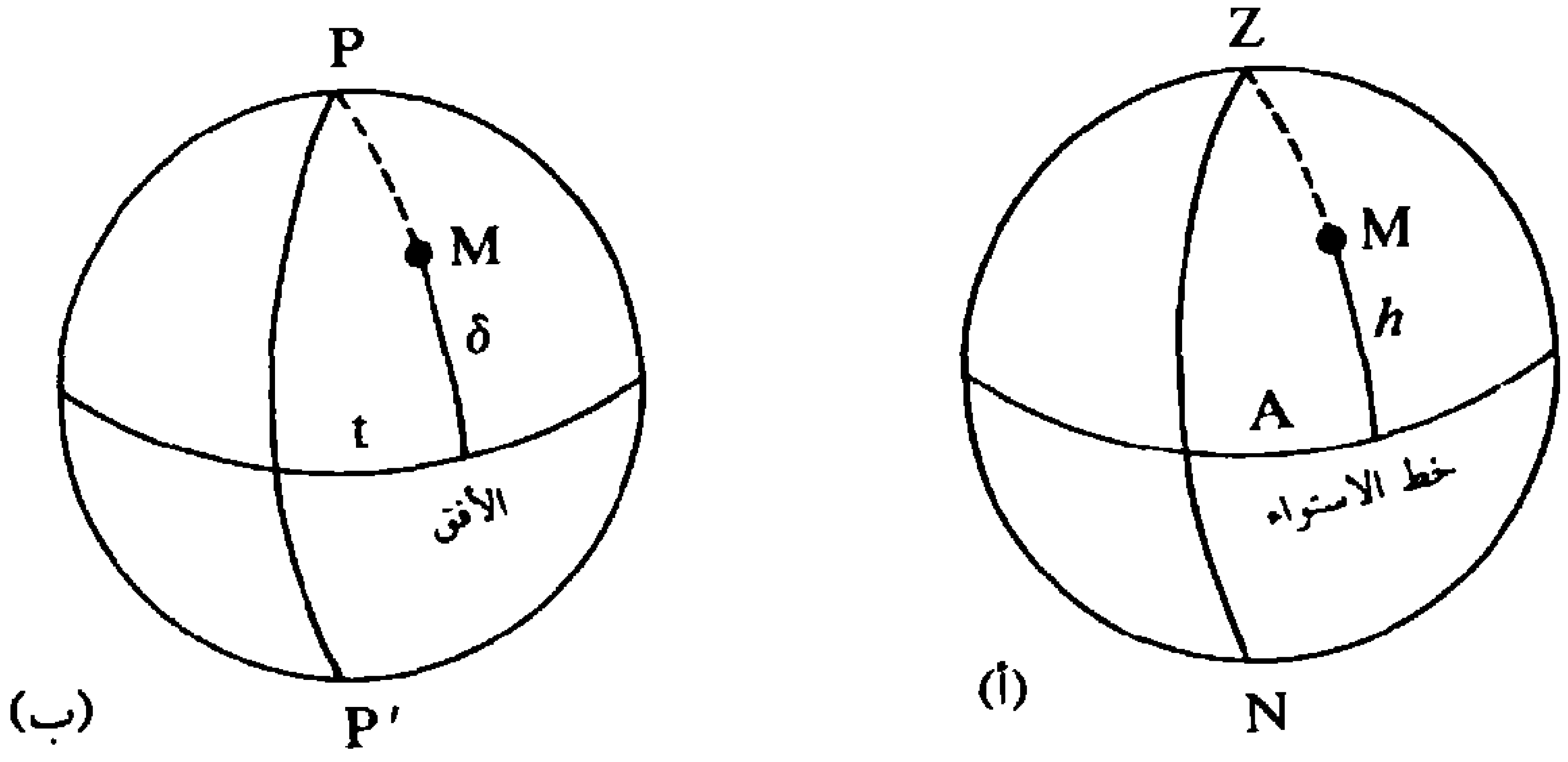


الشكل رقم (١٤ ـ ٢٧)

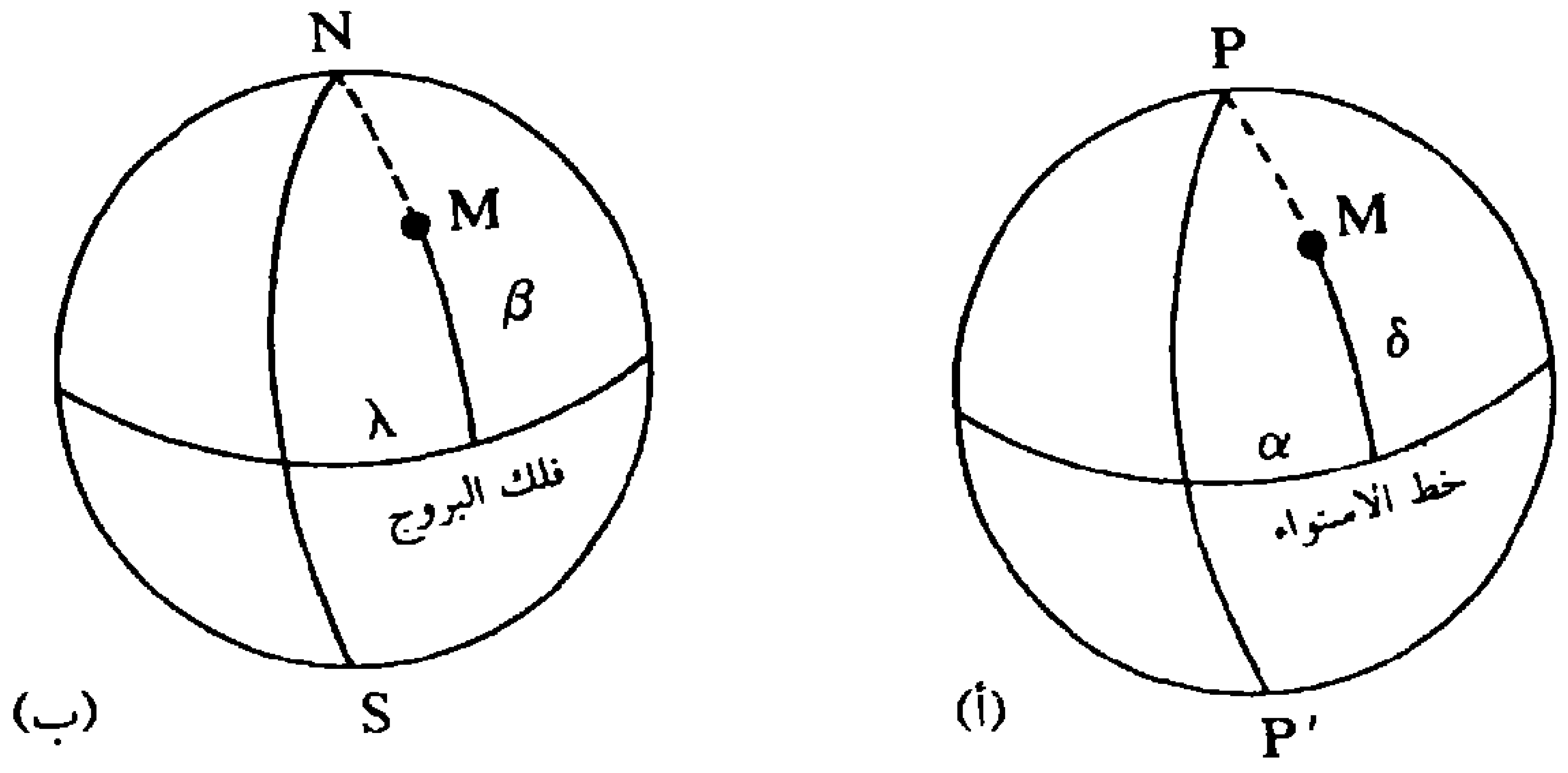
وبما أن علماء الرياضيات الأقدمين كانوا يمثلون الإحداثيات في مستوٍ بقطعات وبزوايا إيجابية (دائماً)، كان على الجغرافيين الإشارة إلى ما إذا كانت خطوط العرض على الكرة إلى شمال خط الاستواء أو إلى جنوبه، وهذا يتكافأ مع التمييز بين الإحداثيات الإيجابية والسلبية. ولنلحظ مع ذلك أن عملية الضرب لم تطبق أبداً على خطوط العرض.

قضت القاعدة بالتعبير عن الإحداثيات الجغرافية بالدرجات والدقائق. وقد استعمل علماء الفلك الأقدمون أنواعاً عديدة من الإحداثيات الكروية على الكرة السماوية. وكانت هذه الإحداثيات شبيهة بالإحداثيات الجغرافية على سطح الأرض. وقد أقاموا نظامين من الإحداثيات: النظام الأفقي وله دائرة الأفق كخط استواء ونقطتي السمت والنظير كقطبين (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٨أ))؛ والنظام الاستوائي وعناصره على التوالي هي خط الاستواء السماوي وقطبا الكون (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٨ب)). كما استخدموا نظامين آخرين تبعاً للدوران اليومي للنجوم الثابتة: النظام الاستوائي المتحرك (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٩أ))، ونظام فلك البروج بإحلال فلك البروج محل خط الاستواء مع قطبيه (الشكل رقم (١٤ ـ ٢٩ب)).

واستعمل علماء الجبر (انظر الفصل الحادي عشر: الجبر) وبشكل منهجي إحداثيات أبولونيوس عند تحديدهم الجذور الإيجابية للمعادلات الجبرية من الدرجتين الثالثة والرابعة، وذلك بدراسة تقاطع القطوع المخروطية.



الشكل رقم (١٤ ـ ٢٨)

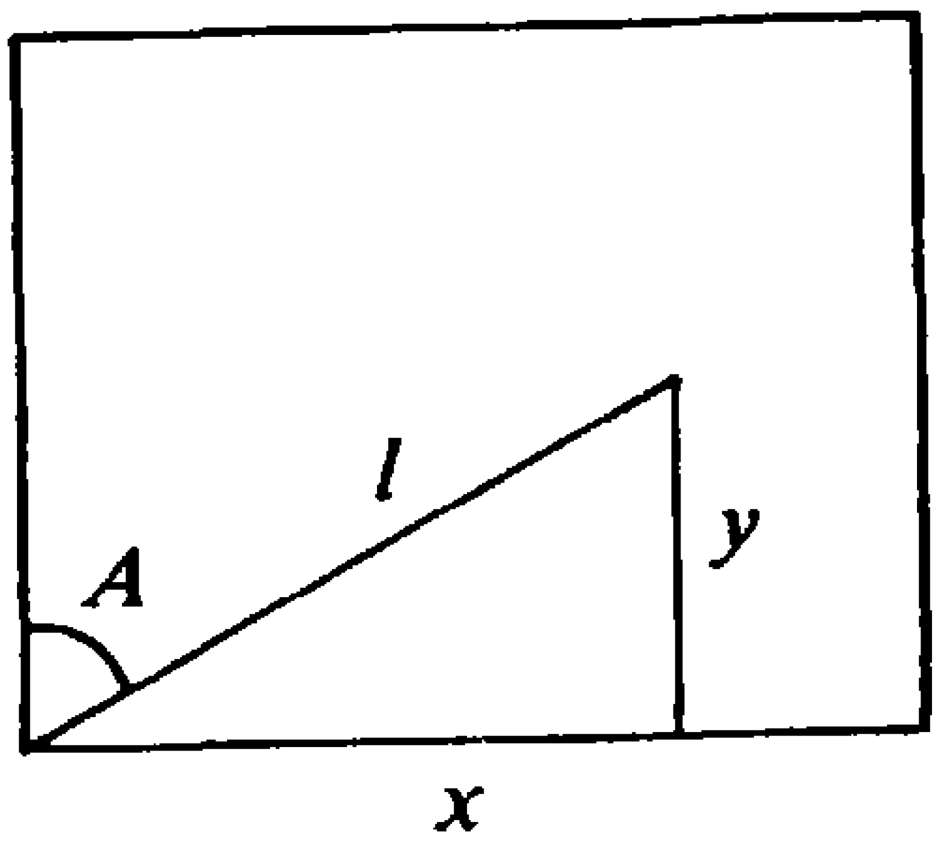


الشكل رقم (١٤ ـ ٢٩)

كان العلماء العرب على معرفةٍ أكيدة بالترجمات العربية لكتاب بطلميوس **المجسطي** وبالصيغ المختلفة المنقحة بالأصل والمراجعة أيضاً بالعربية، لكتابه **الجغرافيا**. وكان كتاب **صورة الأرض** للخوارزمي أولى هذه المراجعات. ولهذا استعمل علماء البلاد العربية دائماً خط العرض وخط الطول الجغرافيين، كما استعملوا مختلف الإحداثيات على الكرة السماوية. وانتهى الأمر بتعبير «السمت» المستعمل كإحدى إحداثيات النظام الأفقي بأن يدل أيضاً على الاتجاهات على سطح الأرض.

وفي مؤلفه **كتاب في آلات الساعات التي تسمى رخامات** حدد ثابت بن قرة موضع طرف ظل المزولة الشمسية في مستوي هذا الجهاز، بطول الظل (لنسمِه l) وبسمته (A). ويمكننا اعتبار هذه الوسيطات كإحداثيات قطبية لنقطة في المستوي. إضافة إلى ذلك أدخل

المؤلف «أجزاء الطول» (x) و«أجزاء العرض» (y)، أي الإحداثيات المتعامدة للنقطة عينها، وأعطى صيغ المرور من l و A إلى x وy (الشكل رقم (١٤ ـ ٣٠)). وهذه الصيغ هي في تعبيرنا الشائع:

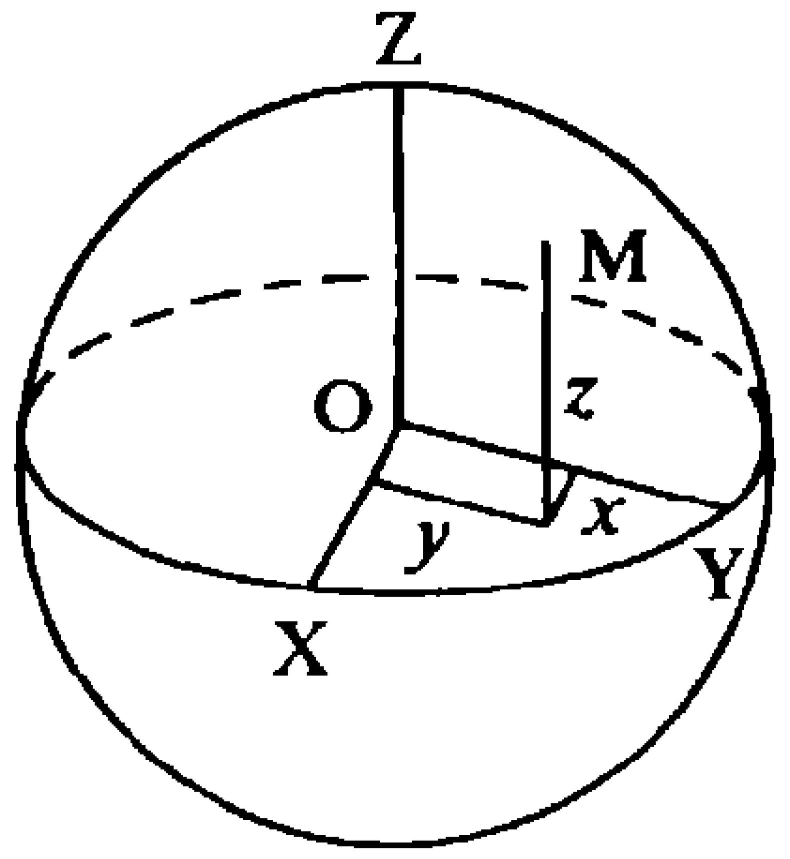


الشكل رقم (١٤ ـ ٣٠)

$$y = lcosA \text{ و } x = lsinA$$

وبما أن التعبير العربي لكلمتي خط طول وخط عرض هو على التوالي «طول» و«عرض»، وبما أن كلمة «جزء» استُعْمِلَتْ غالباً بمعنى «درجة»، فالعبارتان «أجزاء الطول» و«أجزاء العرض» كانتا تعنيان المعنى نفسه الذي تعنيه عبارتا «درجات خط الطول» و«درجات خط العرض». وهذا ما يثبت أن ثابت بن قرة قد استعار من الجغرافيين تعابيرهم الخاصة للدلالة على الإحداثيات المتعامدة.

إن المسائل المتعلقة بالمزاول الشمسية التي قادت هذا العالم، أي ثابت بن قرة، إلى التنبه للرابط الموجود بين الإحداثيات المتعامدة والقطبية هي ذاتها التي قادت البيروني إلى الإحداثيات الفضائية. ففي كتابه في **إفراد المقال في أمر الأظلال** وعند دراسته ظلال المزولة الشمسية المسقطة على مستوي الأفق بمصادر الضوء الموجودة على الكرة السماوية، لاحظ البيروني أن تغيرات الظلال على المستوي تترافق مع تغيرات في مواقع مصادر الضوء الموازية للقطر. . . المؤلّف من الارتفاع ومن العمق أو الموازية لقطرين آخرين. . . المؤلّفين من الطول ومن العرض[٢٧]. قطرا الطول والعرض هما المحوران OX وOY والقطر الأول هو المحور OZ (الشكل رقم (١٤ ـ ٣١)). وهكذا، بتحديده للموقع الفضائي لمصدر ضَوْئي بواسطة موقع «أقطاره»، أدخل البيروني بالفعل الإحداثيات الفضائية المتعامدة.



الشكل رقم (١٤ ـ ٣١)

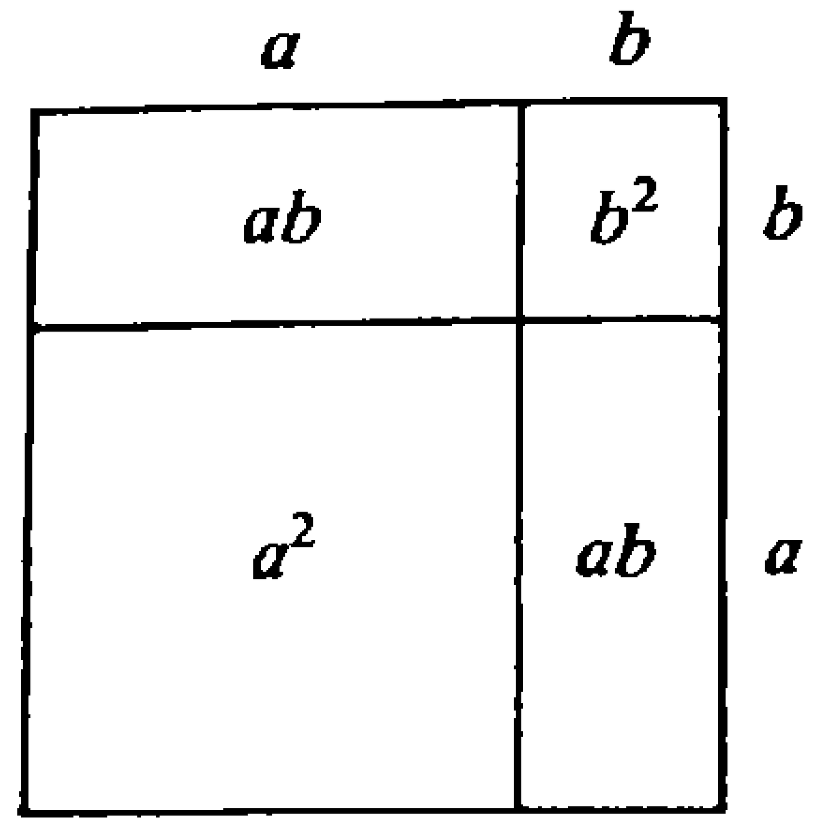
(٢٧) انظر: Abu al-Rayhan Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī, *Ifrād al-maqāl fī 'amr al-Ẓilāl: The Exhaustive Treatise on Shadows*, translation and comment by Edward Stewart Kennedy, 2 vols. (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1976), vol. 1, p. 228.

تعميم الصيغ الهندسية للمتطابقات الجبرية (Identités)

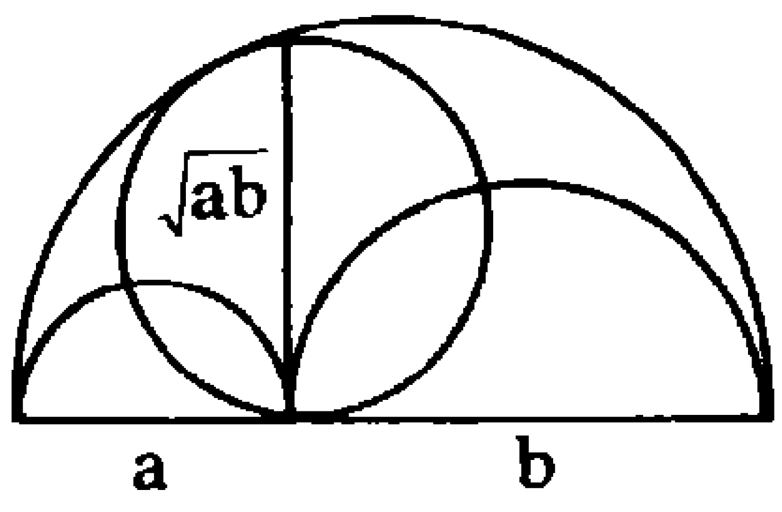
لم يستعمل قدامى الإغريق سوى الصيغ الهندسية المستوية للمتطابقات الجبرية. فقد اقترح إقليدس، في الكتاب الثاني من الأصول، تأويلاً هندسياً للمتطابقة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (١)$$

(الشكل رقم (١٤ ـ ٣٢)) ولمتطابقات أخرى من الدرجة الثانية. وأعطى أرخميدس في مقدماته، تأويلاً هندسياً آخر للمطابقة (١). فبرهن أن متمم نصف ـ الدوائر ذات القطر a وb، إلى نصف ـ الدائرة ذات القطر $a+b$ (الشكل رقم (١٤ ـ ٣٣)) (وهذا المتمم يدعى «arbelon»)، يعادل دائرة قطرها $\sqrt{ab}$.



الشكل رقم (١٤ ـ ٣٢)



الشكل رقم (١٤ ـ ٣٣)

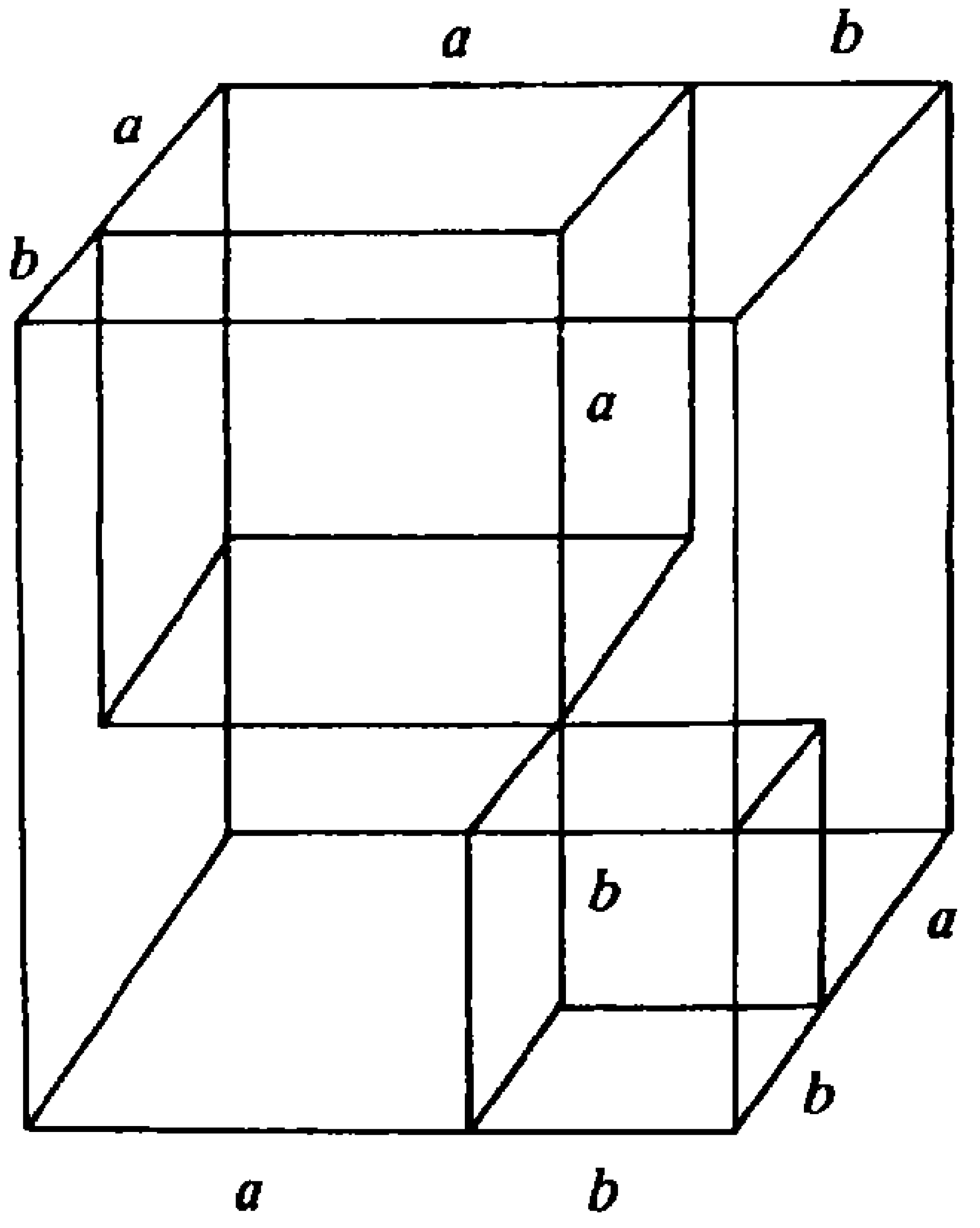
وفي مؤلفه كتاب في مساحة الأكُر بالأكُر، عمم أبو سعيد السجزي (نحو ٩٥٠ ـ نحو ١٠٢٥م) صيغ الهندسة المستوية لإقليدس وأرخميدس مستخدماً المسائل «الفراغية». واقترح تأويلاً مجسامياً للمطابقة:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

وذلك بتقسيمه مكعباً إلى مكعبين وثلاثة متوازيات سطوح. وكذلك شرح المطابقة:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

وذلك بتقسيمه مكعباً إلى مكعبين وستة متوازيات سطوح، وكذلك بلجوئه أيضاً إلى مجسم ناتج عن دوران المتمم «arbelon» حول قطره $a+b$ (الشكل رقم ١٤ ـ ٣٤).



الشكل رقم (١٤ ـ ٣٤)

وفي نهاية مؤلفه، تشهد قضيتان أن السجزي حاول أيضاً أن يخطو إلى المرحلة التالية (أي لمعالجة متطابقات من الدرجة

الرابعة). ففي إحدى القضيتين، أخذ بالاعتبار «كرة» قطرها $a+b$ وكرة أخرى قطرها a مماسة للأولى من الداخل ومع الافتراض أن: $(a+b)^2 = 5a^2$. وأكد أن «الكرة» الأولى تعادل 25 ضعفاً من الكرة الثانية. في الوضع الطبيعي، تكون هذه النسبة $5\sqrt{5}$ بدلاً من 25؛ غير أن نسبة السجزي تكون صحيحة في «فوق الكرات» أو الكرات الفوقية في الفضاءات ذات الأبعاد الأربعة. ولم يتطرق الكاتب أبداً إلى هذا الفضاء ولم يكن لديه المصطلحات المناسبة، لكن مجردُ وجودِ فرضيته يعني أنه فكر (على ما يبدو) بتعميم مبرهنات الهندسة ذات الأبعاد الثلاثة إلى حالة متعددة الأبعاد.

وفي أوروبا، صيغت فكرة المكعبات متعددة الأبعاد مباشرةً وللمرة الأولى في القرن السادس عشر، في تعليقات م. ستيفل (M. Stifel) على كتاب الجبر الذي ألفه ك. رودولف (Chr. Rudolff). وكان رودولف قد درس المكعب المعروف بـ«مكعب كريستوف»، الذي هو فعلاً تقسيم مكعب قام به السجزي إلى مكعبين وستة متوازيات سطوح.

ولا بد من ذكر تعبير خاص ورد في الأعمال الهندسية للفارابي وأبي الوفاء. لقد أوردنا في الفقرة الرابعة طريقتهما في بناء مربع يعادل مجموع ثلاثة مربعات متشابهة، حيث يكون ضلع المربع المجهول يساوي قطر مكعب مبني على المربع المُعطى. وبعد عَرْضِه للطريقة، أكد الفارابي أن هذه الطريقة تبقى صحيحة إذا أردنا بناء مربع يستند إلى أقل أو أكثر من ثلاثة مربعات[٢٨]. (ويمكننا إيجاد جملة شبيهة في أعمال أبي الوفاء). وهذه الكلمات يمكن تفسيرها بالتأكيد على أنها إيحاء لبناء شبيه بواسطة مكعب متعدد الأبعاد. واستطاعت العبارات «فوق الهندسية» الدالة على الدرجات الجبرية التي تتجاوز الثالثة، كعبارة «مال المال» المعبرة عن x^4، و«كعب المال» المعبِرة عن x^5، و«كعب الكعب» المعبِرة عن x^6، أَنْ تحمل الفارابي (وفيما بعد ستيفل (Stifel)) على محاولة مثل هذا التعميم. ومن المحتمل أن يكون كتاب **المَدْخل إلى الهندسة الوهمية** قد كرِس للموضوع عينه.

استنتاجات

وكما عِلمُ الحساب والجبر العربيان، كذلك أثرت الهندسة العربية تأثيراً بالغاً في نمو الرياضيات في أوروبا الغربية. وكان **كتاب القياسات** ***(Liber embadorum)*** لأبراهام برحيّا (Abraham bar Hiyya) (نحو ١٠٧٠ ـ ١١٣٦م) أحد أوائل الأعمال الأوروبية الغربية في الهندسة. وكان هذا الكاتب يدعى في الأدب اللاتيني سافازوردا (Savasorda)، وهو اسم مشتق من العبارة العربية «صاحب الشرطة». ولقد وضعه مؤلفه بالعبرية وفيما بعد نقله أفلاطون التيڤولي (Platon de Tivoli) إلى اللاتينية. ويحتوي هذا المؤلف على عدة قواعِد حسابية في الهندسة العربية، التي يتضمن بعض منها الجبر.

(٢٨) Al-Fārābī, *Al-Rasā'il al-riyāḍiyya (Matematicheskie Traktaty)*, p. 200.

وفي منتصف القرن الثاني عشر، نقلَ سافازوردا وأفلاطون التيفولي أعمالاً عربية إلى اللاتينية، منها عدة كتب للخوارزمي وثابت بن قرة وابن الهيثم.

وَوَضع ليونارد البيزي (Léonard de Pise) (نحو ١١٧٠ ـ ١٢٥٠م) كتابه **الهندسة العملية** *(Practica geometriæ)* تحت تأثير عربي شديد. ويحتوي هذا الكتاب على عدد من المبرهنات التامة مع براهين في الهندسة المستوية والفضائية. ويستعمل الكاتب نفسه، في مؤلفه الحسابي والجبري *(Liber Abaci)*، تعابير ذات أصلٍ عربي؛ مثل تعبير «figura chata» وأصلها العربي «شكل القطاع» (مبرهنة القاطعات).

وكما كان الإسقاط الفضائي(٢٩) (انظر الفقرة المتعلقة بالإسقاطات) ذا شعبية واسعة في الشرق العربي، كذلك صار في أوروبا. وبواسطة هذا الإسقاط، بنى صانعو الآلات الأوروبيون الأسطرلابات على الطريقة العربية. ومن الواضح أن الأوروبيين قد اتبعوا العرب في هذا المجال. فأسماء النجوم المحفورة على عناكب الأسطرلابات الأوروبية كانت وبصورة أساسية نسخاً (وغالباً ما كان هذا النسخ مشوهاً) للأسماء العربية الموافقة. ولا مجال للشك في أن الأسماء الأوروبية الحالية للنجوم في بعض الحالات هي نقل مشوه (محرف) لأسمائها العربية.

وقد ألف ويتلو (Witelo)، وهو رجل علم بولوني من القرن الثالث عشر، كتابه *Perspectiva* (الذي لا بد أن يكون كتاب كبلر (Kepler) الشهير: *Astronomia pars optica* تكملة له تحت التأثير الواضح لمؤلف ابن الهيثم **كتاب المناظر**.

ولقد أتينا في الفقرتين السادسة والسابعة («نظرية المتوازيات» و«التحويلات الهندسية») على ذكر رسالة **تقويم المنحني** أو استقامة المنحنيات «redressement de la courbe» لألفونسو، كما ذكرنا تفسيرات ليفي بن جرسون (Levi ben Gerson) لِـ **أصول** إقليدس، والمؤلفان مكتوبان بالعبرية في القرن الرابع عشر.

وفي القرن الخامس عشر، وبعد الفتح التركي للقسطنطينية، هرب كثير من اليونان البيزنطيين نحو أوروبا الغربية حاملين معهم مخطوطات عربية. فهكذا، وصلت إلى إيطاليا مخطوطتان منسوختان عن **عرض إقليدس المنسوب إلى الطوسي**(٣٠) (L'Exposition d'Euclide du Pseudo - Tûsî)، ونُشِرَ المؤلف نفسُه في روما انطلاقاً من إحدى هاتين النسختين. ولقد ذكرنا هذا الحدث في الفقرتين الرابعة والخامسة «بناءات هندسية» و«أسس الهندسة» حيث أشرنا أيضاً إلى أن برهان مصادرة إقليدس الخامسة كما وَرَدت في هذا الكتاب قد أثر في نظريات المتوازيات لواليس وساكيري (Wallis و Saccheri).

---

(٢٩) في الفضاء أو في الفراغ.
(٣٠) «المنسوب خطأ إلى الطوسي» حسب ما وردت سابقاً.

وهكذا نرى أن الأدبيات الهندسية العربية انتقلت إلى علماء الرياضيات في أوروبا الغربية بواسطة وسائل مختلفة: عبر إسبانيا، في القرن الثاني عشر؛ وبفضل التجارة المتوسطية، خلال القرنين الثاني عشر والثالث عشر؛ ومع اليونان البيزنطيين في القرن الخامس عشر. وهذا الحدث لعب دوراً هاماً في تكوين الهندسة الأوروبية ونموِها.

مع ذلك، وحسب معرفتنا الحالية على الأقل، بقي الأوروبيون في جهلِ عددٍ من اكتشافات العلماء العرب التي اكتشفوها بأنفسهم فيما بعد. فلم تُتَرْجَم جميعُ أعمال الخوارزمي وثابت بن قرة وابن الهيثم إلى اللاتينية، وبعيداً عن ذلك، فأوروبا القرون الوسطى لم تعرف شيئاً عن أعمال البيروني. وكذلك، لم يكن العلماء الأوروبيون على علم بمعظم البناءات الهندسية التي قام بها الفارابي وأبو الوفاء؛ وبالتحويلات التآلفية التي استعملها ثابت بن قرة وحفيده إبراهيم بن سنان؛ وكذلك بالرسائل العربية عن نظرية المتوازيات حيث حلت بوضوح صيغ عديدة متكافئة محل مصادرة إقليدس الخامسة.

- ١٥ -

علم المثلثات

من الهندسة إلى علم المثلثات

ماري تيريز ديبارنو(*)

إن علم المثلثات، وهو العلم المساعد في دراسة حركات النجوم، علم قديم تعود أصوله على أقل تقدير إلى زمن إبرخس، الذي يُنسب إليه أول جدول للأوتار. وكان علماء الهند قد استبدلوا، حوالى القرن السادس الميلادي، الوتر القديم للقوس المضاعف بنصفه، أي بما يعادل الجيب الحالي مضروباً بشعاع (نصف قطر) الدائرة أو الكرة R (وهذا ما سنرمز إليه هنا بـ Sin بدلاً من $R\ sin$)، مع إعطاء قيم مختلفة (150، 3438، 120، . . .) للشعاع R. إن إسهام العلم الهندي في هذا الميدان لا يَقتصر فقط على إدخال مفهوم الجيب. لكن كتاب **المجسطي** ما لبث أن حل، لدى علماء الفلك العرب في القرن التاسع الميلادي، محل كُتُب **السندهند** الهندية. وسبب ذلك أن هذا الكتاب مثير للإعجاب بدقة عرضه وببراهينه وببرامج الرصد التي يقترحها. إن البنيان الضخم الذي بناه بطلميوس في كتابه الشهير **كتاب بطلميوس في التعاليم**، يستند بشكل أساسي، ولو نتج عن ذلك تناقض ظاهري، إلى قضايا هندسية بسيطة جداً. فالحسابات المعقدة إلى حدٍ ما والخاصة بهيئات الكواكب تستخدم بشكل دائم مبرهنة فيثاغورس والوتر الذي يُمثل ضلعاً للزاوية القائمة في مُثلث قائم الزاوية وذي وتر مساوٍ لقطر دائرة مرجعية (مع $R = 60$ وهذا ما يُسهِّلُ استخدامه في النظام الستيني). وهكذا يتم الحصول على قيم أضلاع وزوايا المثلثات المُستوية (المسطحة) بعضها من البعض الآخر. ونجد هذا الأسلوب الهندسي نفسه، في الفصل العاشر من المقالة الأولى من كتاب **المجسطي**، مُستخدماً في وضع جدول الأوتار الذي يتضمن صيغ جمع

(*) أستاذة الرياضيات في معهد هنري الرابع - باريس.

قام بترجمة هذا الفصل بدوي المبسوط.

الأقواس. أما الفلكيات الكُروية فهي مُقتصرة كما يبدو على إثني عشر تطبيقاً بسيطاً لُبرهنة منلاوس.

هذه هي، على نحوٍ مُبسط، بنية حساب المثلثات في كتاب **المجسطي**، إذا ما طرحنا جانباً بشكل مؤقت بعضَ الطرائق الأكثر براعة. ولقد أصبح لدى علماء الفلك العرب الأوائل بعد عدة عقود من الزمان، وبفضل اطلاعهم على النصوص اليونانية والهندية، فلكيات كروية قادرة على حل أية مسألة، ولو كانت مصطلحاتها ومواضيعها مشوّشة. ولم يُعطِ الإصلاح الذي قام به هؤلاء ثماره إلا بعد قرن ونصف من الزمان، أي في القرن العاشر الميلادي، عندما أدى إلى صياغة رياضية للمسائل مع ظهور العلاقات الأولى الخاصة بالمُثلث الكروي. وتم بعد ذلك توضيح بعض المفاهيم ولا سيما مفهوم دالة الظل الذي أدخل منذ بداية القرن التاسع الميلادي. وشعر هؤلاء العلماء في الوقت نفسه بأهمية إعداد منهج خاص ومصطلحات خاصة بعلم المثلثات. ويمكن القول إن علم المثلثات قد برز حقاً في عهد البويهيين الذي كانت المراكز العلمية فيه كثيرة ونشيطة. ومنذ ذلك الوقت أصبح هذا العلم الجديد مادةً لمؤلفات مستقلة، بينما أصبح البحثُ، عن جداول للجيوب أكثر وضوحاً في القراءة والتركيب، حافزاً للقيام بأعمال أخرى.

سوف نتتبع في هذا الفصل التطوُر الذي أدى إلى ولادة هذه التقنية الخاصة المسماة علم المثلثات. وسيتوجب علينا الرجوعُ إلى النصوص وذكرُ بعض الصيغ: فالحالة الراهنة لمعارفنا حول هذا العلم لا تسمح لنا بوضع جردة كاملة لموضوعاته. وسوف نتجنب البحث المنهجي عن الرُواد الأوائل الذين سبقوا ريجيومونتانوس (Régiomontanus) وفيات (Viète) وريتيكوس (Rhéticus) وغيرهم من مؤسسي علم المثلثات في أوروبا. لقد بُني علم المثلثات في الغرب على معارف سبق أن تكونت خارج نطاق علم الفلك، بينما أنجب علمُ الفلك قبل ذلك بخمسة قرون علم المثلثات في بلاد العباسيين. لذلك فإن المقارنات بين علم المثلثات الشرقي وعلم المثلثات الغربي لا تخلو من المجازفة. فإن معنى صيغة ما قد يتغير، وإن أهميتها قد تزيد أو تنقص تبعاً للاستخدام الذي يُخصص لها. وسوف نعود إلى هذه القضية عند كلامنا عن صيغ المثلث الكروي الاختياري وعن مفهوم المثلث القطبي. وكذلك فإن من الخطأ أن نخلط مثلاً بين التبسيط الذي أتى به ابن يونس أو الكاشي عندما استبدلا في بعض القواعد الفلكية مضروب الجيوب أو جيوب التمام بمجموع الجيوب أو جيوب التمام، وبين الطريقة الحسابية المسماة «prostaphérique»[1] التي كانت معروفة في أوروبا في القرن السادس عشر والتي كانت مفيدة قبل إدخال اللوغاريتم.

---

(١) طريقة ترتكز على إبدال الضرب بالجمع بواسطة صيغ من أمثال:

$$\cos a . \cos b = [\cos (a+b) + \cos (a-b)]/2$$

انظر مقالة: J. Werner or Wittich, in: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 14, pp. 272-277, and pp. 470-471.

يحدث غالباً في الرياضيات أن تكون بعض المفاهيم مفيدة في فترة من الزمن وأن تسقط بعد ذلك طي الإهمال. وقد رأينا أعلاه مثالاً على ذلك. وهذا ما حدث، في الحقبة التي تهمُّنا، لـ«الجيب المنكوس» $vers(t) = R(1 - cos\ t)$ الذي اقتبسه المؤلفون العرب عن العلم الهندي، والذي لعب في مؤلفاتهم دور جيب التمام. إن الميزة الحسنة للجيب المنكوس، عند غياب أي مفهوم للاتجاه أو للإشارة، هي أنه يأخذ قيماً مختلفة بتغيّر الزاوية t من حادة إلى منفرجة (بينما يتطابق جيب زاوية ما مع جيب الزاوية المُكملة لها). ولقد حظي وضع صيغ المثلثات الكروية على شكل لوغاريتمات بالاهتمام حتى الأمس القريب، ثم أصبح دون فائدة، وكذلك فقد حساب المثلثات المكانة التي كان يحتلُّها في المؤلفات الفلكية. ولقد واكب علم المثلثات، كغيره من العلوم، التطوُّر المُوحد للرياضيات، لذلك وجب علينا أن نلقي نظرة نسبية على كل مرحلة من مراحل تطوُّره. إن الحقبة العربية بالنسبة إلينا هي حقبة وضع صيغ المثلث الأولى والتعاريف الأولى وإدخال مفهوم دالة الظل. وسوف نتناسى الآن كل ما يُعرف حالياً في التحليل الرياضي حول الدالات الدائرية، لكي نرجع إلى الزمن الذي بدأ فيه علم المثلثات يتكون بشكلٍ مستقل عن الهندسة.

١ ـ الحساب الكروي للأزياج

كان للإرث المزدوج (الهندي واليوناني) الذي حصلت عليه الكرويات الفلكية العربية، وللمسائل التي اغتنت بها من هذا الإرث وللطرائق المتبعة في القرن التاسع لحل هذه المسائل، دور حاسم في تكوين الأداة الرياضية اللازمة لتسهيل الدراسة التمهيدية لتلك الكرويات الفلكية. لذلك يجدُر بنا أن نتعرف على عناصر هذا الإرث ولو أدى ذلك إلى أن نتجاوز قليلاً إطار هذه الدراسة.

إن أحد العناصر المُكونة للحساب الكروي، كما يبدو مُفصلاً بإسهاب في «الأزياج» (أي الجداول الفلكية)، هو يوناني الأصل. وهو يتعلق بالدور الأساسي الذي لعبه فلك البروج، أي الدائرة المرجعية لحركات الكواكب. وهذا ما مهد السبيل إلى تجزئة المسائل، الأمر الذي أدى سلفاً إلى تخفيض عدد الصيغ المفيدة. لقد أُرجع كلُ شيء تقريباً إلى فلك البروج، كما هي الحال في كتاب **المجسطي**: زوايا فلك البروج مع المتسامتات (لزاوية اختلاف المنظر) أو مع الأفق (لزاوية قابلية الرؤية)، النقاط أو الدرجات الخاصة بكل نجم على فلك البروج («الدرجة»، «درجة الممر» في مُستوي الزوال، و«درجتَي البزوغ والأفول»)، والنقاط الموجودة في لحظة مُعينة على مُستوي الزوال أو على الأفق (ومنها الطالع الذي يستخدمه المنجمون) والتي تُحدد وضع الكرة المنقادة بالحركة اليومية. لقد ورد في **المجسطي** مفهوم مُهمٌ وهو مفهوم الطالع المائل(٢) الذي يجب حسابُ جدولٍ بمقاديره الموافقة لعرض مكان الراصد للحصول على طول درجة الطالع. وهكذا فإن ما يبقى عمله

---

(٢) لنرمز إلى رأس الجوزهر بـ γ، وإلى نقطة فلك البروج الواقعة على الأفق شرقاً بـ E، وذلك في =

هو تطبيق مُبرهنة منلاوس على مسائل بسيطة انطلاقاً، في أغلب الأحيان، من رباعي أضلاع مرسوم على الكرة ومُشكّل من أرباع الدوائر العظام.

نحن نعلم أن القضية الأولى من الفصل الثالث من كتاب **الأكر** لمنلاوس تُثبت علاقة بين ستة أقواس موجودة على ثلاثة دوائر عظام تحمل أضلاع رباعي كامل؛ وتعادل هذه العلاقة صيغةً في مثلث قائم الزاوية، عندما تكون أضلاع الرباعي مساوية لأرباع الدوائر العظام[٣]. وكان المطلع على فلكيات الأزياج يعرف مثلاً أن جيب ميل الشمس أو جيب «درجة» يساوي حاصل ضرب جيب طول الشمس بجيب الميل الأقصى للشمس (ميل فلك البروج) مقسوماً على شعاع (أي نصف قطر) الكرة. ونحصل على العلاقة (أو القاعدة) التي تربط بين الوتر وأحد ضلعي الزاوية القائمة والزاوية المقابلة لهذا الضلع في مثلث كروي قائم الزاوية، إذا طبقنا مبرهنة منلاوس على رباعي الأضلاع الذي يرتسم محيطه حالما تُطرح المسألة[٤] (انظر الشكل رقم (١٥ ـ ١)). وهذا مثال نموذجي عن الحسابات الواردة في **المجسطي**، مع فارق واحد هو أننا نتعلم في كتاب بطلميوس انطلاقاً من أحرف الشكل كيف نحسب وتر القوس المضاعف، علماً بأن إحدى نسب الأوتار مركبة من نسبتين أخريين. وهكذا نفهم أن صياغة القواعد، حتى دون اللجوء إلى الرموز، تُشكل خطوة مُهمة لإدراك التشابه بين المسائل ولاستخلاص البيانات الرياضية المشتركة.

= لحظة معينة. عندئذٍ يكون الطالع المائل لـ «الدرجة» H، ذات العرض $\gamma\widehat{H}$، هو قياس القوس $\gamma\widehat{E}$ على خط الاستواء، الذي يرتفع، مع γH في آن واحد، فوق الأفق. وإذا كانت النقطة على خط استواء الأرض يكون الطالع المائل مطابقاً للطالع المستقيم.

(٣) تتخذ مبرهنة منلاوس الكروية، بالنسبة إلينا، شكلاً مماثلاً لمبرهنة منلاوس المسطحة. وهي قابلة للتطبيق على كل رباعي للأضلاع مشكلٍ من أقواس دوائر كبرى. وإذا استخدمنا رموز الشكل رقم (١٥-٣)، فإن هذه المبرهنة تُثبت العلاقة التالية، إذا طُبقت على المثلث WEA والقاطع BDG:

$$(\sin \widehat{BA}/\sin \widehat{BE}).(\sin \widehat{GE}/\sin \widehat{GW}).(\sin \widehat{DW}/\sin \widehat{DA}) = 1.$$

لم يكن لدى المؤلفين القدماء هذا التصور للمبرهنة بواسطة المثلث والقاطع، ترتيباً:

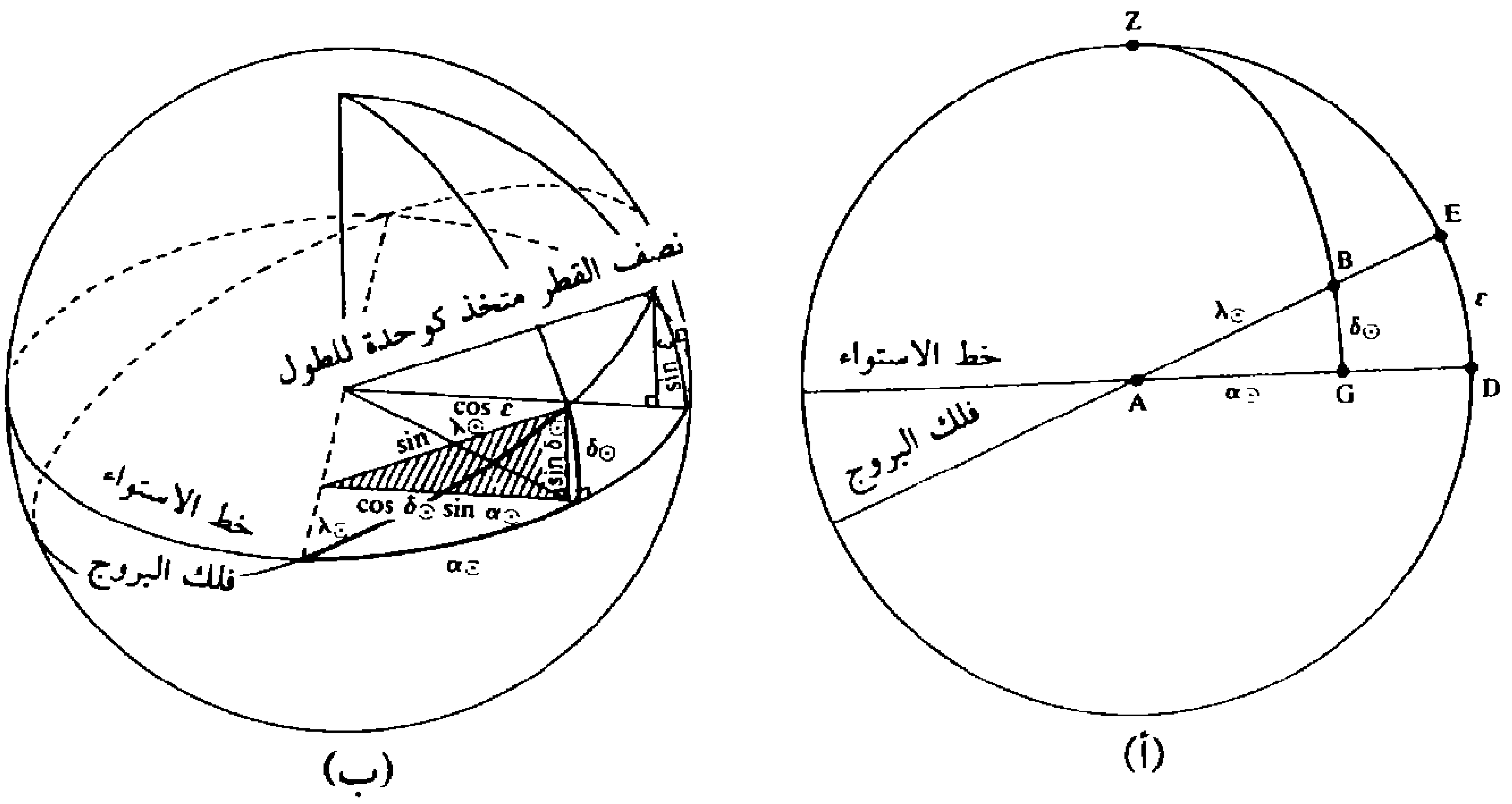
$$\frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{EB}} = \frac{\sin \widehat{AW}}{\sin \widehat{WD}} \cdot \frac{\sin \widehat{GD}}{\sin \widehat{GB}}$$

و

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DW}} \cdot \frac{\sin \widehat{GW}}{\sin \widehat{GE}}$$

للاطلاع على ما يخص مبرهنة منلاوس والصيغ التي تُستنتج منها، انظر: Anton elder von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 2 vols. (Leipzig: B. G. Teubner, 1900-1903), vol. 1, pp. 24-25, and Otto Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences; 1, 3 vols. (New York: Springer-Verlag, 1975), pp. 26-29.

(٤) انظر الشكل رقم (١٥ ـ ١أ) رباعي الأضلاع $ZBAD$ والقاطع AGD أو المثلث ABG.



الشكل رقم (١٥ ـ ١)

إن بعض القواعد كتلك التي تُعطي ميل الشمس الزاوي موجودة بشكل واضح في النصوص التي وردت من الهند، مثل كتاب **خندخدياكا** لـ «براهماغوبتا». وقد عُرف هذا الكتاب قبل كتاب **المجسطي** وقبل كتاب **الجداول المُيسرة**. ولكن سياقه يختلف تماماً عن سياق الكتابين السابقين، إذ لا نجد فيه برهاناً أو شكلاً أو تمثيلاً على سطح الكرة، بل بيانات على شكل أبيات شعرية تُعبر عن التشابه بين مُثلثين مُسطحين قائمي الزاوية ولهما أضلاع تُمثل جيوباً أو جيوباً معكوسة أو ظل شاخص المزولة أو شعاع دائرة أو مجموعات من هذه المقادير. ويكون المثلثان في هذه الحالة المذكورة، في داخل الكرة وفي سطحين (مُستويين) متوازيين. ويكون وتر أحدهما مساوياً لجيب طول الشمس والوتر الثاني مساوياً لشعاع الدائرة. أما أضلاعهما المتماثلة فهي مساوية لجيب ميل الشمس ولجيب الميل الأعظم للشمس[٥]. إن الفلكيات الكروية في كتاب **السندهند** بدائية بالنسبة إلى تلك التي وردت في **المجسطي**، نظراً للوسائل المحدودة المستخدمة فيها. إلا أنها تُقدم قواعد أخرى كتلك التي تُعادل $\sin \alpha_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} . \cos \varepsilon / \cos \delta_{\odot}$ (انظر الشكل رقم (١٥ ـ ١ب)) والتي لا يمكن أن تُستنتج إلا بتطبيق واحد لمبرهنة منلاوس لأنها تربط بين أقواس أربع دوائر. وهي تُقدم على الأخص المفهوم العام لزاوية السمت وفكرة الربط المهمة، على شكل صيغة، بين قياس

---

(٥) يوضح الشكل رقم (١٥ ـ ١ب) الطريقة الهندية للقاعدة السابقة، $\sin \delta_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} . \sin \varepsilon$، ولصيغة أخرى أيضاً تتعلق بالطالع المستقيم وتختلف عن نظيرتها في **المجسطي** وهي:

$$\sin \alpha_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} . \cos \varepsilon / \cos \delta_{\odot} .$$

الوقت وبين ارتفاع كوكب ذي ميل مُعين. لقد نجحت طريقة المثلثات المسطحة الهندية في الحالة التي نستخدم فيها صيغة جيوب التمام لحساب الزاوية الزمنية تبعاً للارتفاع، وذلك بالبحث عن علاقة بين زاوية السمت والارتفاع(٦).

ولم يكتف رواد علم الفلك الذي نشأ في القرن التاسع الميلادي، بعد اغتنائهم بالتعاليم التي تلقُّوها من الهند واليونان، بالقيام بعرض شامل للنتائج على شكل تعليمات واضحة مُعبر عنها بواسطة الجيوب والجيوب المنكوسة الهندية مع $R = 60$، بل تخطُّوا ذلك إلى قراءة مُعمقة لكتاب **المجسطي** واستخلصوا وطوّروا تقنياته. وهذا صحيح بالنسبة إلى الحساب الكروي الذي حُذفت منه بعض المُقاربات بواسطة مثلثات مُسطحة (اختلاف المنظر، قابلية الرؤية، الكسوفات)(٧). وتم التخلُّص من القيد الذي تمثل بجدول طوالع البلد، إذ ظهرت في كتب الأزياج مسألة «الطالع بدون جدول» التي ليس لها بالضرورة مفهوم تنجيمي. وبفضل زاوية السمت التي تُقاس على «الدائرة الهندية» والتي أصبحت مفهوماً مُشتركاً مع «القبلة»، بدأ الربط بين مواضع الكواكب ومقادير إحداثياتها المحلية: فحساب «طوالع السمت»، المُتعارف عليه، ما هو إلا تحديد الزاوية الزمنية إذا عُرف مقدار زاوية السمت. أما إحداثيات فلك البروج فأصبحت تُحسب استناداً على الميل وعلى «درجة المرور»، بينما كانت تُحسب في **المجسطي** بشكل تقريبي استناداً على مواضع معروفة لكواكب قريبة. ولقد أضيفت مسألة «القبلة» إلى المسائل الفلكية البحتة، وكانت حافزاً لكتابات وفيرة؛ وحسابها هو تغيير للإحداثيات (حساب زاوية السمت، مع الافتراض أن الإحداثيات الزمنية معروفة) عندما يهدف إلى تحديد ارتفاع سمت مكة في مكان الراصد. ولقد عالجت «الأزياج» مواضيع أخرى كثيرة. ولكننا سنتوقف عند هذا الحد في جولتنا العابرة في ميدان الفلكيات الكروية الذي هو تقني بما فيه الكفاية. يذكُر مؤرخو العلوم بشكل خاص مسألة «القبلة»، عند عرضهم لتطوُّر الفلكيات الكروية خلال الحقبة العربية. ولكن هذا لا يُعطي فكرة واضحة عن شدة تعقيد حساب «الأزياج». إن هذا التعقيد ناتج عن التكوين المتعدد العناصر لحساب «الأزياج» وعن الازدهار الهائل لعلم الفلك في القرن التاسع الميلادي. أما التنجيم فلم يكتسب تقنياته الكروية إلا بعد التبسيطات التي جلبتها صيغ المثلث.

---

(٦) هذه المسائل معقدة ولا يمكن أن تعرض هنا، انظر: Abu al-Rayhan Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī, *Kitāb maqālīd'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du Xᵉ siècle*, édition, traduction et commentaire par Marie Thérèse Debarnot (Damas: Institut français de Damas, 1985), pp. 37-38.

(٧) بخصوص زاوية الاختلاف مثلاً، انظر: Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, p. 116, and Edward Stewart Kennedy [et al.], *Studies in the Islamic Exact Sciences* (Beirut: American University of Beirut, 1983), p. 173.

كيف حُلّت المسائل الجديدة التي يتعلق بعضها بمُثلثات أياً كانت؟ لقد حصلت بعض المحاولات غير المُثمرة التي علمنا بوجودها بفضل بعض النقاد. لكن مؤلفي الجداول بدأوا بسرعة يتنافسون لتقديم حلول متنوعة. والفكرة الجديرة بالملاحظة هي من دون شك فكرة استخدام الدالات المساعدة التي سنعود إليها بصدد كلامنا عن الظل. ولقد أضيفت إلى مختلف الطرائق الهندسية طريقة ظريفة تخطيطية (تستند على إسقاط عمودي للكرة على مُستوي الزوال) اسمها التسطيح ولها ملامح من الهندسة الوصفية الحديثة(٨). كل هذا يقود إلى قواعد لحساب الأقواس المجهولة. لن تتناول هنا إلا القواعد التي تُجري استدلالات «على سطح الكرة»، كما هي الحال في كتاب **المجسطي**. إن السبيل الذي يسمح عندئذٍ بتفادي الصعوبات يرتكز بشكل طبيعي على استخدام الدوائر الواحدة بعد الأخرى إلى أن نحصل على قيمة القوس المطلوبة. لم يفطن الشُرّاح العرب خلال القرون الوسطى إلى غرابة هذه التقنية لأنها كانت مألوفة لديهم. لقد دخلت مجموعة كاملة من المصطلحات الخاصة بالأقواس المُساعدة في طور الممارسة العادية، حتى انها كادت ترسم تطور الطرق الأكثر شيوعاً. وهكذا تراكمت في «الأزياج» حتى نهاية القرن العاشر الميلادي، قواعد متنوعة قابلة للبرهان على مراحل بواسطة «مُبرهنة» منلاوس في أغلب الأحيان، وشاملة بشكل شبه دائم لنفس صيغ المثلّث الكروي القائم الزاوية.

٢ ـ نحو صيغ المُثلّث

لم يفطن أحد تقريباً لإدخال دالة الظل في القرن التاسع الميلادي. ولكن اكتشاف المُبرهنات التي حلت محل رباعي الأضلاع ترافقت، بعكس ذلك، بخصومات حول الأسبقية. تُعتبر مُبرهنة منلاوس، بلا جدال، بالنسبة إلى معاصري هذا التجديد في تقنيات علم الفلك، الصيغة الكروية الوحيدة التي استخدمها أسلافهم. ويبدو أن البحوث الرياضية، خلال القرنين الأولين، قد تركزت فعلاً حول هذه المُبرهنة. ولكن الحصول على بعض قواعد «الأزياج» قد تم بطرائق أخرى بناء على دراسة لسطح الكرة. وبدأ علماء الفلك في الوقت نفسه يتحررون من مُبرهنة منلاوس، وذلك ببرهنة مباشرة للصيغ المألوفة.

تجدر الإشارة إلى أن العديد من النصوص الفلكية المكتوبة خلال القرنين التاسع والعاشر للميلاد، لا تحوي أي برهان. وهذا ما سيُعالجه المؤلفون في دراسات لاحقة كلّما دعت الحاجة. فنحن نعرف مثلاً أن البيروني ألّف كتابين ضخمين كلاهما مفقود شرح فيهما جداول للخوارزمي ولحبش الحاسب. إنه من الواضح، كما رأينا بخصوص الميل الزاوي للشمس، أن الحصول على نفس النتيجة ممكن بطرائق مُتعددة. وكان المؤلف يستوحي طريقة

(٨) يجد القارئ وصفاً لأحد هذه التسطيحات في الفصل المخصص لـ «القِبلة» (طريقة ابن الهيثم)، انظر أيضاً ترجمة لنص للبيروني متعلق بتسطيح لحبش، في: Kennedy [et al.], *Studies in the Islamic Exact Sciences*, pp. 621 - 629.

البرهان من سياق النص. وهكذا أُثبت أن ابن يونس الذي قلد سلفيه البتّاني وحبش، قد استخدم في **الزيج الحاكمي** طرائق «في داخل الكرة»[٩]، لأن البدائل العديدة، المطروحة لحل كل مسألة، تستند على نفس التسطيح. ويُمكن أن نتساءل، عند تطبيق نفس الصيغة تكراراً على نفس الشكل الكروي البسيط، إذا كان المؤلّف يرجع في كل مرة إلى البرهان المباشر أم إلى مُبرهنة صعبة الاستخدام كمُبرهنة منلاوس، أو إذا كان ينقل القاعدة التي حصل عليها في المرة الأولى. لقد لاحظ ذلك پ. لاكي (P. Luckey) بخصوص بيانات ثابت بن قرة عن المزاول. والسؤال يُطرح أيضاً بشكل أوضح حول مجموع الحسابات الكروية لزيج حبش. وذلك أن مراحل الاستدلال «على سطح الكرة»، التي تتطلب حساب الأقواس المُساعدة، ترتكز على أربع قواعد بسيطة مُبيّنة منذ البداية. لقد سبق أن ذكرنا أعلاه إحدى هذه القواعد، وهي الصيغة الهندية الخاصة بالطالع المستقيم للشمس، والتي ليس لها برهان مباشر بواسطة مُبرهنة منلاوس. وإذا كانت هذه الطريقة هي الطريقة المتبعة، فإن ذلك يُفسر السهولة التي حُلت بها في هذا الكتاب مسائل تبديل الإحداثيات المحلية بالإحداثيات الاستوائية أو بإحداثيات فلك البروج.

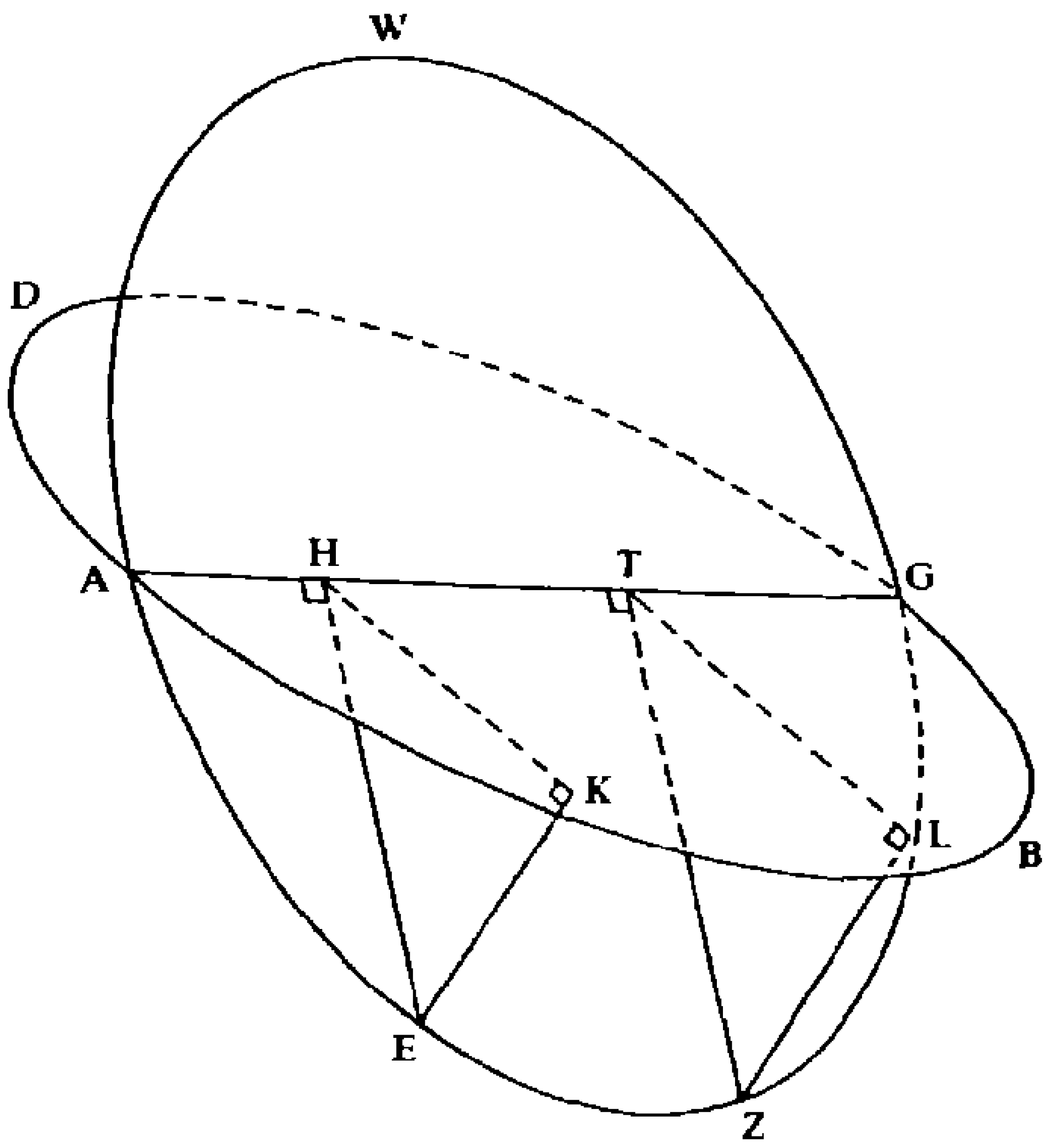
لم يعرض حبش، على كل حال، أي صيغة من صيغ المثلث. وسنتكلم فيما بعد عن أهمية المساهمة التي أداها هذا العالم الفلكي في القرن التاسع الميلادي. كان ثابت بن قُرة، الذي بلغ نشاطه كل ميادين الرياضيات والفلك، أحد العديد من المؤلّفين الذين اهتموا بمُبرهنة منلاوس. كان إثبات هذه المبرهنة معروفاً منذ ذلك الزمن في كتاب **الأكر** لمنلاوس، وهو يملأ كل الفصل الثالث عشر من المقالة الأولى من كتاب **المجسطي**. ويقول البيروني عن «الشكل القطّاع»: «وزاد في شرحه، وتتبع العمل في أقسامه أبو العباس الفضل بن حاتم النيريزي وأبو جعفر محمد بن الحسين الخازن في شرح كل منهما لكتاب **المجسطي**. ويقول أيضاً: «وأفرد أبو الحسن ثابت بن قرة كتاباً في النسب المؤلفة وأقسامها واستعمالها، وكتاباً آخر في الشكل القطّاع وتسهيل العمل عليه. وكثير من المحدثين كابن البغدادي وسليمان بن عصمة وأبي سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي وغيرهم خاضوا في هذا العالم واعتنوا به، إذ كان العمدة في علم الهيئة حتى لولاه لما توصلوا إلى الوقوف على شيء مما ذكرناه».

تُشكل القضية الأولى من الفصل الثالث من كتاب **الأكر** الصيغة الكروية الوحيدة التي وردت في كتاب **المجسطي** الشهير. وهي تسمح، من دون رموز، بدراسة رياضية لكل الحالات التي يؤدي إليها استخدام نسبة مُركبة[١٠] (الشكلان رقما (١٥ ـ ٢) و(١٥ ـ ٣)).

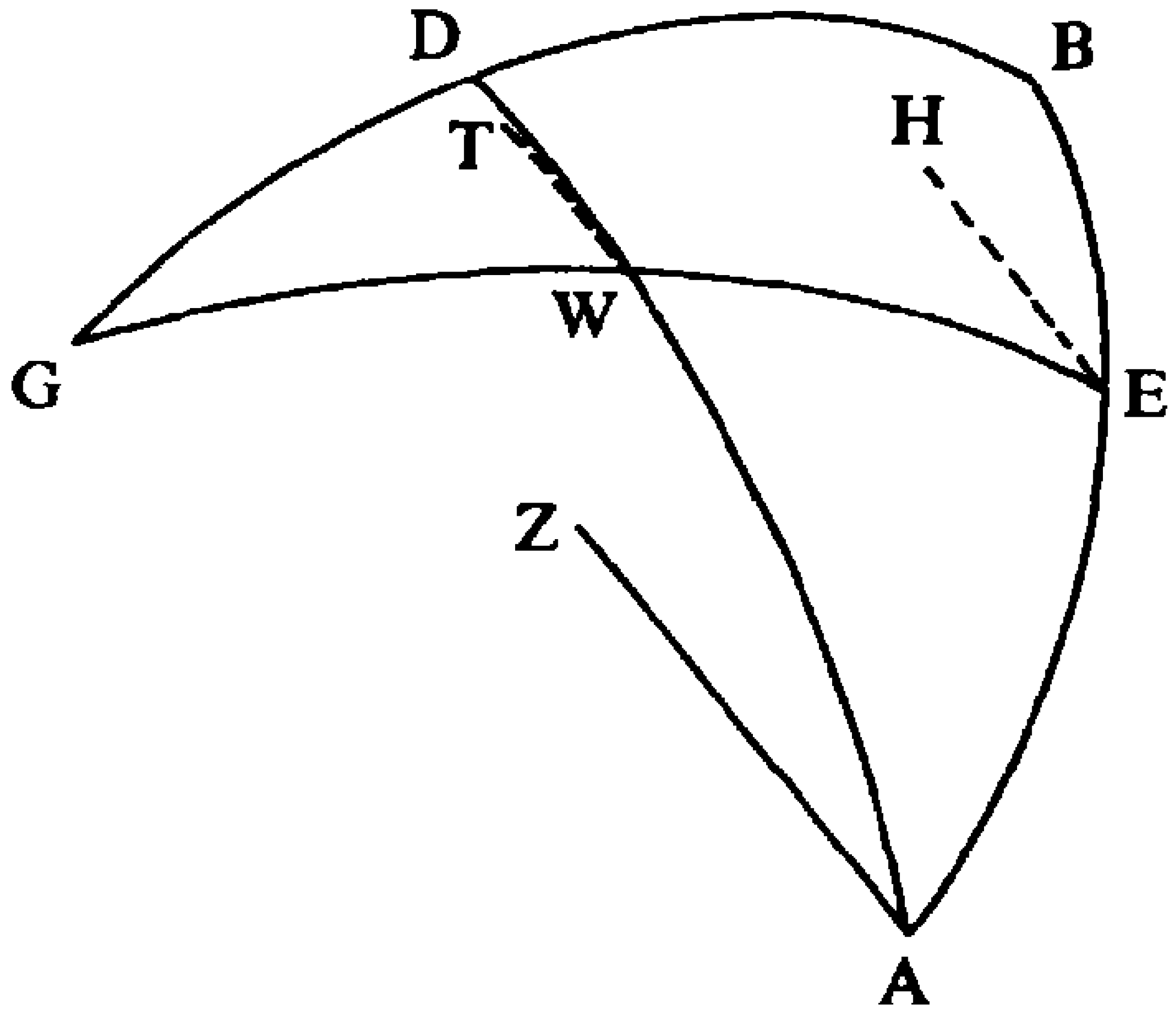
---

(٩) أي صيغ من الممكن الحصول عليها بواسطة شكل في الفضاء، كما ورد في هامش رقم (٥)، أو بواسطة التسطيح، انظر: المصدر نفسه.

(١٠) وهكذا فإن المعادلة $a/b = (c/d).(e/f)$ تُعرض كالآتي: إن نسبة a إلى b مُركبة من نسبة c إلى d ومن نسبة e إلى f. ونستنتج منها ضرورة تهيئة قواعد لحساب أحد هذه الأعداد الستة، إذا أعطينا الأعداد الخمسة الأخرى.



الشكل رقم (١٥ ـ ٢)



الشكل رقم (١٥ ـ ٣)

ولقد عُرضت هذه المُبرهنة وأُثبتت في حالتين، تبيّن في كل منهما أن نسبةً من الجيوب مُركبة من نسبتين أُخريين. هذه النسبة (الشكل رقم (١٥ ـ ٣)) هي:

$\sin \widehat{AE} / \sin \widehat{EB}$

أو $\sin \widehat{GD} / \sin \widehat{DB}$

في الحالة الأولى المسماة «التفصيل»، وهي:

$\sin \widehat{AB} / \sin \widehat{BE}$

أو $\sin \widehat{GB} / \sin \widehat{BD}$

في الحالة الثانية المسماة «التركيب»[١١].

وقد قام المؤلفون العرب بالتمييز بين مُختلف الحالات لا سيما تبعاً للقوس الذي يُبحث عن قيمته. وهكذا درس ثابت بن قرة ثماني عشرة حالة بعد أن أقام البرهان بلباقة تامة. وقد حول المُبرهنة الكروية إلى المتطابقة $a/b = (a/c).(c/b)$ التي استخدمها عبر إسقاط على خط مستقيم، بدلاً من استخدام المُبرهنة في حالة السطح المستوي[١٢]. إن أمثال هذه الدراسات

(١١) ترتيباً: $\frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{EB}} = \frac{\sin \widehat{AW}}{\sin \widehat{WD}} \cdot \frac{\sin \widehat{GD}}{\sin \widehat{GB}}$.

و $\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DW}} \cdot \frac{\sin \widehat{GW}}{\sin \widehat{GE}}$

(١٢) لنأخذ النسب AZ/EH و AZ/WT و WT/EH، حيث تكون النقاط Z وT وH، الإسقاطات =

تُظهر، كما نرى، الجانب العسير من المُبرهنة، وتُضفي قيمةً على الاستدلال «على سطح الكرة» في علم الفلك، وتُشكل خطوة أولى نحو إعداد تقنية رياضية خاصة.

قدم أبو العباس النيريزي، وهو أحد المؤلفين الذين ذُكروا في كتابات البيروني، طريقة لحل «مسألة القبلة» مبنية على مبرهنة منلاوس. وليس لدينا إلا القليل من النصوص التي تتضمن، مثل نص النيريزي، حسابات مبتكرة ومنجزة بوضوح بواسطة رباعي الأضلاع. ويبقى من هذه النصوص تلك التي كتبها أبو نصر بن عراق وأبو الوفاء البوزجاني. ويعدُ هذان العالمان مع أبي محمود الخجندي من أعظم الباعثين للتجديد الذي حصل في نهاية القرن العاشر الميلادي. ولم يتم الحصول على نتائج رياضية مُتوسطة قبل اكتشاف ما سمّي، على وجه التقريب، المبرهنة العامة للجيوب[١٣]. وقد أُشير إلى إمكانية وجود أصل واحد مُشتركٍ لتفسير التطابق بين النتائج التي حصل عليها علماء الفلك الثلاثة في ثلاث مدن مختلفة: خوارزم وبغداد وريّ. ولكن هذه الفرضية تتعارض مع ما ذكره البيروني في كتابه **مقاليد علم الهيئة**[١٤] الذي كرّسه لعرض مبرهنات جديدة. إن التشابه في بيانات المسائل التي كتبها هؤلاء الثلاثة راجع، في الحقيقة، إلى محتوى النصوص الفلكية. وليس من المصادفة، على أرجح تقدير، أن تكون مجموعات الصيغ الثلاث المخصصة لتحل محل مبرهنة منلاوس، مطروحة في إطار دراسات فلكية مهمة.

يبقى اسم أبي محمود الخجندي (ت حوالى ١٠٠٠م) مرتبطاً بالسُدسية الفخرية التي بنيت في مدينة ريّ القريبة من طهران الحالية تحت رعاية السلطان البويهي الثري فخر الدولة، وكانت مدرّجة بدقائق الأقواس وذات علو يزيد على عشرين ذراعاً. ولقد وصف البيروني هذه الآلة الجميلة التي سنحت له الفرصة بتفحُصها مع أبي محمود. وأشار البيروني في كتابه **مقاليد علم الهيئة** إلى المناقشات التي دارت في ذلك الوقت ضمن المُجمع العلمي

= العمودية، ترتيباً، للنقاط A وW وE على المستوى GDB، انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٣). يطبق ثابت بن قُرة على هذه النسب قضية كان قد أثبتها بواسطة تشابه بين مثلثين قائميْ الزاوية، انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٢):

$$(\sin \widehat{AE}/\sin \widehat{AZ} = EK/ZL).$$

(١٣) ظهرت المبرهنة المعروفة باسم «قاعدة المقادير الأربعة» في نفس الحقبة من الزمن. انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٨)، حيث: $\sin g/\sin g' = \sin a/\sin a'$.

وانظر الشكل رقم (١٥ ـ ٧) (وهو مقتبس من كتاب **الرسالة**) حيث:

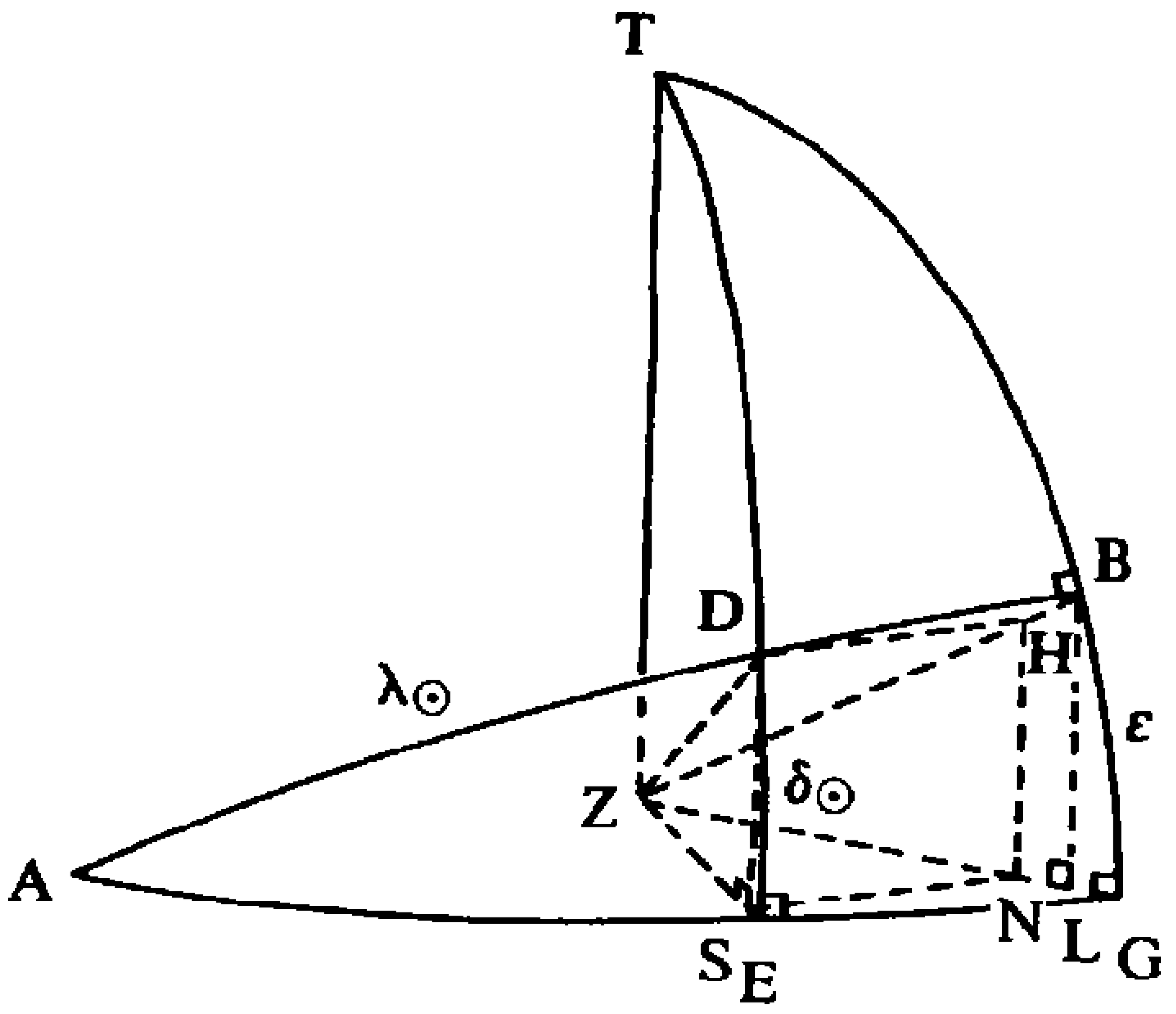
$\sin \widehat{AB}/\sin \widehat{BG} = \sin G/\sin A$ أي أن $BM/BL = EH/DS$

تُستنتج من: $(BM/BN).(BN/BL) = (DZ/DS).(EH/EZ) = (R/DS).(EH/R)$ بينما يتطابق BN وDS، وهما العمودان على AGZ مع BM و DZ ترتيباً، عندما تصبح الزاوية A قائمة. انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٦)، (وهو مقتبس من كتاب **السموت** *(Azimuts)*) حيث نستنتج:

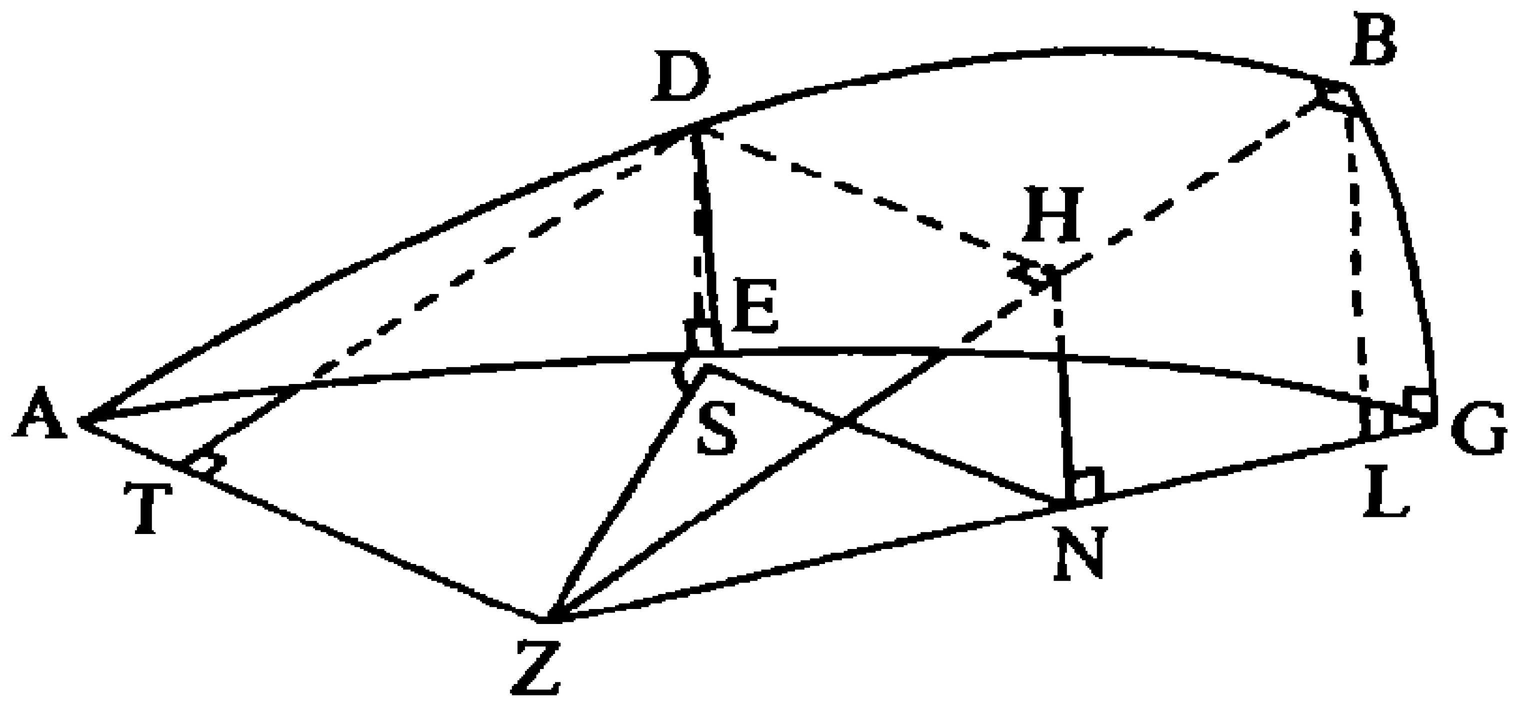
$\sin \widehat{DH}/\sin \widehat{ZB} = \sin \widehat{GH}/\sin \widehat{GZ}$ من $HT/ZL = HK/ZE$

(١٤) انظر: Al-Bīrūnī, *Kitāb maqālīd ʻilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du Xᵉ siècle.*

الصغير لمدينة ريّ، حول إحدى البرهنات. فقد سمّى الخجندي هذه البرهنة «قانون الفلك» وتخاصم مع أبي الوفاء حول الأسبقية في اكتشافها. وهي تتعلق بالصيغة التي نعرفها باسم «قاعدة المقادير الأربعة»[١٥]. ولقد قدّم الخجندي إلى البيروني كتاباً حول رصد الكواكب أثبت في بدايته هذه البرهنة، واستخدمها بعد ذلك في مختلف أقسام الكتاب. واقتبس كوشيار بن لبّان، وهو عالم فلكي آخر من مدينة ريّ، في أحد مؤلفاته ما كتبه الخجندي عن البرهنة وعدله وسمّى البرهنة باسم «الشكل المُغني»[١٦] الذي عُرفت به فيما بعد. إن برهان الخجندي الطويل يختلف كثيراً، كما يُلاحظ البيروني، عن برهان أبي الوفاء، وهو يستخدم، خلافاً للبرهان الأخير، الأشكال المتشابهة والمتميزة بالرباعي القائم الزاوية التي استطاع بواسطتها أبو العباس النيريزي (ت حوالى ٩٢٢م) وأبو جعفر الخازن (ت حوالى ٩٦١ ـ ٩٧١م) الحصول على القواعد الواردة في كتاب المجسطي «بطريقة أكثر بساطة»[١٧] (الشكلان رقما (١٥ ـ ٤) و(١٥ ـ ٥)). وهكذا توصلت فلكيات الأزياج بطرائق مختلفة إلى نفس صيغ المثلث. ولم يكن أبو محمود الخجندي رياضياً من الدرجة الأولى. لذلك فإن



الشكل رقم (١٥ ـ ٤)



الشكل رقم (١٥ ـ ٥)

---

(١٥) انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٨)، حيث: $sin\ g/sin\ g' = sin\ a/sin\ a'$.

(١٦) كلمة شكل هنا تعني مُبرهنة.

(١٧) قارن الشكل رقم (١٥ ـ ٤) المقتبس عن النيريزي والخاص بالميل الزاوي للشمس حيث تُفضي المعادلة $HN/ZH = BL/ZB$ إلى $sin\ \delta_{\odot}/sin\ \lambda_{\odot} = sin\ \epsilon/R$، مع الشكل رقم (١٥ ـ ٥) المقتبس عن الخجندي الذي استنتج $\frac{sin\ \widehat{D'E}}{\widehat{AD'}} = \frac{sin\ \widehat{BG}}{sin\ \widehat{AB}} = \frac{sin\ \widehat{DE}}{sin\ \widehat{AD}}$ من المعادلة $\frac{HN}{ZH} = \frac{BL}{ZB}$ بعد أن استبدل النقطة D بنقطة أخرى D'. انظر: المصدر نفسه، ص ١٤٨ ـ ١٤٩ و١٣٨ ـ ١٤١.

الإصلاح الضروري سيتم بفضل أعمال أبي نصر بن عراق وأبي الوفاء البوزجاني.

٣ ـ مبرهنات أبي نصر وأبي الوفاء

إن تبسيط التقنيّات الفلكية الذي حصل في عصر البيروني، قد تم حسب رأي البيروني ومعاصريه، بفضل «شكل». ويُمكن أن تُثبت أن هذا «الشكل» كافٍ ليحل محل رباعي الأضلاع. أما العبارة البليغة التي تُطلق عليه، وهي «الشكل المغني»، فتشمل القسم الضروري من المبرهنة ـ قاعدة المقادير الأربعة والعلاقة بين جيوب المثلّث القائم الزاوية ـ والقسم الإضافي الجديد بالملاحظة مع أنه أقل أهمية، وهو المعروف بالمبرهنة العامة للجيوب. وهناك صيغة أخرى وهي قاعدة الظلال لأبي الوفاء[١٨] التي حملت اسم «الشكل الظلّي». أما منهج أبي نصر فهو مختلف تماماً عن منهج أبي الوفاء.

لم يترك الأمير أبو نصر بن عراق (ت حوالى ١٠٣٦م)، كما فعل تلميذه المشهور أبو الريحان البيروني (الذي وُلد سنة ٩٧٣ وتُوفي بعد سنة ١٠٥٠م)، أعمالاً شاملة لكل ميادين المعارف في عصره. وكتاباته تختصُ بعلم الفلك وخاصة الرياضي منه، وببعض المواضيع في الهندسة. وهو الذي أنجز الترجمة الأولى الكاملة لكتاب **الأكر** لمنلاوس. وكان أسلافه قد تركوا هذا العمل بسبب بعض الصعوبات التي لاقوها في المقالة الثالثة من هذا الكتاب. وهذه الترجمة تعتبر الأقرب إلى النص اليوناني الذي هو مفقود اليوم. لقد فطن هذا الرجل العالي المكانة إلى الميزات الاستثنائية للشاب أبي الريحان الذي تتلمذ على يديه في الرياضيات. ولقد طال تعاونهما في خوارزم قبل أن يتقاسما المنفى، مع علماء آخرين من الكاث، في غزنة في بلاط محمود القائد النافذ للإمبراطورية الغزنوية الجديدة. ويرجع كتاب **المقاليد** إلى الفترة الخوارزمية. وكان أبو الوفاء البوزجاني (٩٤٠ ـ ٩٧٧ أو ٩٧٨م) في تلك الفترة يتمتع بشهرة عظيمة. وكان قد جاء في صباه إلى بغداد حيث كان له أقارب فلكيون، واستقر فيها وكرس حياته لعلم الفلك وللرياضيات. ولقد ذكر البيروني أرصاد أبي الوفاء، وتعاون معه في رصد خسوف القمر في وقت واحدٍ، وذلك لاستنتاج الفارق في الطول بين بغداد والكاث. ولقد ألف أبو الوفاء أيضاً كتباً متنوعة نظرية وتطبيقية في الرياضيات. ويحتل حساب المثلثات مكاناً مهماً من كتابه **المجسطي** الذي ألفه في أواخر حياته والذي ربما بقي ناقصاً. وذلك أن المخطوطة الوحيدة الموجودة لدينا تحتوي بالضبط على المؤلفات السبعة التي ذكرها البيروني.

لقد وصف البيروني الظروف التي رافقت إدخال المبرهنات الجديدة. فقد أُثبتت في أول الأمر علاقتان في المثلّث القائم الزاوية من قبل أبي نصر في كتابه **السموت**. قصد أبو نصر أن يبرهن من جديد قواعد مختلفة مجمعة من قبل أبي سعيد السجزي، وذلك بتطبيق

---

(١٨) انظر الشكل رقم (١٥ ـ ٨)، حيث: $\sin b / \sin b' = \tan a / \tan a'$.

مبرهنة منلاوس على الأخص. ولكن نص الكتاب غامض، حتى أن بياني الصيغتين لم يعرضا. وانتقد أبو الوفاء استخدام رباعي الأضلاع والنسبة المركبة في كتاب أبي نصر الذي أرسل إليه في بغداد. وقال إن الطرائق التي استخدمها هو (أي أبو الوفاء) في كتابه **المجسطي** هي أكثر إيجازاً وأفضل من تلك التي استخدمها أبو نصر. فكتب أبو نصر «رسالة»[١٩] مهداة إلى البيروني يعرض فيها الأفكار التي لم يستطع توسيعها في كتاب **السموت**. وتعرف هذه الرسالة باسم **رسالة في القسيّ الفلكية**، وهي، بالنسبة إلى أبي نصر، **كتاب في المثلثات الكروية**، وهذا عنوان أكثر توافقاً مع محتواها. واستلم البيروني، بعد ذلك بسنة، المقالات السبع الأولى من كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء. ويشير كتاب **المقاليد**، الذي حرر بعد ذلك بفترة قصيرة، إلى هذه المجادلة الكتابية. وهذا ما يشهد على الأهمية التي أعطيت لهذا الحدث، وعلى حيوية النشاط الذي ساد في المراكز العلمية المتناثرة في الأمبراطورية العباسية من أدناها إلى أقصاها. لنرجع الآن إلى بيانات **الرسالة** وإلى البيانات الواردة في الفصل الأول من المقالة الثانية من كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء.

يبدأ كتاب **الرسالة** بعرض المبرهنة العامة للجيوب: «نسبة جيوب الأضلاع في المثلث الكائن من قسي عظام على سطح الكرة، بعضها إلى بعض، على نسبة جيوب الزوايا التي تقابلها، بعضها إلى بعض، النظير إلى النظير».

أثبت أبو نصر أربع صيغ مختلفة وطبقها على مسائل **المجسطي**:

ـ المبرهنة العامة للجيوب:

$$sin\ a/sin\ A = sin\ b/sin\ B = sin\ g/sin\ G \qquad (١)$$

ـ العلاقة الخاصة بالمثلّث القائم الزاوية (في G):

$$sin\ a/sin\ A = sin\ g/R \text{ ،} \qquad (٢)$$

والعلاقتان التاليتان[٢٠] الخاصتان بمثلث قائم الزاوية في G، والقريبتان من الصيغة:

$$cos\ A = cos\ a.sin\ B$$

---

(١٩) المقصود هو كتاب القسي الفلكية الذي تُرجم وحُلل من قبل: Paul Luckey, «Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung,» *Deutsche Mathematik*, Bd. 5 (1941), pp. 405-446.

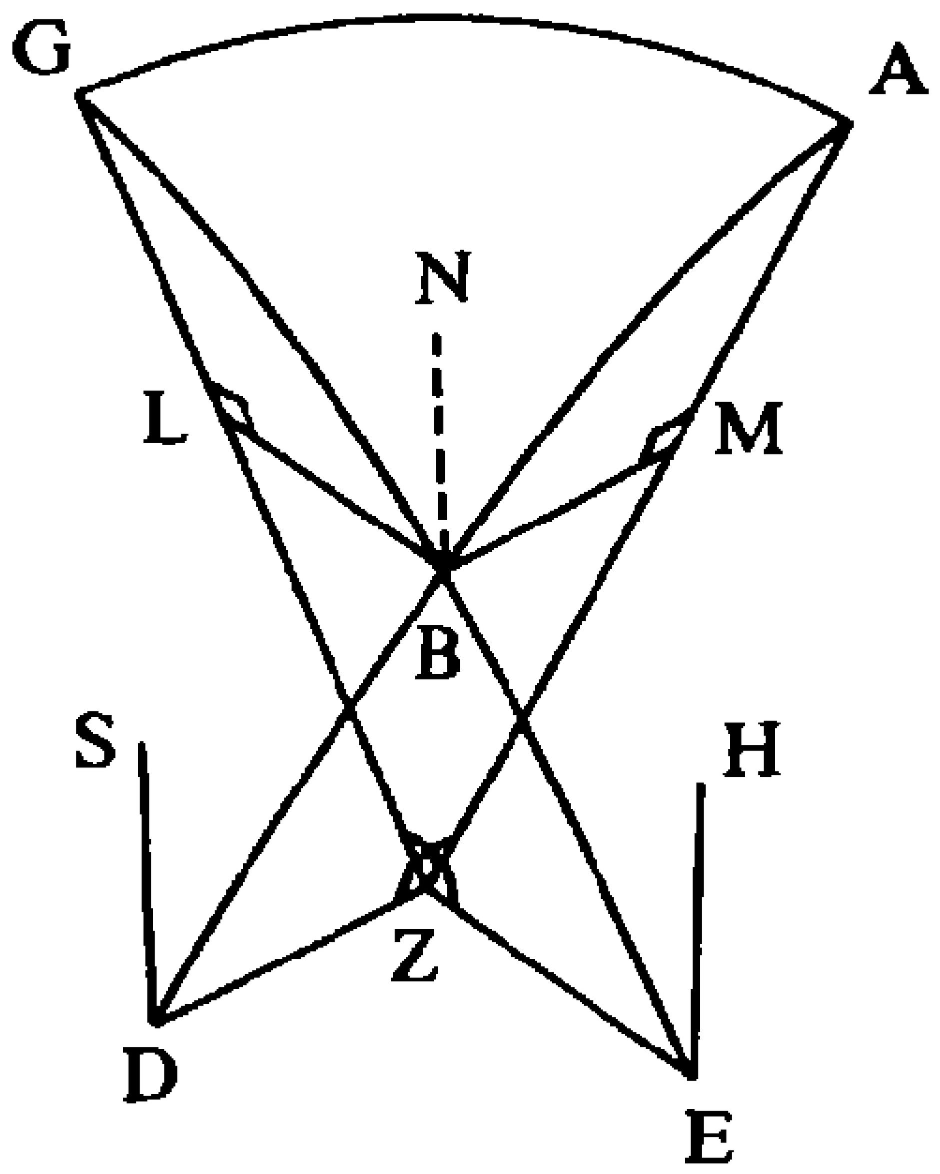
انظر ما ورد عن أبي نصر في المراجع وكذلك: أبو نصر منصور بن علي بن عراق، **رسائل أبي نصر بن عراق إلى البيروني** (حيدر آباد، الدكن: مطبعة جمعية دائرة المعارف، ١٩٤٨). أضف إلى ذلك أن البيروني أورد، بشكل كامل، أغلب براهين أبي نصر وبراهين أبي الوفاء. انظر: Al-Bīrūnī, *Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du Xe siècle*, pp. 110-137.

(٢٠) نرمز هنا لجيب التمام بـ cos وبـ $\delta_B(x)$ لميل القوس x عندما يكون الميل الزاوي الأعظم للشمس مساوياً لـ B.

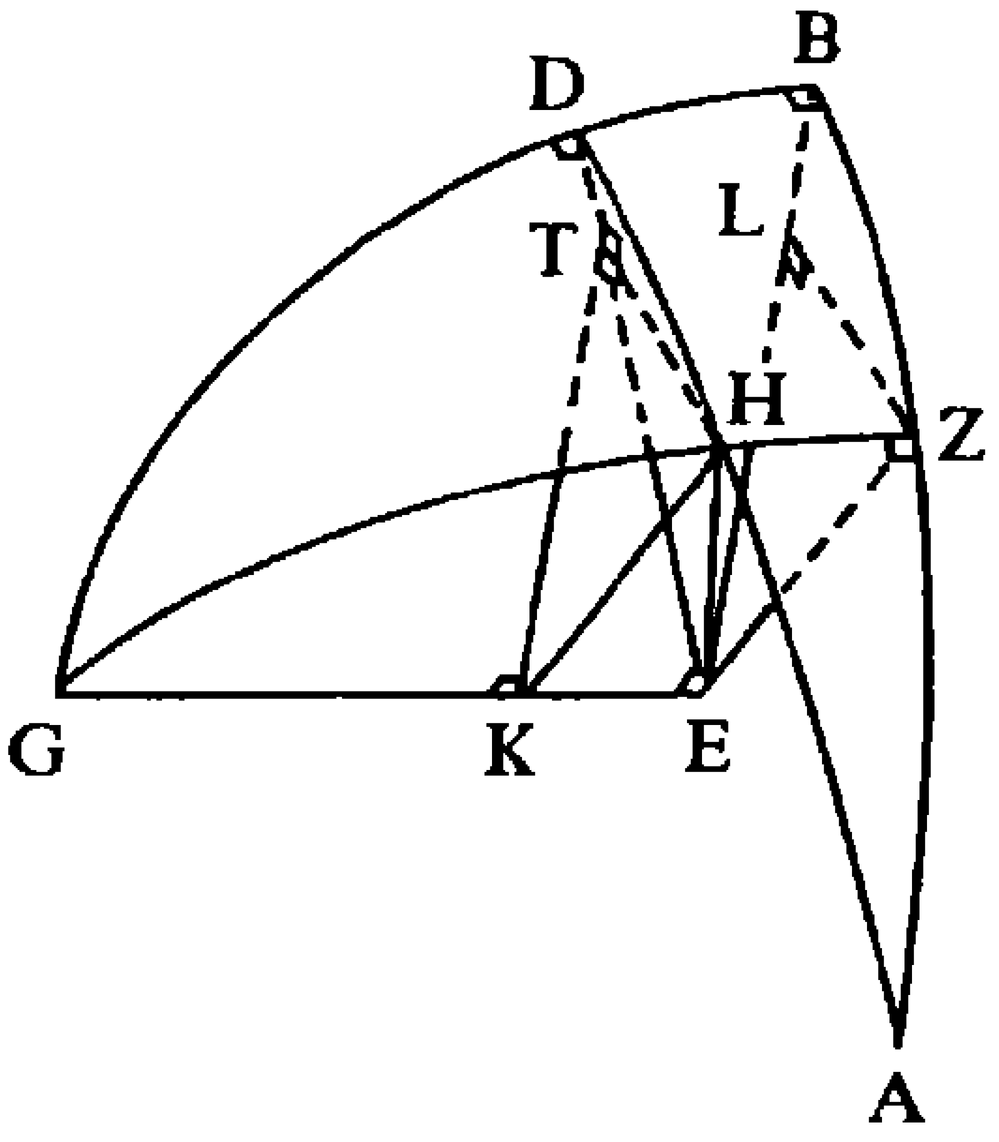
$$cos a/cos A = sin\ g/sin\ b \qquad (٣)$$

$$90° - A = \delta_B(90° - a) \qquad (٤)$$

ولقد تم إثبات مبرهنة الجيوب بشكل مباشر لا يخلو من اللباقة. وهذا الإثبات يشمل الحالة الخاصة التي تُعطي العلاقة (٢) التي سبق أن ورد برهانها في كتاب **السموت**[٢١] (الشكلان رقما (١٥ ـ ٦) و(١٥ ـ ٧)). ويتمّ، في كتاب **الرسالة**، استنتاج العلاقة (٣) الواردة في كتاب **السموت**، والعلاقة (٤) الواردة في **الرسالة**، مباشرة من العلاقة (٢) بواسطة بعض المثلّثات الكروية.



الشكل رقم (١٥ ـ ٧)



الشكل رقم (١٥ ـ ٦)

إن كل صيغ أبي نصر تُعبر عن علاقات في المثلّث. ولكن مبرهنة أبي الوفاء المزدوجة الأساسية، تربط بعكس ذلك بين أقواس مشكّلة من مثلّثين قائميْ الزاوية: لنأخذ قوسين من دائرتين عظيمتين متقاطعين على سطح كرة، ولنأخذ على أحدهما نقاطاً اختيارية. فإن أنساب جيوب الأقواس المحصورة بين هذه النقاط ونقطة التقاطع، متناسبة ترتيباً مع أنساب جيوب المُيول الأولى وظلال الميول الثانية.

(القوس BG هو ميل AB بالنسبة إلى القوس AG، وكذلك $B'G'$ هو ميل AG' في الشكل رقم (١٥ ـ ٨)).

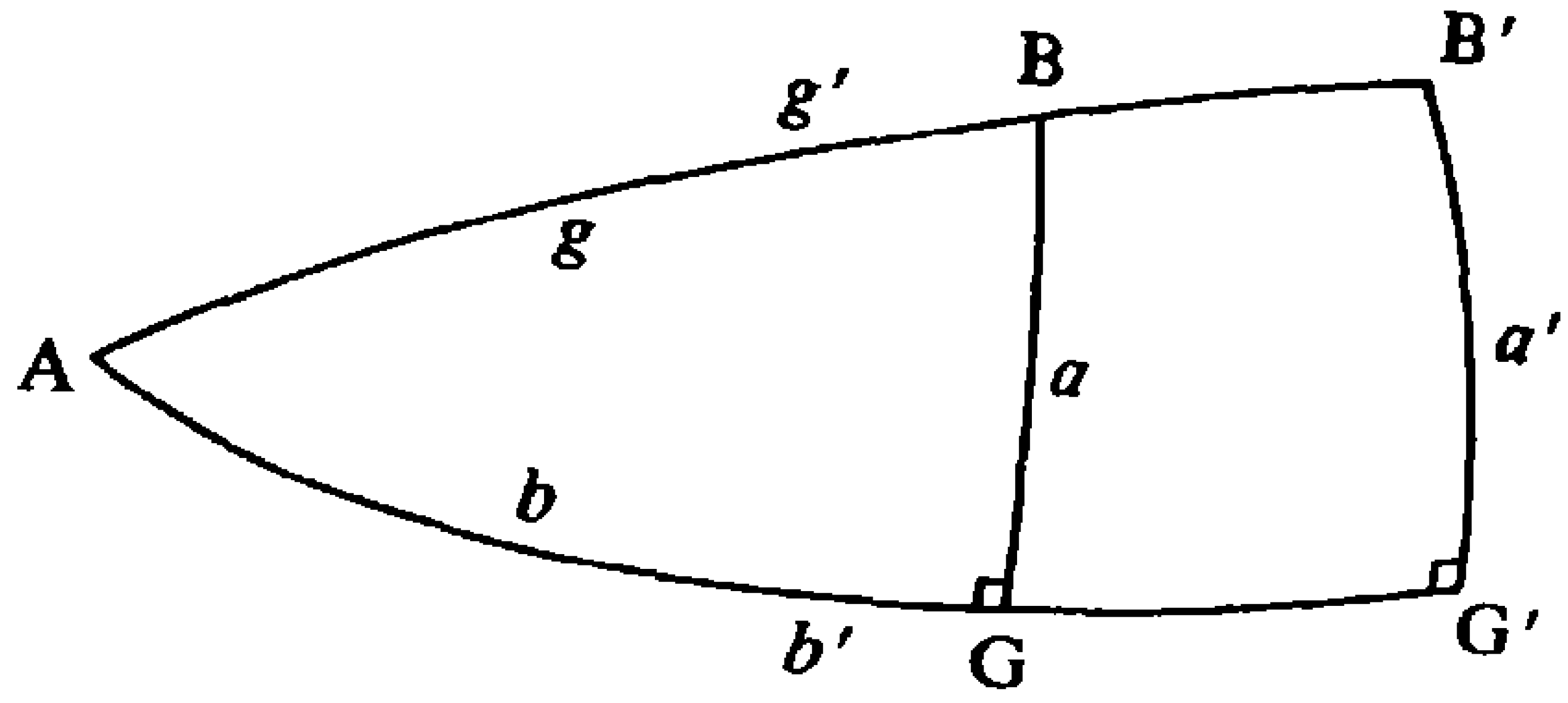
ونحن نحصل من الشكل رقم (١٥ ـ ٨) على:

ـ قاعدة المقادير الأربعة:

$$sin\ g/sin\ g' = sin\ a/sin\ a' \qquad (٥)$$

---

(٢١) انظر ما ذكرنا حول الشكلين رقمي (١٥ ـ ٦) و (١٥ ـ ٧) في الهامش رقم (١٣) السابق.



الشكل رقم (١٥ ـ ٨)

ـ قاعدة الظلال:

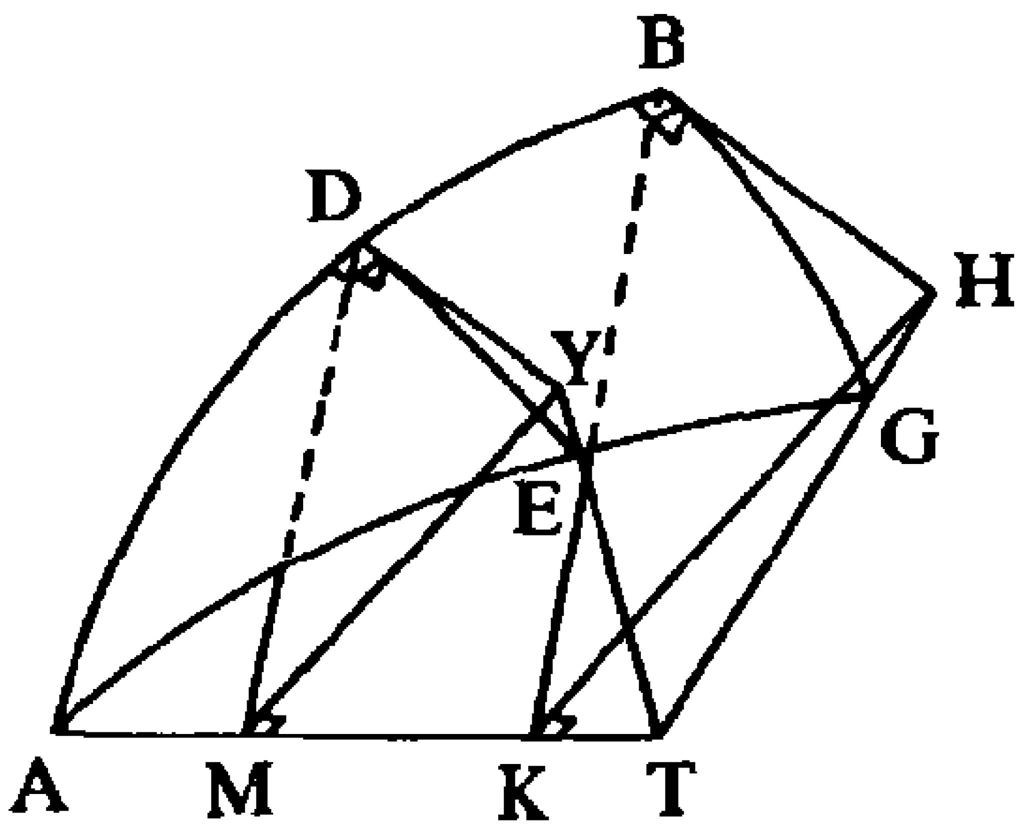
$$\sin b/\sin b' = \tan a/\tan a' \qquad (٦)$$

ويمكن أن نستنتج من (٥):

ـ علاقة تخصُ المثلث القائم الزاوية (في G):

$$\cos g/\cos a = \cos b/R \qquad (٧)$$

ـ والمبرهنة العامة للجيوب (١) $\sin a/\sin b = \sin A/\sin B$ التي يُحصل عليها بدون استخدام الصيغة (٢). أما إثبات جُزأي المبرهنة الأساسية فيتمُ مباشرة. والجزء الأول يُبرهن بطريقتين، إحداهما مستوحاة من إثبات مبرهنة منلاوس الوارد في كتاب المجسطي[٢٢] (الشكل رقم (١٥ ـ ٩)).



الشكل رقم (١٥ ـ ٩)

إن النماذج المعدة من قبل أبي نصر وأبي الوفاء ذات منطلقات مختلفة. وهي تقتصر، من وجهة النظر التطبيقية على أربع مبرهنات: «الشكل المُغني» [الصيغ (١) و(٢) و(٣)]، و«الشكل الظلي» [الصيغة (٦) التي تأخذ أيضاً الشكل $\sin b/R = \tan a/\tan A$]، ومبرهنتين أخريين أقلّ أهمية هما الصيغة (٧) والبديلتين (٣) و (٤) للعلاقة

---

(٢٢) إن الشكل رقم (١٥ ـ ٩) المتعلق بقاعدة الظلال يخص الطريقة الأخرى، وهي من النوع الوارد في كتاب السموت، والعلاقة:

$\sin \widehat{AD}/\sin \widehat{AB} = \tan \widehat{DE}/\tan \widehat{BG}$ مُكافئة لِ $MD/KB = DY/BH$.

$sin\ B/R = cos\ A/cos\ a$. إن هذه الصيغ المستنتجة من قواعد «الأزياج» تُلبي بوفرة حاجات الحساب الفلكي. وهذا ما بينه البيروني في **المقاليد**، إذ إنه حل كل المسائل المتعارف عليها، استناداً إلى «الشكل الوحيد الذي يغني عن رباعي الأضلاع». إن الحساب الكروي الذي عُولج بطرائق كثيرة في المقالات الثانية حتى الخامسة من كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء، يظهر فعالية ومرونة الصيغ الواردة في الفصل الأول من المقالة الثانية. وقد عرض المؤلفون العرب، فيما بعد، العلاقات الست للمثلّث القائم الزاوية، ولكن النصوص الفلكية احتفظت فقط بالأداة التي ابتكرها أبو الوفاء وأبو نصر. وهذا ما نشهده في كتاب **الزيج الخاقاني** لغياث الدين جمشيد الكاشي (ت ١٤٢٩م)، وهو أحد أواخر العلماء الرياضيين والفلكيين في الإسلام. ولقد طبّقت في هذا الكتاب، المبرهنات الثلاث الأولى فقط، وخاصة قاعدة المقادير الأربعة. إن أحد أشهر كتب علم الفلك في المغرب العربي، وهو **إصلاح المجسطي** لجابر بن أفلح الإشبيلي (القرن الثاني عشر الميلادي)، لا يستخدم أبداً مفهوم الظل. إن هذا الكتاب الذي ترجم إلى اللاتينية هو أحد مصادر كتاب ***De triangulis*** الذي ألفه ريجيومونتانوس (Regiomontanus) (١٤٣٦ ـ ١٤٧٦م). ولقد عرفت العلاقة $sin\ B/R = cos\ A/cos\ a$ التي وردت في كتاب جابر، في الغرب تحت اسم مبرهنة جابر (Théorème de Geber)[٢٣].

٤ ـ دالّـة الظـل

إن مفهوم المثلّث هو ركيزة علم المثلّثات لدى أبي نصر. ولقد تواصل من بعده تبنّي المثلث كهيئة أساسية في كل مؤلفات علم المثلّثات. أما دالّة الظل فقد دخلت بشكل نهائي في الحسابات الفلكية، بفضل «الشكل الظلّي» الذي ابتكره أبو الوفاء. لم تظهر فكرة استخدام نسبة الجيب إلى جيب التمام، على الرغم من بساطتها، ولم تتحرر من مفهوم ظل شاخص المزولة القريب من مفهوم الظل، إلا بعد زمن طويل. ولا يبدو أن مفهوم الظل قد استُحدث من مفهوم ظل شاخص المزولة، على الرغم من استخدام كلمة الظل في كلتا الحالتين. فقد ظهرت دالة الظل بطريقة غير مباشرة، كما توجد أمثلة أخرى على ذلك في تاريخ الرياضيات، بعد ظهور دالات مساعدة أكثر تعقيداً. وقد برزت هذه الدالات من تحليل الحسابات الكروية.

يدهش المرء، عند قراءة النصوص التي سبقت إدخال دالّة الظل، من كثرة المناسبات التي كان يمكن استغلالها لتعريف هذه الدالّة وكتابة جدول لها. فمبرهنة منلاوس تتطلب استخدام دالّة الظل في بعض تطبيقاتها. ولم يكن هناك جدول يعطي، تبعاً لمقادير α، قيم $tan\ \alpha$ أو ما يعادل قسمة وتر 2α على وتر الزاوية المكملة لـ 2α. لذلك فإن حساب عرض

(٢٣) الكتابة اللاتينية لجابر.

المكان φ، في كتاب **المجسطي**، تبعاً لأطول يوم من أيام السنة، لم يكن يتم وفقاً للعلاقة $tan\ \varphi = sin\ (max\ d_{\odot}).cos\ \varepsilon$. أما العلاقة التي تعادل، لو استخدمنا الأوتار، العلاقة الأكثر شمولاً $sin\ d = tan\ \varphi\ .\ tan\ \delta$، فكانت تطبق عدة مرات لتحديد معادلة اليوم d(٢٤). وقد سهّلت جداول الظلال أيضاً حساب زاوية مثلّث مستو (مسطّح) قائم الزاوية، عندما يعطى ضلعا الزاوية القائمة. وهذه المسألة تطرح بصدد هيئات الكواكب، وخاصة عند تركيب جداول المعادلات. وكذلك يتطلب حساب ارتفاع الشمس استناداً إلى ظل شاخص المزولة، استخدام مبرهنة فيثاغورس بشكل تكراري مع استخراج جذر تربيعي. ولقد رأينا سابقاً الدور المتعاظم للإحداثيات المحلية في علم الفلك الهندي والعربي.

إن حساب ارتفاع الشمس، في النصوص العربية الأولى، يعتمد على وتر المثلث المحدد بشاخص المزولة وبظل الشاخص أي «قطر الظل». وإذا كان الشاخص g عمودياً وكان ظله على سطح أفقي مساوياً لـ o فإن ارتفاع الشمس h يحسب وفقاً للعلاقة $sin\ h_{\odot} = Rg/d$، مع $d = \sqrt{g^2 + o^2}$. وهكذا يمكن وضع جدول بمقادير الظل تبعاً لمقادير الارتفاع. يقسم الشاخص غالباً إلى اثني عشر إصبعاً، وذلك وفقاً لتقليد هندي. كما توجد تقسيمات أخرى للشاخص، كأن يقسم مثلاً إلى ستة أقدام ونصف، أو إلى سبعة أقدام، أو إلى ستين جزءاً. ونجد في **زيج الخوارزمي** (مؤلف كتاب **الجبر والمقابلة** في بداية القرن التاسع الميلادي) وفي **زيج البتّاني** (الرقّة، نهاية القرن التاسع الميلادي) جدولاً ذا منزلتين بالظلال الخاصة بشاخص مزولة طوله ١٢ اصبعاً وهذا يعني أن هذا الجدول يخص الدالة $\alpha \leftarrow 12.cot\ \alpha$ تبعاً لمقادير الارتفاع بالدرجات. والجدول في كل من الكتابين طُبّق فقط على مقادير الظل الموافقة لمقادير الارتفاع، والعكس صحيح. أما طول الشاخص فهو اختياري كطول شعاع الكرة، وله وحدات خاصة به. وهذا ما يمنع، كما يبدو، ظهور أية فكرة للتعميم ولإدخال الدالة المفيدة tan أو $R\ .\ tan$. ولم يكن في **زيج حبش الحاسب**، الذي ظهر في نفس الحقبة من الزمن، جدول بمقادير ظلال الشمس. فهو يحسب الارتفاع، بواسطة «قطر الظل» التقليدي، لشاخص مزولة طوله اثنا عشر إصبعاً. ولكن هذا المؤلف، وهو من دون شك أحد أهم كتب القرن التاسع الميلادي التي وصلت إلينا في علم الفلك، يحوي المفهوم العام لظل القوس بما فيه تعريف الظل وجدول تطبيقاته المتنوعة. إن الطريقة التي أدخل بها حبش الحاسب هذا المفهوم، تدلّ على أنه لم يقتبسه عن أحد أسلافه. إن لنص حبش، حسب رأينا، أهمية كبرى بغض النظر عن نتيجة التحقّق من المسألة الصعبة التي تخصُ الأسبقية أو المكانة التي ينبغي منحها لجداول ظل الشمس. فمضمون هذا النص يفسر إدخال الدالّة الجديدة، والاهتمام القليل الذي لاقته، وهذا ما لا يخلو من المفارقة، قبل أن تحتل في **الأزياج** مكاناً مضاهياً لمكان دالّة الجيب.

---

(٢٤) انظر تعريف هذه الأقواس، في: Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, p. 61.

ينتمي أحمد بن عبد الله حبش الحاسب المروزي إلى ذلك الجيل من علماء الفلك الذين اكتشفوا **المجسطي** بعد أن تمكنوا من الطرائق الهندية. كان حبش معاصراً للخوارزمي وللبتّاني اللذين ترجمت أعمالهما إلى اللاتينية بينما بقي حبش شبه مجهول من قبل العالم الغربي في القرون الوسطى. لقد لفتت أعمال البيروني خاصة، وهي المصدر القيّم والأكيد، انتباه المؤرخين إلى هذا العالم الذي كثر ذكره في المراجع. ولكن، لم يبق من كتابات حبش التي تتعلق كلّها بعلم الفلك، إلا كتاب **الزيج الممتحن** في مخطوطة مشوشة لسوء الخط الذي حرّره على الأرجح في أواخر حياته بعد سنة ٨٦٩م. إن هذا الكتاب يبرّر، وحده، إعطاء لقب الحاسب إلى هذا العالم البغدادي. والكتاب كأي مؤلّف في علم الفلك، مكوّن من مجموعة من القواعد والجداول، وله تركيبه الخاص به الذي يختلف عن تركيب كتاب **شرح المجسطي**، ومع ذلك فهو منبثق بشكل واضح عن تأمّلات بالأفكار الرياضية الأقل وضوحاً في كتاب **المجسطي**. ويمكن أن نذكر على سبيل المثال، التطبيق الذي أجراه حبش للصيغة $sin^2\ \theta = 1 - cos\ 2\theta/2$ التي استخدم بطلميوس ما يعادلها هندسياً لبناء جدول الأوتار. فقد اقتبس منها حبش طريقة مبتكرة لاستخراج الجذر التربيعي بواسطة جدول الجيوب. ولقد جهد حبش في تحسين تقنيّات **المجسطي** المختلفة. فنحن نراه يسدُّ نواقص الحساب الكروي، ويطوّر الطرائق التكرارية، ويُوسّع مجال استخدام الدالات الاستكمالية الموجودة في جداول المعادلات، مقتبساً ذلك عن المصادر الهندية. وربما اقتبس عن بطلميوس فكرة مثيرة للاهتمام وهي فكرة وضع جدوله المشهور **جدول التقويم** الذي سنتحدث عنه قبل أن نعود إلى دالّة الظل.

تطبق طرائق الاستكمال في **المجسطي** على بعض الدالات الخاصة التي لها متغيران، من أجل الحصول على مقاربة جيدة تجعل دور المتغير الأقل تأثيراً يقتصر فقط على قيمتيه القصويين، وذلك لتحاشي الجدولة المملة(٢٥). والدالات الأربع التي يتركب منها **جدول التقويم** لحبش الحاسب ناتجة عن معالجة عبارات ذات وسيطين. ولا نجد أي شرح لتركيب الجدول، ولكن ذلك يظهر بوضوح بفضل التشابه بين أهم تطبيقاته. وهكذا فإن النموذج التالي:

$$sin\ \delta = [sin\ (\beta + f_1(\lambda)).f_2(\lambda)]/R \quad sin\ \Delta\alpha = f_3(\lambda).f_4(\delta)/R$$

يستخدم لتحديد الإحداثيات الاستوائية (α, δ)(٢٦) لنجم ذي إحداثيات (λ, β) معطاة

---

(٢٥) انظر: المصدر نفسه، ص ٩٣ ـ ٩٥ و١٨٣ ـ ١٨٤.

(٢٦) كما ورد في كتاب **المجسطي**، القوس $\Delta\alpha$ الذي نحصل عليه يساوي الفرق بين الطالع المستقيم المطلوب، α، والقوس $\alpha^{-1}(\lambda)$ الذي نحصل عليه مباشرة من جدول الطالع المستقيم للشمس $(\alpha : \lambda_{\odot} \to \alpha_{\odot})$. أما بخصوص هاتين الصيغتين والصيغتين اللتان تليهما، فمن المستحيل الدخول في تفاصيل الطريقة المتبعة. انظر: Al-Bīrūnī, *Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du X^e siècle*, pp. 55-57.

بالنسبة إلى فلك البروج. ولم يكتف حبش بإجراء التبديل العكسي للإحداثيات بل حسب الزاوية المتممة $\bar{v}$ للزاوية بين فلك البروج والأفق، وحسب معادلة اليوم $d_{\odot}$ للشمس مباشرة، تبعاً للمعطيات الأولية أي خط العرض φ والوقت الزوالي α_M والطول $\lambda_{\odot}$، بواسطة الصيغتين:

$$sin\ \bar{v} = [sin\ (\varphi - f_1(\alpha_M)].f_2(\alpha_M)]/R, \quad sin\ d_{\odot} = f_3(\lambda_{\odot} - 90°).f_4(\varphi)/R$$

إن التشابه الذي ندركه، بين هذه المسائل بطريقة أو بأخرى، راجع إلى إمكانية وضع عناصر كل مسألة على نفس الشكل الذي يحتوي على فلك البروج وخط الاستواء ودائرتين كبريين متعامدتين تمران بالنجم أو بسمت رأس المكان. وتكمن هنا الميزة المهمة لمجموعة الدالات التي ابتكرها حبش إذ يمكن تطبيق هذه الدالات المساعدة على متغيرات مختلفة، بينما لا تعطي الجداول المعتادة في المؤلفات الفلكية إلا نتيجةً لحساب معين أو لمرحلة من حساب. وتؤدي هذه الدالات في نفس الوقت إلى تبسيط أكبر من ذلك الذي ينتج عن استخدام الدالات البسيطة للمثلّثات، وذلك لأنها تأخذ في الحسبان ميل فلك البروج. لم يعط حبش تعريفات هذه الدالات. والدالّة الرابعة، f_4، تنطبق على دالّة الظل مضروبة بمُعامل معين(٢٧).

لقد شرح المؤلّفون العرب **جدول التقويم** الذي كتبه حبش الحاسب، وقلدوه. ولقد قام أبو نصر بتحليل كامل لهذا الجدول ولتطبيقاته، واستوحى منه كتابه **جدول الدقائق**، وهو مجموعة من خمس دالات مساعدة(٢٨). وذكر أبو نصر شرحاً قام به الخازن وجدولاً من نفس النوع للنيريزي. دفع تطوُّر الحساب الكروي إلى مواصلة البحث عن دالاّت مساعدة. واتخذ هذا البحث أشكالاً متعددة. وربما لا يمثل كتاب **جدول التقويم** المحاولة الأولى في هذا المجال. بعض هذه الدالات المجدولة مثلثيّ صرف كالجيب المعكوس (أي الدالة العكسية للجيب) الذي سمي قديماً قاطع التمام. وهذا يعني أن دالة الظل لم تتميز

---

(٢٧) تُوجد بوضوح عدة تعابير مُعادِلة لكل من هذه الدالاّت الأربع. وهكذا نحصل على:

$$f_4(x) = sin\ x.sin\ \epsilon/sin\ (90° - x) = R.sin\ \delta(x)/sin\ (90° - x)$$

إذا طبقنا صيغة الميل الزاوي للشمس التي سبق ذكرها. وإذا أدخلنا المصطلحات التالية:

$$\bar{x} = 90° - x, \delta : \lambda_{\odot} \rightarrow \delta_{\odot}, \alpha : \lambda_{\odot} \rightarrow \alpha_{\odot}$$

يبدو أن الصيغ التي استخدمت في تركيب هذا الجدول هي:

$f_2 : x \rightarrow sin\ [\overline{\delta(x + 90°)}]$ و $f_1 : x \rightarrow \delta(\alpha^{-1}(x))$

و

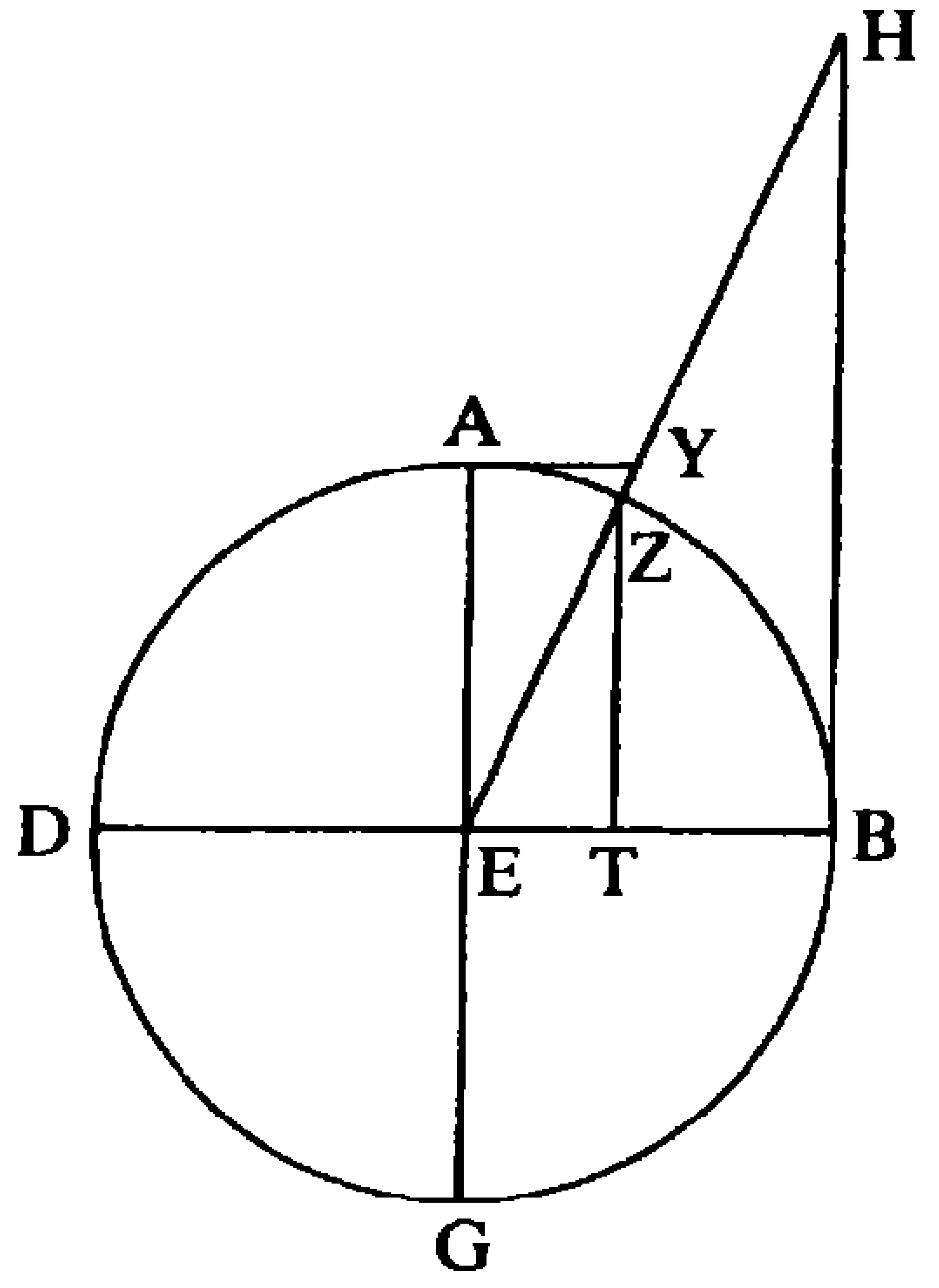
$f_4 : x \rightarrow R.sin\ \delta(x)/sin\ \bar{x}$ و $f_3 : x \rightarrow R.sin\ \bar{x}/f_2(x)$

انظر: المصدر نفسه، ص ٥٦ ـ ٥٧.

(٢٨) نُشر هذان النصان ضمن مجموعة أبي نصر. انظر: ابن عراق، رسائل أبي نصر بن عراق إلى البيروني، و Rida A. K. Irani, «The *Jadwal at-Taqwīm* of Ḥābash al-Ḥāsib,» (Unpublished M. A. Dissertation, American University of Beirut, 1956).

كثيراً عند إدخالها عن الدالات المساعدة الأخرى، على الرغم من تطبيقاتها الممكنة في مبرهنة منلاوس أو في بعض حلول المثلثات المستوية. ولقد عُرض مفهوم ظل القوس في **زيج حبش** في فصل قصير بمناسبة تغيير للإحداثيات، ووُصف بأنه كثير الفائدة. استعمل حبش في أول الأمر بمثلين حسابيين لتعريف «ظل» (سنرمز للظل هنا بـ tan) عرض المكان ϕ وظل تمام عرض المكان $\bar{\phi}$ بواسطة الصيغتين $tan\ \phi = R.sin\ \phi / sin\ \bar{\phi}$ و $tan\ \bar{\phi} = R.sin\ \bar{\phi} / sin\ \phi$. وتشكل هذه الطريقة في التعريف استناداً إلى حالة خاصة، خروجاً عن الأسلوب الذي اتُبع في عرض مفهومي الجيب والجيب المنكوس. ومفهوم الظل بحد ذاته عام لأن الجدول يطبق لحل عدة مسائل. وإحدى هذة المسائل تخص مثلثات مسطحة وتتعلق بمعادلة الشمس. ويحتوي «جدول الظل» (الدالة $R.tan$) الوارد في **زيج حبش** على ثلاث قوائم بظلال الأقواس التي تتزايد مقاديرها بأنصاف الدرجات من $0°\ 30'$ إلى $89°$.

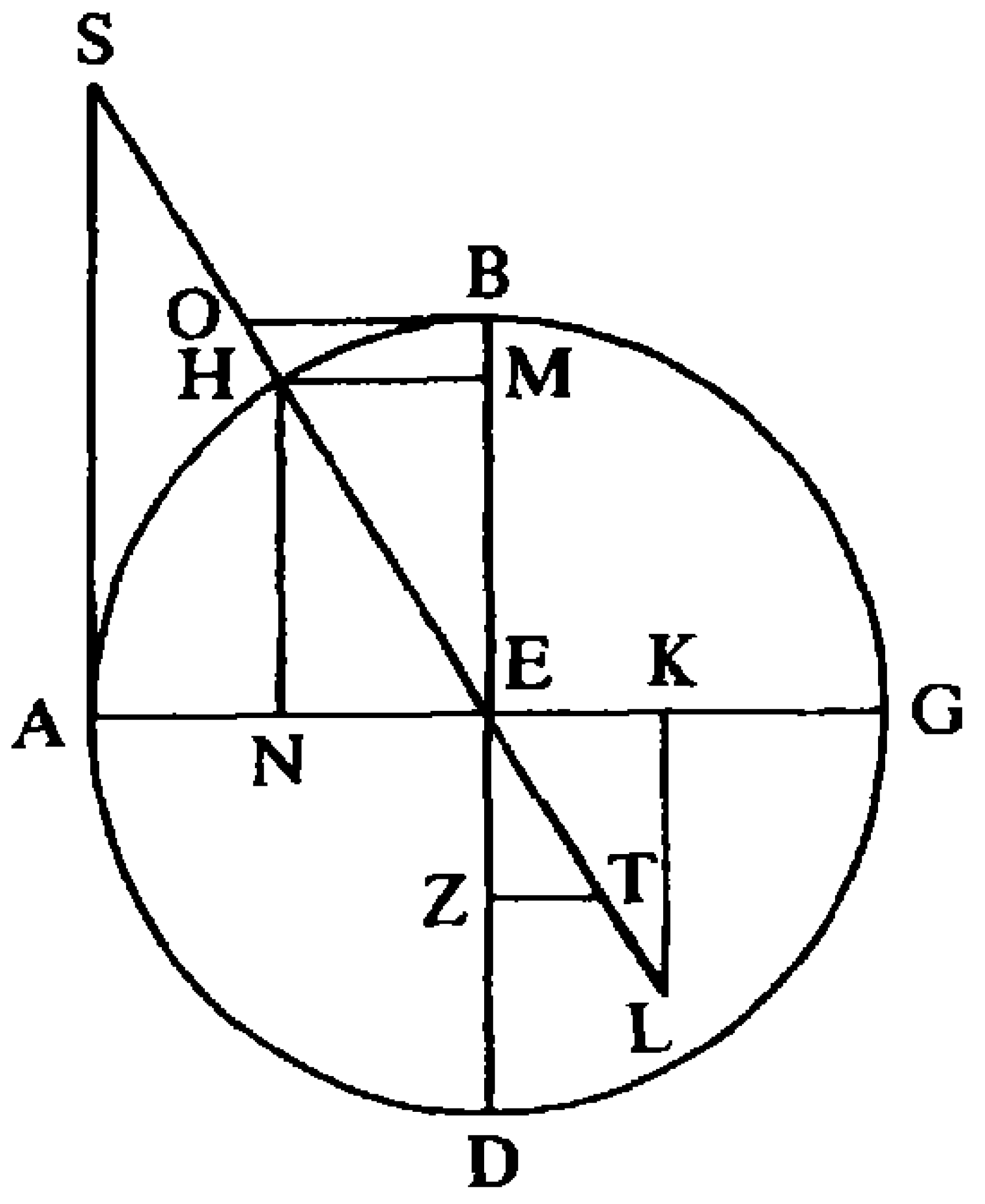
لم يكن مفهوم «الظل» في عداد المفاهيم المألوفة خلال الفترة التي ظهر فيها كتاب **المقاليد**. وقد عرفت تلك الفترة، بالتأكيد، بعض المؤلفين، كابن يونس (ت ١٠٠٩م)، الذين لم ينتبهوا إلى أهمية الدالة التي وضع حبش جداول لها. فقد عاد عالم الفلك القاهري، في كتابه **الزيج الحاكمي** حيث يحتل الحساب الكروي مكاناً مهماً، إلى استخدام جدول ظل الشمس (الدالة $h_{\odot} \rightarrow g.cot\ h_{\odot}$) وحسابات الظل تبعاً للارتفاع، وبالعكس. أما البيروني، فهو يبين، عند عرضه لقاعدة الظلال في كتاب **المقاليد**، ما يقصد بـ«ظل» القوس ولكنه لا يعطي أي تعريف للجيب. وهو يقوم بذلك معدلاً ما عرضه أبو الوفاء، بغية التمييز بين «ظل» القوس وبين نوعين من ظلال شاخص الساعة الشمسية[٢٩] (الشكلان رقما (١٥ ـ ١٠) و(١٥ ـ ١١)). ونرى أيضاً، في الفترة نفسها، الخجندي وكوشيار، وهما عالما الفلك في مرصد ري، يرفضان مبرهنة أبي الوفاء للظلال بحجة أن استخدام جدول «الظلال» غير صحيح بسبب التزايد السريع



الشكل رقم (١٥ ـ ١٠)

(٢٩) قارن بين الشكل رقم (١٥ ـ ١٠)، المقتبس عن كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء، والشكل رقم (١٥ ـ ١١) للبيروني الذي نرى عليه، في الوضع المعتاد، الظل «المنكوس» KL للشاخص EK والظل «الممدود» ZT لـ EZ اللذين يُستخدمان في إدخال الظل AS للقوس $\widehat{AH}$ ولظله «الممدود» BO.

لفروقاتها. وهذا التزايد ناتج عن استطالة ظلال الشاخص. إن مصطلح «الظل» هذا المقتبس عن صناعة المزاول مشحون فعلاً بالمعاني. وهذا ما يظهره كتاب البيروني **الظلال**(٣٠) الذي حرر بعد عشرين سنة من تحرير كتاب **المقاليد**. فالبيروني يجمع فيه مختلف الإيضاحات عن الظلال وقياساتها، وعن استخدامها لرسم خط الزوال ولتحديد مواقيت الصلاة ولتقدير المسافات، . . . إلخ، قبل أن يشير إلى التبسيطات التي تدخلها في الحسابات الفلكية. غير أن عرض أبي الوفاء للظلال لا يخص إلا دالة الظل فقط.



الشكل رقم (١٥ ـ ١١)

يعالج الفصل الخامس من المقالة الأولى من كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء الجيوب والأوتار. أما الفصل السادس فهو مكرس لـ«الظلال»، وذلك لضرورة استخدامها في أغلب المسائل حسب رأي الكاتب. يعرّف أبو الوفاء «ظل» القوس هندسياً، الذي يسميه أيضاً «الظل الأول» أو «الظل المنكوس»، وذلك بجعله مطابقاً للظل المنكوس لشاخص أفقي ملاصق لشعاع دائرة مرجعية (أي أن ظل BE يساوي، وفقاً لرموز الشكل رقم (١٥ ـ ١٠)، ($tan\,\widehat{BZ} = BH$) ويستخدم أبو الوفاء الشكل نفسه ليعرّف «الظل الثاني» أو «الظل الممدود» للقوس (أي أن ظل AE يساوي $cot\,\widehat{BZ} = AY$) وليثبت العلاقات البسيطة بين الظل وظل التمام، وبين الجيب وجيب التمام. وهو يحدد بعض هذه العلاقات بواسطة أحد «قطري الظل» (EH وEY) وهما القاطع وقاطع التمام حسب المصطلحات الغربية القديمة. ويلاحظ أبو الوفاء أن الظل يساوي، إذا ما اتخذنا شعاع الدائرة كوحدة للقياس، نسبة الجيب إلى جيب التمام، وكذلك هي حال «الظل الثاني». ولقد أصبح عرض أبي الوفاء مرجعاً متعارفاً عليه للتعريف الهندسي للجيب والجيب المنكوس، ودخل في «الأزياج» مع قاعدة الظلال وجدول «الظل». انتقد فيات (Viète) استخدام كلمة الظل من قبل توماس فينك (Thomas Fincke) (١٥٨٣) الذي أدخل هذه الدالة. وكان موروليكوس (Maurolycos) الذي ترجم عن العربية كتاب **الأكر** لمنلاوس، قد استخدم مصطلح «umbra versa» (أي الظل المنكوس) في كتابه *De sphaera sermo* (١٥٥٨) وخاصة لدى عرضه لبرهنة الظلال. لكننا لا نعرف بالضبط كيف بدأ استخدام دالة الظل في الغرب.

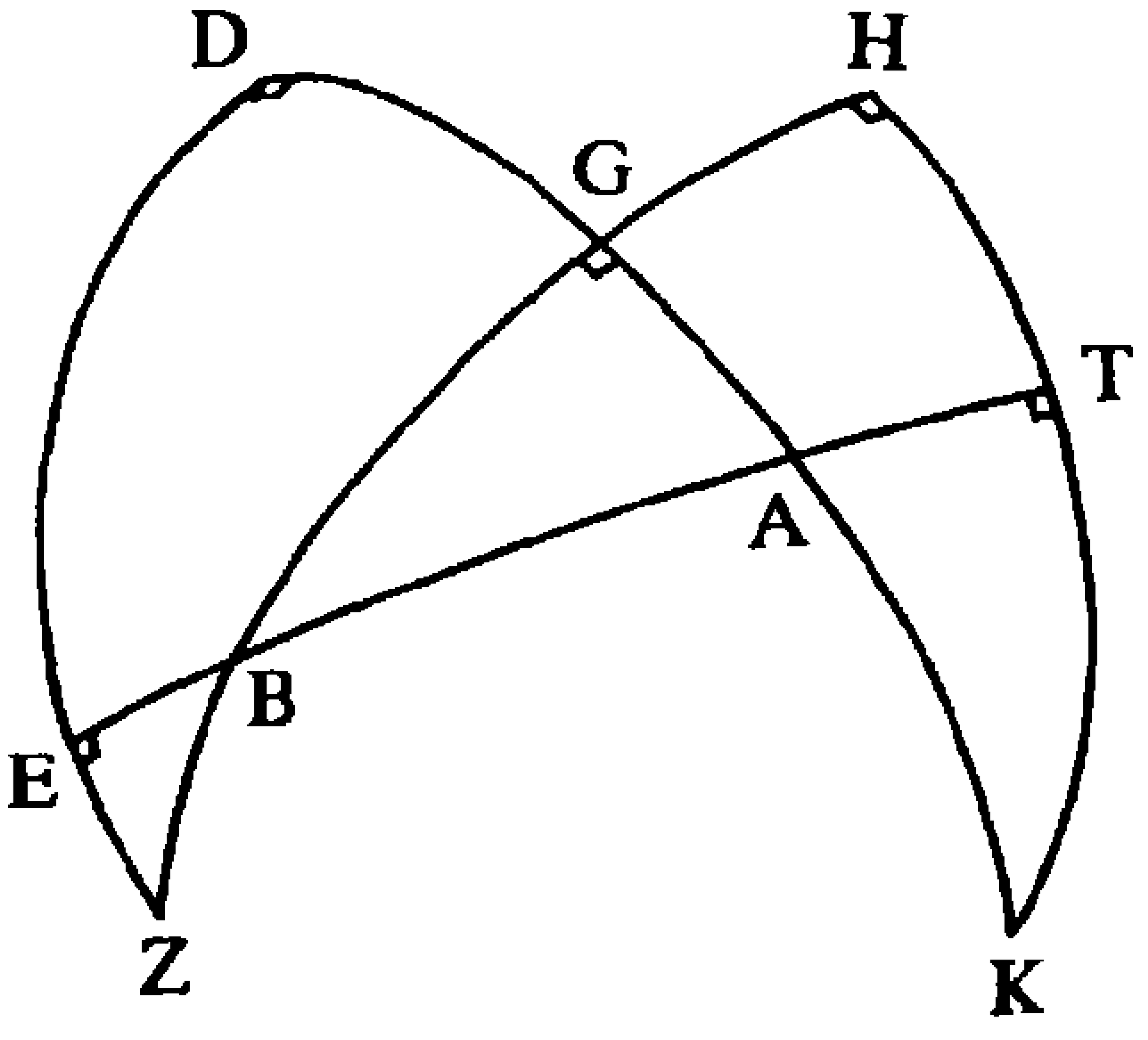
---

(٣٠) انظر: Abu al-Rayhan Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī, *Ifrād al-maqāl fī ʿamr al-zilāl: The Exhaustive Treatise on Shadows*, translation and comment by Edward Stewart Kennedy, 2 vols. (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1976).

٥ ـ مؤلفات علم المثلثات

شكلت نهاية القرن العاشر الميلادي منعطفاً في تاريخ علم المثلثات. فقد أصبح حساب المثلثات يحتلُ مكاناً مهماً في المؤلفات الفلكية، على شكل فصول للجيوب والأوتار والظلال وصيغ الحساب الكروي. وظهر الاهتمام أيضاً بحل المثلثات. وحلت دراسة المثلثات نوعاً ما محل العروض التقليدية لمبرهنة منلاوس، وأخذت تشكل معها مادة لنوع جديد من المؤلفات تمثل بـ كتاب **رباعي الأضلاع** لنصير الدين الطوسي. ترافقت هذه البحوث بالحصول على بعض المكتسبات، كالعلاقات الأخيرة في المثلث الكروي القائم الزاوية أو كمفهوم المثلث القطبي، ولكنها لم تغن حساب الأزياج بطرائق جديدة. إن علم المثلثات الوارد في المؤلفات، والذي كان تعبيراً عن تقنية حققت أهدافها الخاصة، كروي بشكل أساسي، وهو يترك مكاناً واسعاً للمثلث القائم الزاوية.

بدأت مسألة حل المثلثات الكروية تخرج عن نطاق النصوص الفلكية خلال هذه المرحلة التي سبقت إدخال صيغ المثلث. ويوجد نصُ لأبي نصر يتحدث فيه عن أخطاء مرتكبة من قبل أبو جعفر الخازن في كتابه **زيج الصفائح**. ويبدو من هذا النص أن الخازن قد قام بحل المثلثات أياً كانت في أغلب الحالات، بما فيها الحالة التي تكون فيها الأضلاع الثلاثة معطاة(٣١). ولقد أعيد طرح هذه المسألة بشكل طبيعي على أثر اكتشاف المبرهنات الجديدة. فقد تناولها البيروني في كتاب **المقاليد** وبرهن أن «الشكل المُغني» [عن رباعي الأضلاع] يمكّن من القيام بأي حساب كروي. فهو يصنف أولاً المثلثات إلى عشرة أصناف تبعاً لزواياها، ويثبت بعض الخصائص المتعلقة بالأضلاع ثم يوحد بين الأصناف ليحصل على أصناف مشكلة من مثلثات لها زاوية قائمة وزاويتان حادتان. ثم يحلُ المثلثات القائمة الزوايا بواسطة بعض الصيغ التي يطلق عليها مصطلح «الشكل المغني»، مشيراً إلى التبسيطات التي يجلبها «الشكل الظلي» من حين لآخر(٣٢) (الشكل رقم (١٥ ـ ١٢)). ولكن



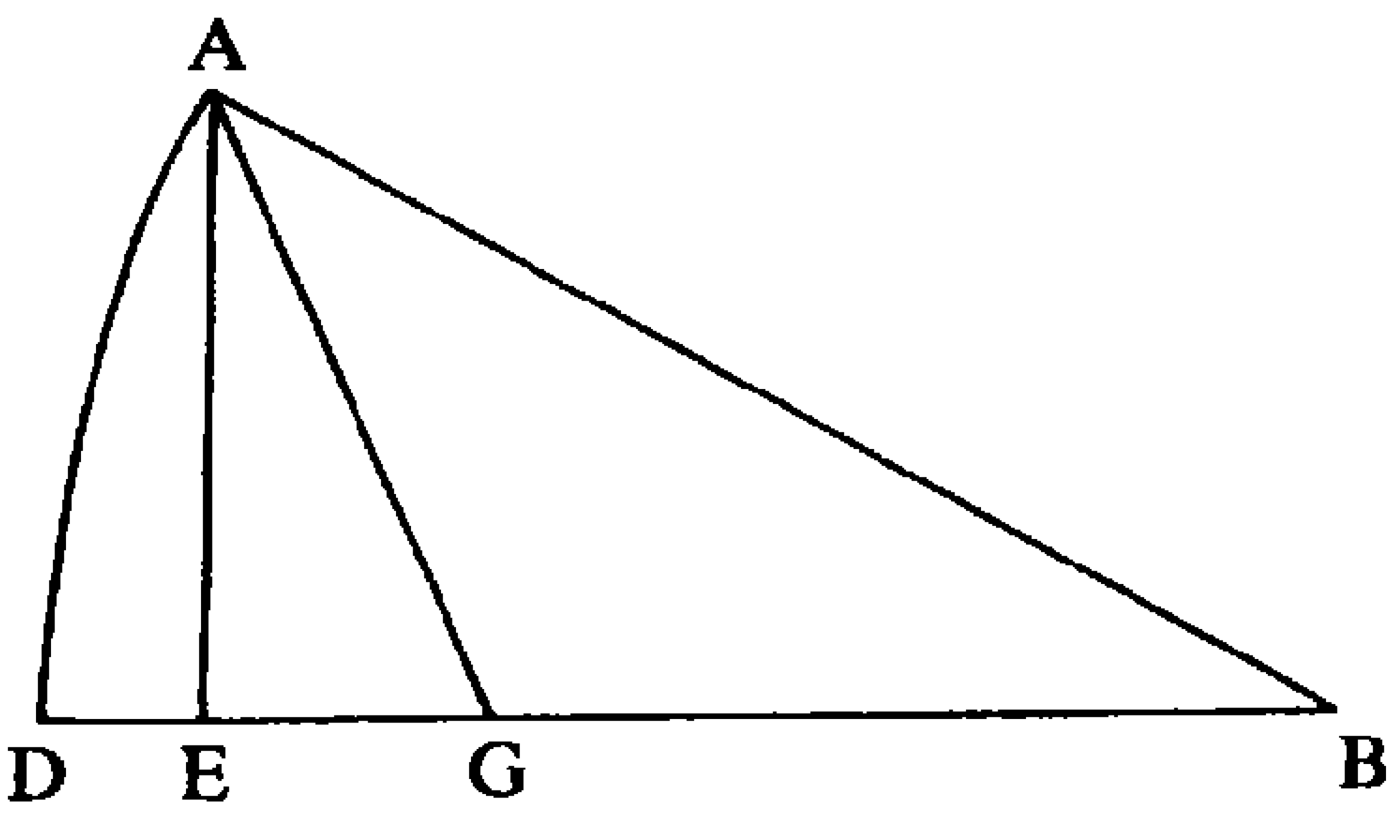
الشكل رقم (١٥ ـ ١٢)

---

(٣١) يمكن حل هذه المسألة باستخدام مبرهنة منلاوس، فنحصل على مقادير الزوايا المطلوبة بفضل إحدى نتائج **المجسطي** التي تسمح بتحديد قوسين إذا عرف مجموعهما، أو الفرق بينهما، ونسبة جيبيهما. وقد استخدم أبو الوفاء طريقتين من هذا النوع لحساب الزاوية الميقاتية، في أحد مؤلفاته التي سبقت بالطبع كتابه **المجسطي**، ونحن نلقى هذا المبدأ ثانية في كُتب علم المثلثات، مع استخدام صيغ المثلث.

(٣٢) أدخل البيروني، لأجل ذلك، الهيئة الواردة في الشكل رقم (١٥ ـ ١٢) التي تتضمن أزواج =

حله للمثلث، بتجزئته إلى مثلثين قائمَي الزاوية بواسطة الارتفاع، هو أكثر إيجازاً. وتنقصه على الأخص معالجة الحالة التي تعطى فيها الأضلاع الثلاثة وتلك التي تعطى فيها الزوايا الثلاثة. إن دراسة البيروني بحد ذاتها تتضمن بعض النواقص، ولكنها تكفي للقيام بالتطبيقات على علم الفلك. غير أن العلماء العرب تناولوا هذه الدراسة ثانية. وأخذوا عن كتاب **المقاليد** عرض مبرهنة منلاوس والأشكال التي استُبدلت بها هذه المبرهنة، وتصنيف المثلثات وحلولها. هذه هي العناصر الداخلة في تركيب العديد من المؤلفات الرياضية البحتة التي ظهرت على هامش الحساب الفلكي والتي توجت بـ **كتاب رباعي الأضلاع**.



الشكل رقم (١٥ ـ ١٣)

ظهرت العلاقات الست للمثلث القائم الزاوية في نصٍ لمؤلف مجهول في أواخر القرن الحادي عشر الميلادي. لا يُضاهي هذا النص بنوعيته كتاب نصير الدين الطوسي، ولكنه ينبىء سلفاً بمحتوياته[٣٣]. يثبت مؤلف هذا الكتاب أربع عشرة صيغة مترابطة إلى حد ما، ولا يعطي لها أي تطبيق. ويورد، من جهة أخرى، حلا لمثلث مثيراً للاهتمام ومنسوباً لأبي نصر. وقد كتب هذا الأخير كتابين[٣٤] متممين لـ **الرسالة**. الكتاب الأول الذي يعالج بعض المسائل بناء على طلب من البيروني، يتضمن مبرهنة الجيوب في حالة السطح المستوي. وبيانه لهذه المبرهنة مستوحى من المبرهنة في الحالة الكروية، إذ يقول ما معناه: عندما علمت أن في المثلثات المشكلة من أقواس الدوائر العظام على الكرة، نسبة جيب ضلع على جيب ضلع آخر تساوي نسبة جيب الزاوية المقابلة للضلع الأول إلى جيب الزاوية المقابلة للضلع الثاني، وسألت إذا كانت هذه القاعدة شاملة لكل المثلثات، أعني أن تكون مشكلة من أقواس أو من خطوط مستقيمة، فإن الجواب يكون نعم... ثم يثبت المبرهنة التي تعادل الصيغة $g/b = \sin G/\sin B$ بواسطة رسم لأحد الارتفاعات[٣٥] (الشكل رقم (١٥ ـ

= المثلثات التي طبق عليها قاعدة المقادير الأربعة أو قاعدة الظلال لحل المثلث ABG. وقد استُخدمت بعد ذلك أشكال مشابهة لهذا الشكل لإثبات صيغ للمثلث.

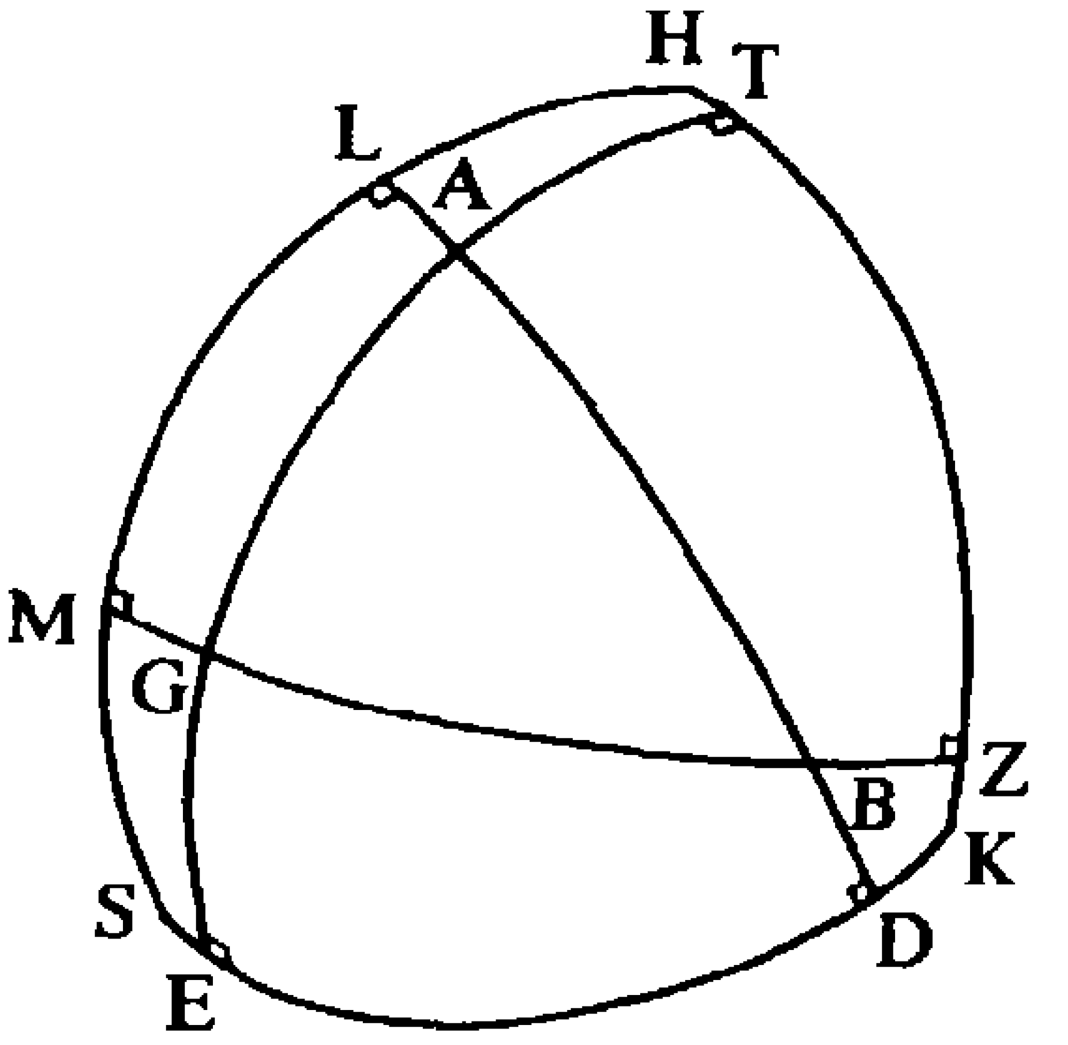
(٣٣) انظر: N. G. Hairetdinova: «Trigonometriceskii Isfahanskogo Anonima,» *Istoriko - Matematitcheskie Issledovaniya,* vol. 17 (1966), pp. 449-464, et «Sobranie Pravil Nauki Astronomii,» *Fisikomatematičeskie Nauki b Stranah Vostoka* (Moscou) (1969), pp. 147-190.

(٣٤) لقد نشر أيضاً ضمن مجموعة أبي نصر، انظر: ابن عراق، **رسائل أبي نصر بن عراق إلى البيروني**.

(٣٥) بواسطة العلاقة: $AE/AB = \sin B/\sin E$، انظر الشكل رقم (١٥ ـ ١٣) حيث AE تساوي $\sin B$ عندما يكون معنا $AB = R = \sin E$، لاحظ أيضاً أن $AG/AE = \sin E/\sin G$ ومنها نحصل على: $AG/AB = \sin B/\sin G$.

١٣)). أما الكتاب الثاني الذي اقتبست منه الطريقة الواردة في النص المجهول المؤلف، فهو بالذات الكتاب الذي يصحح فيه أبو نصر أخطاء الخازن. وهذا الكتاب ذو أهمية لأننا نجد فيه أول استخدام للمثلث القطبي.

لوحظ استخدام المثلث القطبي، في أول الأمر، في حل مثلث أي كان ذي زوايا معطاة، وذلك في كتاب رباعي **الأضلاع** (١٢٦٠). فكان أول استخدام معروف لمبدأ الثنائية الذي طور في أوروبا في زمن فيات (Viète) (١٥٩٣). ويمكن أن نلاحظ أن نصير الدين الطوسي قد فوت بعض الفرص المناسبة لتطبيق هذا المفهوم، وخاصة في دراسته لخصائص الأضلاع والزوايا في المثلث[٣٦]. ولقد نسبت هذه الفكرة، بعد الاطلاع على النص، المجهول المؤلف، الذي كُتب في أواخر القرن الحادي عشر الميلادي، إلى هذا المؤلف. ونحن نعرف الآن أن صاحب الطريقة التي عرضها نصير الدين الطوسي، هو أبو نصر وأنها مقتبسة من صياغة للخازن[٣٧]. وها نحن نعود من جديد إلى القرن العاشر الميلادي، أي إلى العصر الذي تكوّن وتوضح فيه هذا النوع من المسائل. لقد اهتم الخازن بمواضيع شتى وعُرف بأنه كاتب أصيل ولكنه مهمل في بعض الأحيان. إن حسابه مغلوط، فعلاً، ولكن له الفضل في وضع المسألة بشكل جيد، وذلك بتركيب أقواس معادلة لزوايا المثلث الأصلي. أصلح أبو نصر الشكل وأكمله، إذ أظهر المثلث *HKS* (الشكل رقم (١٥ ـ ١٤)) وبرهن أن أضلاعه وزواياه مكملة، ترتيباً، لأضلاع وزوايا المثلث الأصلي *ABG*. وهكذا تؤول المسألة إلى تحديد زوايا مثلث معلوم الأضلاع، وهذا ما كان أبو نصر قد حله بواسطة صيغه الخاصة المتعلقة بالمثلث. إن المؤلف



الشكل رقم (١٥ ـ ١٤)

(٣٦) إذا أخذنا مثلاً الجدول ذا المدخلين الذي يوضح دراسة المثلث، نرى فيه الأصناف العشرة المكونة وفقاً للأضلاع والأصناف العشرة الأخرى المكونة وفقاً للزوايا، مرتبة باستثناء أحدها بنفس الترتيب (الصنف الأول وفقاً للزوايا: ثلاث زوايا حادة؛ الصنف الأول وفقاً للأضلاع: ثلاثة أضلاع أصغر من 90°، ... الخ). لقد فوت نصير الدين فرصة جعل هذا الجدول متناظراً، لأنه لم يُرتب أصناف النوع الأول بالترتيب الموافق لأصناف النوع الثاني ذات القيم المكملة لقيم أصناف النوع الأول. يتبين من النص أن اكتشاف هذا التناظر كان ممكناً لو أُقيمت الصلة مع الشكل الذي رسم في الحالة التي تُعطى فيها الزوايا.

(٣٧) انظر: Marie - Thérèse Debarnot, «Introduction du triangle polaire par Abū Nasr b. 'Irāq,» *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, no. 1 (May 1978), pp. 126-136.

الذي ضمنه أبو نصر هذا الشكل الفريد، يتلاءم بصعوبة مع التطوُرات الأخرى التي لا يمكن استيحاؤها من المبرهنة الوحيدة للجيوب، هذه المبرهنة التي لا تتغير بالتحوُلات الثنائية. ولا يبدو أن المؤلفين العرب قد قاموا باستخدامات أخرى للمثلث القطبي. نحن نعرف فقط بوجود تركيب آخر أكثر تعقيداً طبق على نفس المسألة انطلاقاً من أقطاب أضلاع المثلث الأصلي. وردت هذه الطريقة في كتاب في علم المثلثات حرر على الأرجح في إسبانيا في بداية القرن الحادي عشر الميلادي. ولقد تحدث ابن معاذ مؤلف هذا الكتاب عن الصعوبة التي لقيها في حل هذه المسألة. سوف نعود إلى هذا الكتاب المهم لابن معاذ، بعد أن ندرس محتويات كتاب نصير الدين الطوسي.

عاش نصير الدين الطوسي (١٢٠١ ـ ١٢٧٤م)، مؤسس مرصد مراغة المشهور، في عصر شهد انهيار الخلافة العباسية وشيئاً من انفتاح العالم الإسلامي على بلاد الشرق الأقصى. ولقد ألف أكثر من ستين كتاباً تناول بعضها الفلسفة والفقه. إن أعماله العلمية التي تتضمن العديد من المراجعات لأعمال سابقيه، تظهر كتحديث للمدونات الرياضية والفلكية. ويندرج مؤلفه كتاب **رباعي الأضلاع**(٣٨) المكون من خمس مقالات، ضمن هذا التركيب الذي يشمل **الأصول والأكر والمجسطي** والعديد من الكتب الأخرى اليونانية والعربية أيضاً. تعالج المقالات الأولى والثانية والرابعة الأنساب المركبة ومبرهنة منلاوس في الحالتين المسطحة والكروية، وهذا ما يُفسح المجال إلى إحصاء العديد من الحالات، لبلوغ الشمول الكامل في الدراسة. وتتناول المقالة الثالثة القضايا التمهيدية الضرورية للحساب الكروي، وتشير باختصار إلى حل المثلثات المسطحة، ولا تعطي من الصيغ إلا صيغة مبرهنة الجيوب(٣٩). وتشكل المقالة الخامسة، على الأخص، القسم المثلثاتي من الكتاب. تعيد الفصول الأربعة الأولى من هذه المقالة دراسة تصنيفات البيروني وتُتمِمها. ونجد فيها، بعد مقارنة عناصر المثلثات المشكلة من تقاطع ثلاث دوائر عظام، توزيعاً مزدوجاً للمثلثات الكروية إلى عشرة أصناف تبعاً لطبيعة أضلاعها وزواياها، مع دراسة كل صنفٍ من المثلثات ودراسة التقاطعات الناتجة عنها.

يقدم الفصلان الخامس والسادس، المكرسان للعلاقات في المثلث القائم الزاوية، دراستين متشابهتين انطلاقاً من المبرهنتين الأساسيتين، «الشكل المغني» و«الشكل الظلي».

---

(٣٨) انظر: Naṣīr al-Dīn Muhammed Ibn Muhammed al-Ṭūsī, *Traité du quadrilatère,* édité et traduit par Alexandre Pacha Carathéodory (Constantinople: Manuscrit tiré de la bibliothèque de S. A. Edhem Pacha, 1891).

(٣٩) تحدد الزاوية الأولى، في الحالة التي تعطى فيها الأضلاع الثلاثة، في المثلث القائم الزاوية المشكل من أحد ضلعي الزاوية ومن مسقطه العمودي على الضلع الآخر لهذه الزاوية، وذلك بتطبيق «القاعدة العادية». وتعادل هذه الطريقة استخدام مبرهنة جيوب التمام في الحالة المسطحة. انظر: **الأصول**، *II*، ص ١٢ ـ ١٣.

يتبع الكاتب نفس الخطة في كلا الفصلين: بيان المبرهنة الأساسية، البراهين المصنفة تبعاً لأنواعها، التعميم العرضي للنتائج لتشمل المثلث أياً كان، وعرض اللازمات. ويستخدم الكاتب، في الفصل السابع، العلاقات الأساسية الست المبينة بشكلها العام، لحل المثلثات القائمة الزاوية من جديد مستعيناً بصيغ الفصل الخامس أو بصيغ الفصل السادس. وهذه الصيغ التي أثبتها نصير الدين (للمثلث ABG القائم الزاوية في G) هي:

ـ (الفصل الخامس) العلاقة (I):

$$\frac{sin\ g}{R}=\frac{sin\ a}{sin\ A}$$

مع تعميمها على المثلث الاختياري، ولازمتيها أي العلاقة (III):

$$\frac{cos\ a}{cos\ g}=\frac{R}{cos\ b}$$

والعلاقة (V):

$$\frac{cos\ A}{cos\ a}=\frac{sin\ B}{R}$$

التي لها بديلتان هما الصيغتان (٣) و(٤) لأبي نصر.

ـ (الفصل السادس) العلاقة (II):

$$\frac{sin\ a}{R}=\frac{tan\ b}{tan\ B}$$

التي لا تقبل التعميم مثل العلاقة (I)، ولها لازمتان هما العلاقتان:

ـ (IV): $\frac{cot\ g}{cot\ b}=\frac{cos\ A}{R}$ و (VI): $\frac{cot\ A}{tan\ B}=\frac{cos\ g}{R}$، مع بيانين مشابهين للعلاقتين (٣) و(٤).

وينتهي الكتاب، في الفصل السابع، بحل المثلثات أياً كانت الذي يرجع إلى حل المثلثات القائمة الزوايا وإلى استخدام المثلث القطبي السابق الذكر. إن كتاب **رباعي الأضلاع** مركب بشكل رائع، ومن الواضح أنه يتناول موضوعاً كان قد أصبح تقليدياً في ذلك العصر. ونحن على علم بكتابين سابقين لكتاب نصير الدين، لهما نفس محتوياته ولكنهما أقلُّ إعداداً منه. أحد هذين الكتابين هو الكتابُ مجهول المؤلف، السابقُ الذكر، والآخر ذو نص قريب من كتاب **المقاليد** للبيروني. أما كتاب **مجهولات أقواس الكرة** لابن معاذ فلا يندرج في هذا السياق(٤٠).

تقابل الإعداد الجيد لـ **كتاب رباعي الأضلاع**، كتابة سريعة ومختصرة في كتاب ابن

(٤٠) انظر: M. V. Villuendas, *La Trigonometría europea en el siglo XI: Estudio de la obra de Ibn Mu'ādh: El Kitābmaŷhūlāt* (Barcelona: [n. pb.], 1979).

معاذ، وهذا ما يجعل التباين كبيراً بين الكتابين. تتسلسل الأفكار في كتاب ابن معاذ بشكل روائي، ولا يتردد الكاتب بالرجوع عند الحاجة إلى نقطة أساسية أو إلى نقطة سبق أن سقطت سهواً. إن الاكتشاف الحديث، لهذا الكتاب الصغير الطريف، يثير في الحقيقة تساؤلات يفوق عددها عدد الأجوبة التي يقدمها، وذلك فيما يخص مسألة انتقال علم المثلثات إلى الغرب، وهذه المسألة لم تزل غامضة.

ينتمي القاضي أبو عبد الله محمد بن معاذ الجياني (٩٨٩ ـ بعد ١٠٧٩م) إلى أسرة من رجال القانون في الأندلس. وقد أقام في شبابه في القاهرة (١٠١٢ ـ ١٠١٦م) حيث كان، على الأرجح، تلميذاً لابن الهيثم. وترك بعض الأعمال الجيدة التي جعلته يُعتبر، في إسبانيا، من أفضل الرياضيين في جيله. تُرجمت له عدة كتب إلى اللغة اللاتينية، ولكننا لا نجد ذكراً لتأثير كتاب **المجاهيل** الذي يختلف كثيراً عن المؤلفات الشرقية. كان الكثير من النصوص، الحاملة للتقنيات الجديدة في الحسابات الفلكية، متداولاً في بداية القرن الحادي عشر الميلادي. لقد كتب ابن معاذ كتابه مستنداً، على الأرجح، إلى معرفة جزئية بالتقدُم الذي حققه علماء الشرق الأوسط، ومعتمداً في تأمُلاته على كتاب **الأكر** لمنلاوس، وهو الكتاب الوحيد الذي ذكره في المراجع. وقد أثبتت فيه العلاقات الست للمثلث القائم الزاوية، انطلاقاً من مبرهنة منلاوس، واستخدم نفس الشكل لتعميم العلاقة (I) على المثلث أياً كان. وأُنجز حل المثلثات في عدد من الحالات وفقاً لعدد العناصر المجهولة التي وجب تحديدها، ونوقشت طبيعة القوس الذي يُحصل عليه استناداً إلى جيبه أو ظله. واستخدم المثلث القطبي في الحالة التي أعطيت فيها الزوايا الثلاث. ولم يستخدم ابن معاذ، في الجدول الذي وضعه لدالة الظل، كلمة «الظل». ويبدو أنه يعرف الظل، بشكل مختلف قليلاً عما رأيناه أعلاه، كـ «نسبة الجيب إلى جيب التمام» (أي أنه يتخذ الدالة tan بدلاً من الدالة $R.tan$). وهذا ما قام به ضمن حساب نعرضه فيما يلي.

إن السمة المشتركة لكل هذه المؤلفات هي الغياب الكامل تقريباً لحساب المثلثات في حالة السطح المستوي. فالحساب الضروري هو تحديد قوسين إذا أعطي مجموعهما، أو الفرق بينهما، مع نسبة جيبيهما. يعرض نصير الدين طريقتين لحل هذه المسألة، إحداهما مأخوذة من **المجسطي** وتستخدم فيها الأوتار، والأخرى منسوبة إلى أبي نصر، وتستخدم في كل منهما مبرهنة فيثاغورس. أما ابن معاذ فيضع المسألة، إذا أعطي الفرق بين القوسين، على الشكل التالي:

$$x - y = \alpha \text{ و } \sin x/\sin y = a/b$$

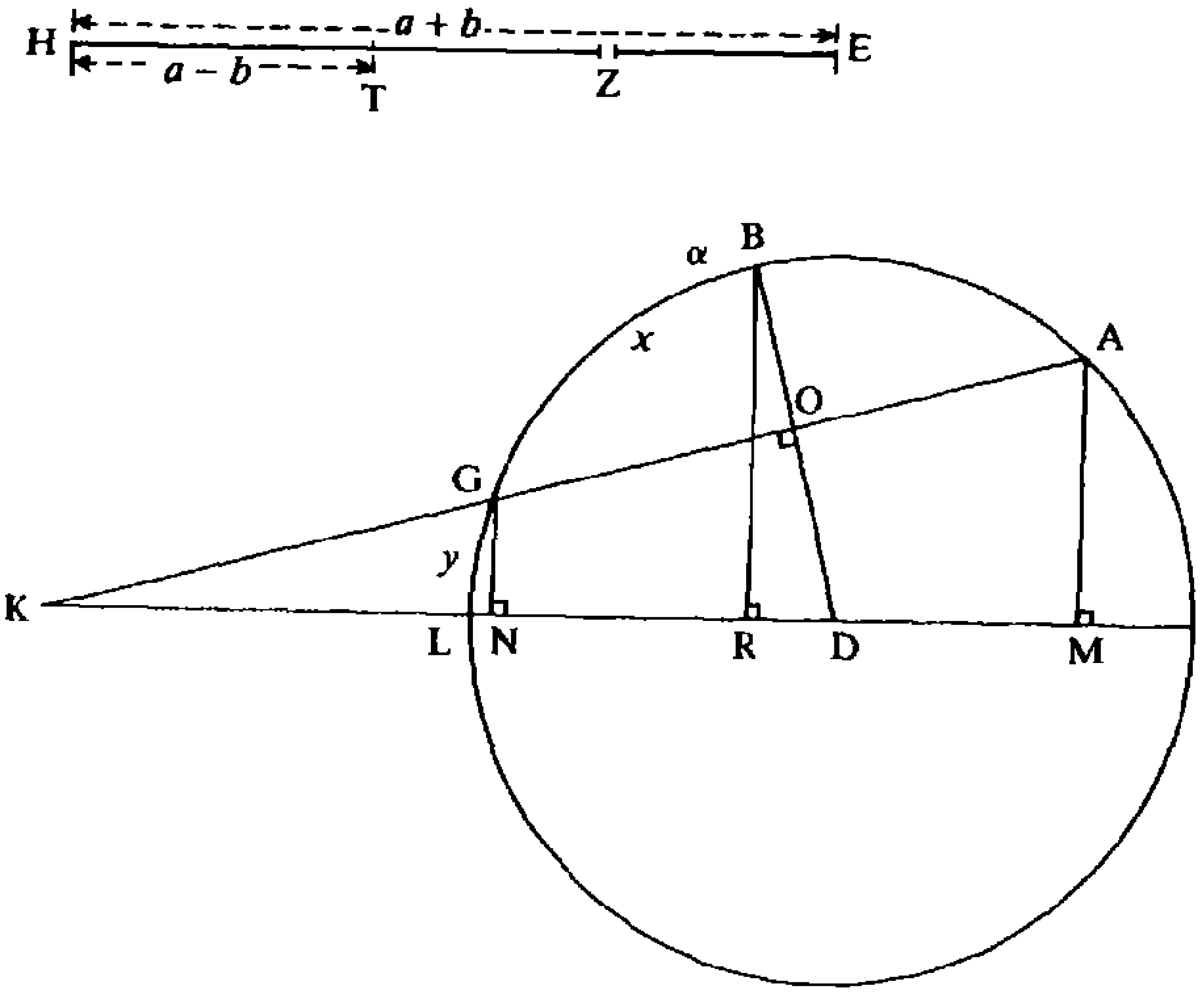
مع $a > b$ و$0° < \alpha < 180°$، ويكون القوسان المجهولان x وy محصورين بين $0°$ و$180°$. وبعد أن يثبت هندسياً أن لهذه المسألة حلاً واحداً، يعطي طريقة لإيجاده، ويشرح من ناحية أخرى سبب الاختيار $a \neq b$. ويدرس بعد ذلك الحالة الخاصة حيث $\alpha = 90°$ فيدخل الظل ويستنتج أخيراً، من الشكل، المعادلة:

$$\tan[(x+y)/2] = [(a+b)/(a-b)].\tan(\alpha/2)$$

التي تعطي x وy بعد حساب مجموعهما والفرق بينهما. إن طريقة ابن معاذ، المثيرة للاهتمام بحسابها النهائي، نموذجية في التقنيات التي تستخدمها. ومن هذه التقنيات، الإعداد الهندسي لطريقة الحساب، وعرض الحساب بطريقة مستقلة عن الشكل. ولا يحصل على الصيغة بتحويل النسبة:

$$(\sin x + \sin y)/(\sin x - \sin y)$$

بل بواسطة تشابهٍ، حيث يمثل الظل المطلوب نسبة ضلعي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية[٤١] (الشكل رقم (١٥ ـ ١٥)). هذا النوع من تطبيق حساب المثلثات يستعين بالمعنى الهندسي للجيب وللظل. ونحن نجده في مختلف النصوص، وخاصة في تلك التي يجري



الشكل رقم (١٥ ـ ١٥)

فيها تقدير المسافات. لقد ألف الكاشي في القرن الخامس عشر كتاب **مفتاح الحساب**، وهو ملخص لتقنيات الحساب يتضمن جدولاً صغيراً للجيوب لحل المثلثات المسطحة، وصيغاً مفيدة لقياس المساحات كالصيغة التالية:

$$r = b.g.\sin A/[60.(a + b + g)]$$

التي تعطي نصف قطر الدائرة المحوطة بالمثلث (ABG).

---

(٤١) يحدد ابن معاذ (الشكل رقم (١٥ ـ ١٥))، النقطة L التي تحقق $\widehat{LA} = x$ و $\widehat{LG} = y$ بواسطة $\widehat{AG} = \alpha$ ، ويحدد K التي تحقق $GK/GA = TZ/TH = b/(a-b)$، ثم يرسم KLD. فإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة $KO/OG = (a+b)/(a-b)$، فإن الصيغة المطلوبة تستنتج من $BR/RD = KO/OD$. انظر: المصدر نفسه، ص ١١ ـ ٢١ و ١٠٦ ـ ١١٢.

توجد صيغ علم المثلثات الأساسية الخاصة بالسطوح المستوية في الكتب الفلكية حيث تطبق في وضع جداول الجيوب. ويشكل الفصل الخامس من المقالة الأولى من كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء، مثلاً جيداً على ذلك. سنستخرج منه المقاطع الستة الأولى التي تتضمن التعاريف والصيغ. يعرّف أبو الوفاء في أول الأمر الخطوط المقطوعة: القطر، الوتر، الجيب «الممدود» أو الجيب، الجيب المنكوس أو «السهم»، جيب التمام (الذي نرمز له هنا بـ cos)، وتر الزاوية المكملة (أي $crd(180° - \alpha)$)، والجيب الأعظم (R)، حيث يكون $R = 60$. ثم يدرس على التوالي، بعد مقطع مخصص للجيوب وللأوتار المُنطقة، تحديد جيوب وأوتار الزوايا المكملة، حساب الجيب تبعاً للوتر وبالعكس، تحديد جيوب وأوتار أنصاف الزوايا وأضعافها، وتحديد جيب ووتر مجموع زاويتين وجيب ووتر الفرق بينهما. وهكذا طُبقت بعض الصيغ على حسابات عكسية. ولقد أثبتت هذه الصيغ جميعها هندسياً وأرفقت بأمثلة. وإذا جمعنا الصيغ المعادلة المستنتجة من نفس التركيب، نحصل على البيانات التالية:

(١) المقطع (٣):

(أ) $cos \quad \alpha = \sqrt{R^2 - sin^2\alpha}$ و $crd(180° - \alpha) = \sqrt{4R^2 - crd^2\alpha}$

(ب) $vers\ \alpha = R \pm cos\ \alpha\ (\alpha \lessgtr 90°)$

(ج) $\sqrt{vers\ \alpha(2.R - vers\ \alpha)} = sin\ \alpha$

(٢) المقطع (٤) وبداية المقطع (٥): $vers\alpha/crd\alpha = crd\alpha/2R$

و $(\frac{1}{2}vers\ \alpha)/[sin\ (\alpha/2)] = sin\ (\alpha/2)/R$،

و $[2R - crd(180° - \alpha)]/crd(\alpha/2) = crd(\alpha/2)/R$.

(٣) نهاية المقطع (٥): $crd\alpha/crd(\alpha/2) = crd(180° - \alpha/2)/R$

ومنها نحصل على $\frac{1}{2}\ sin\ (2\alpha) = sin\ \alpha.cos\ \alpha/R$.

(٤) المقطع (٦): أ ـ (١):

$sin\ (\alpha \pm \beta) = \sqrt{sin^2\alpha - sin^2\alpha.sin^2\beta/R^2} \pm \sqrt{sin^2\beta - sin^2\alpha.sin^2\beta/R^2}$،

أ ـ (٢): $sin\ (\alpha \pm \beta) = sin\ \alpha.cos\ \beta/R \pm sin\ \beta.cos\ \alpha/R$[٤٢].

ب ـ صيغتان مماثلتان للأوتار.

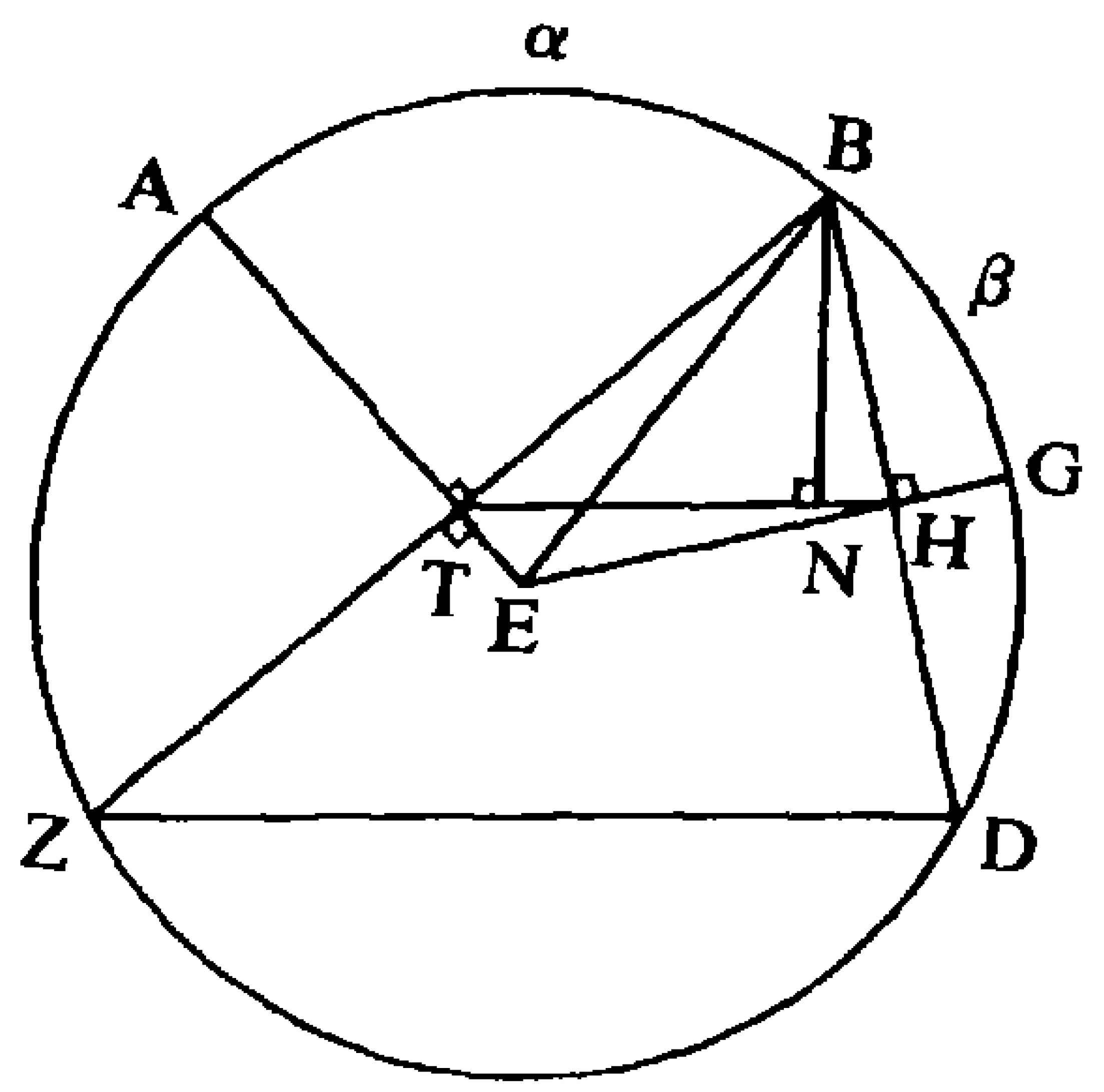
---

(٤٢) الشكل رقم (١٥ ـ ١٦)، مثلاً، هو أحد الأشكال الأربعة التي رسمها أبو الوفاء لهاتين الصيغتين (حالة المجموع حيث يكون $\overset{\frown}{AB}$ أي α و $\overset{\frown}{BG}$ أي β أصغر من $90°$):

$$TH = ZD/2 = crd(2\alpha + 2\beta)/2 = sin\ (\alpha + \beta).$$

التشابه بين المثلثين BNH وBTE يُعطي $NH/BH = TE/BE$؛ وبعد حساب مماثل لـ TN، نستنتج =

أما المقطع السابع فهو مخصص للأوتار «الأمهات»(٤٣)، بينما يهتم باقي الفصل بجدول الجيوب.



الشكل رقم (١٥ ـ ١٦)

إن عرض أبي الوفاء الجيد التنسيق، هو بالتأكيد موسع بشكل خاص ومثقل باستخدام الجيب المنكوس والوتر. هذه القواعد، المقتبسة من المجسطي، تعتبر في «الأزياج» كمجموعة مستقلة عن الفصل المخصص لـ «الظلال». فهي تشكل مثلاً أحد أبواب كتاب **الأوتار**(٤٤) للبيروني. هذا الكتاب الذي يغلب فيه الطابع الهندسي، مكرس لبعض المبرهنات الخاصة بالخط المنكسر المحوط بدائرة. ولقد تبنى البيروني، في كتاب **القانون**، التبسيط $R = 1$ الذي كان أبو الوفاء قد أشار إليه. إن غياب الأعداد السلبية قد حد من استخدام هذه الصيغ وعقده قليلاً. ولقد لعب الإبقاء على $R = 60$، الذي تم تبنيه بشكل عام والذي كان ملائما للجداول، دوراً مماثلاً ولكنه أقلّ أهمية من الدور الذي لعبه غياب الأعداد السلبية. وهكذا توفرت لدى الرياضيين العرب، مع دالة الظل وصياغة العلاقات الأساسية وإسهام التقنيات الجبرية، الأسس الضرورية لتطوير حساب المثلثات. ولكن أبحاثهم لم تتجه في هذا الطريق، وهذا مردُه من دون شك إلى لجوئهم إلى البرهان الهندسي الذي كان يعتبر ضرورياً. لقد اتجهت هذه الأبحاث نحو تحسين الجداول حيث يلتقي، تقريباً، الجبر مع حساب المثلثات.

٦ ـ جدول الجيوب

إن دقة الحساب الفلكي تستند، كلها، على صحة جدول الجيوب. وتركيب هذا الجدول مرتبط بمسألة شهيرة هي مسألة تثليث الزاوية. ولكن البحوث التي أجريت ابتداءً

= الصيغة الثانية. أما الصيغة الأولى فيتم الحصول عليها باستخدام $NH = \sqrt{BH^2 - BN^2}$ و $BN/BH = BT/BE$. ولقد أُثبتت صيغة جمع الأوتار، في كتاب **المجسطي**، بواسطة مبرهنة سميت بـ «مبرهنة بطلميوس».

(٤٣) هكذا سمى المؤلفون العرب أضلاع بعض المضلعات المنتظمة والمحوطة مثل المربع وسداسي الأضلاع... الخ. وذلك أن هذه الأضلاع تُستخدم في تركيب جداول الجيوب.

(٤٤) انظر: أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، **استخراج الأوتار في الدائرة**، نشر الدمرداش (القاهرة: المؤسسة المصرية العامة للتأليف والأنباء والنشر، ١٩٦٥)، و Heinrich Suter, «Das Buch von der Auffindung der Sehnen im Kreise,» *Bibliotheca Mathematica,* Bd. 3, no. 11 (1910-1911), pp. 11-78.

من القرن العاشر الميلادي، تندرج في الإطار الأشمل لحسابات المقاربة المطبقة على بعض فئات الأعداد الصماء. ولقد حلل المؤرخون هذه البحوث الدقيقة والحدسية أحياناً. وهي تثير الاهتمام بالوسائل التي استُخدمت فيها: تقنيات الاستكمال وطرائقها الحسابية. إن جداول «الأزياج»، بشكل عام، أكثر دقة من جدول الأوتار في **المجسطي**، ولكن هذه الدقة لا تبلغ حد دقة الجداول التي وضعت في أوروبا قبيل إدخال اللوغاريتم.

إن لجدول الأوتار في **المجسطي** ثلاث منزلات ستينية في حساب $sin\ (1°)$ وهو مدرج بأنصاف الدرجات. وهو مضبوط، ومن السهل التحقّق، بواسطة استكمال خطي، أنه يعطي قيمة القوس بخطأ لا يتجاوز بضع ثوانٍ، إلا بالقرب من $90°$، إذ يتعدى الخطأ الدقيقة حين يزيد القوس عن $89°;45$. وقد سبق أن عرفت الجداول الهندية في القرن التاسع الميلادي، ولكنها لم تقدم نفس الدرجة من المقاربة. إلا أن دقتها كانت تعتبر كافية. إن حبش الذي سبق أن رأيناه يتناول من جديد أغلب حسابات **المجسطي**، نقل دون تغيير جدول الأوتار، واستخرج منه جدولاً للجيوب بمدخل مدرج بأرباع درجات الأقواس، وأضاف إليه عموداً رابعاً مشكلاً من 0 ومن 30. وقد بسط البتاني هذا الجدول محتفظاً بمدخل مدرج بأنصاف الدرجات وحاذفاً أرقام المنزلة الرابعة. وليس لدينا أي نص يعلمنا عن بدء حساب جداول الجيوب قبل نهاية القرن العاشر الميلادي. وينسب التركيبان الأولان الأصيلان للجداول إلى ابن يونس وإلى أبي الوفاء، وقد استوحى ابن يونس تركيبه بشكل مباشر من طريقة من كتاب **المجسطي**. ولنذكر أن بطلميوس حدد وتر درجة واحدة، وذلك بحصره بين عددين، بفضل مبرهنة أُثبتت بمقارنة بين مساحتين. وتعبر هذه المبرهنة عن تناقص الدالة $sin\ x/x$ بين $0°$ و$90°$، على الشكل التالي:

$$a > b \Longrightarrow a/b > crd\ a/crd\ b$$

فتنتج عن ذلك المتباينة المزدوجة: $\frac{2}{3}.crd\ 1;30° < crd\ 1° < \frac{4}{3}.crd\ 0;\ 45°$، فنحصل بشكل تقريبي على:

$$\frac{2}{3}\ crd\ 1;\ 30° = crd\ 1° = \frac{4}{3}crd\ 0;\ 45° = 1;2,50.$$

أُجري حساب الوترين $1;30°$ و $0;45°$ انطلاقاً من أضلاع خماسي وسداسي الأضلاع منتظمين ومحوطين، واستناداً إلى الوتر $crd(72° - 60°)$ وإلى أربع تنصيفات. ويمكن لهذا الحساب، إذا أنجز بشكل أدق، أن يظهر فرقاً بين قيمتي الوترين. ويظهر بوضوح أن بطلميوس اختار، بعكس ذلك، طول الفسحة (ثلاثة أرباع الدرجة للوتر، أي ثلاثة أثمان للجيب)، بحيث يحصل على المعادلة بالدقة المطلوبة[٤٥].

(٤٥) يؤدي الحساب بخمس منزلات إلى: $1;2,49,48,13 < crd\ (1°) < 1;2,49,53,4$ علماً بأن $crd\ (1°) = 1;2,49,51,48$

إن لجدول الجيوب الذي وضعه ابن يونس في **الزيج الحاكمي**(٤٦) أربع منزلات ستينية، وهو مدرج بأسداس الدرجات. والطريقة المستخدمة فيه تثير الاهتمام فيما يخص صيغة الاستكمال التي تسمح بإتمام الجدول استناداً إلى المقادير المحسوبة بشكل منفصل بأنصاف الدرجات. وبصرف النظر عن هذا الجانب الذي سنتناوله لاحقاً، أدخل ابن يونس بعض التعديلات على حساب بطلميوس. فقد قصر أولاً، إلى النصف، طول الفسحة التي اختارها لـ$sin\ (1°)$. وأنجز الحسابات حتى المنزلة الخامسة، بواسطة أربع تنصيفات انطلاقاً من $sin\ (15°)$ $(= sin\ (45° - 30°))$ ومن $sin\ (18°)$ (نصف ضلع معشر الأضلاع) فحصل على:

$$\frac{8}{9} sin\ \frac{9°}{8} < sin\ 1° < \frac{16}{15} sin \frac{15°}{16}$$

أي:

$$1;2,49,40,4 < sin\ 1° < 1;2,49,45,10$$

فيستنتج بعد ذلك أول قيمة لـ:

$$sin\ (1°) = 1;2,49,40,4 + (2/3)\ (\text{الفرق}) = 1;2,49,43,28.$$

وهذا ما يوافق الاستكمال الخطي:

$$sin \frac{16°/16}{16/16} = sin\ \frac{18°/16}{18/16} + (2/3).\left[sin \frac{15°/16}{15/16} - sin \frac{18°/16}{18/16}\right].$$

ويُدخل، في النهاية، تصحيحاً طفيفاً على القيمة التي يحصل عليها، مستنداً إلى فكرة تقريبية مفادها أن الخطأ في حساب $sin\ (1°)$ يؤثر بنفس القدر على $sin\ 2.1°$ و $sin\ 3° - 1°$ ولكن باتجاهين متعاكسين. فيحصل، أخيراً على:

$$\begin{aligned} sin\ (1°) &= 1;2,49,43,28 - (1/2)[sin\ (2.1°) - sin\ (3° - 1°)] \\ &= 1;2,49,43,28 - (1/2).(2;5,38,18,0 - 2;5,38,17,12) \\ &= 1;2,49,43,4 \end{aligned}$$

(ونحن نعلم أن $sin\ (1°)$ يساوي، بست منزلات في حساب $sin\ (1°)$: $sin\ (1°) = 1;2,49,43,11,15$(٤٧).

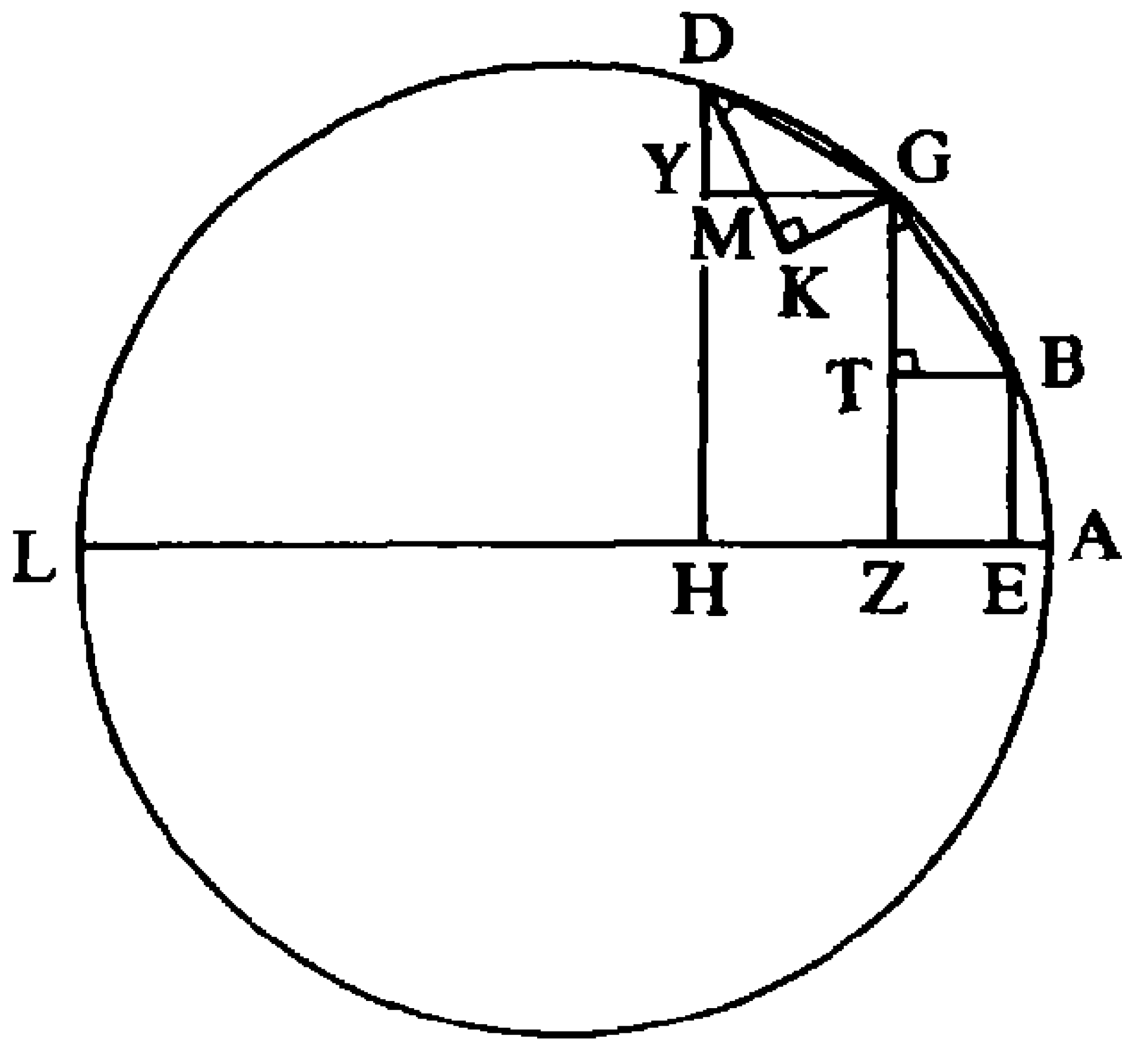
تسمح طريقة ابن يونس ببلوغ الدقة المطلوبة، ولكن بعض الأخطاء الحسابية البسيطة

---

(٤٦) انظر: David A. King, *Spherical Astronomy in Medieval Islam: The Ḥakimī Zīj of Ibn Yūnus* (Frankfurt), chap. 10.

(٤٧) يجب استبدال المعامل $(\frac{1}{2})$ في الحساب السابق بـ $(\frac{1}{3})$ فنحصل على $sin\ 1° = 1;2,49,43,12$. وإذا وضعنا $sin\ 2.1° - sin\ (3° - 1°) = R.f(a)$ واعتبرنا $a = sin\ 1°$ كعدد صغير، نرى بالفعل أن $f'(a)$ تعادل =

جعلت الجدول غير مضبوط تماماً، إذ إن الخطأ يتعدى، في بعض الأحيان، الوحدة في رقم المنزلة الرابعة.



الشكل رقم (١٥ ـ ١٧)

تختلف طريقة تحديد $sin\ (1°/2)$ التي يستخدمها أبو الوفاء(٤٨) عن تلك الواردة في المجسطي، وهي أكثر ملاءمة منها. فهو يستخدم أيضاً التناقص البطيء قرب $1°/2$ للفروق الأولى للجيب. يتضمن المجسطي جدولة للفروقات المقسومة على ثلاثين، وذلك لتسهيل قراءة الجدول بواسطة الاستكمال الخطي. وقد تحقق ثيون هندسياً، في كتابه شرح المجسطي، من تناقص الفروقات الأولى الذي ورد بوضوح في المجسطي. أما أبو الوفاء فقد أعطى برهاناً مختلفاً للجيب (انظر الشكل رقم (١٥ ـ ١٧)) حيث:

$$sin\ \widehat{AD} - sin\ \widehat{AG} < sin\ \widehat{AG} - sin\ \widehat{AB}$$

مع $DY < DM < DK = GT$.

ويستنتج من ذلك حصراً لـ $sin\ (1°/2)$، باختياره ثلاثة مقادير، لجيوب معروفة، قريبة من النقاط الموجودة على دائرة (الشكل رقم (١٥ ـ ١٨)):

$$\widehat{AB} = 3°/8 = 12°/32,\ \widehat{AG} = 9°/16 = 18°/32,\ \widehat{AZ} = 15°/32.$$

ويقسم القوس $\widehat{BG}$ إلى ستة أجزاء متساوية، والنقطة Z والنقطة H التي تحقق $\widehat{AH} = 1°/2 = 16°/32$، تابعتان لهذه التقسيمة. ويؤدي التطبيق المكرر للمبرهنة إلى المتباينة الثنائية:

$$(sin\ \widehat{AG} - sin\ \widehat{AZ})/3 < sin\ \widehat{AH} - sin\ \widehat{AZ}/3 < (sin\ \widehat{AZ} - sin\ \widehat{AB})/3$$

= $cos\ 3° + 2$ التي لا تختلف كثيراً عن 3. إن الخطأ المرتكب في حساب $sin\ 2.1°$ يساوي تقريباً ضعفي الخطأ المرتكب في حساب $sin\ (3° - 1°)$. إن الحساب الأول لابن يونس، بالإضافة إلى ذلك، غير مضبوط تماماً، إذ إن الحساب بخمس منزلات يُعطي:

$(8/9).sin\ (9/8°) = 1;2,49,40,8$ و $(16/15).sin\ (15/16°) = 1;2,49,44,34$.

يجب أن تكون القيمة الأولى، إذاً، مساوية لِ $1;2,49,43,5$ بدلاً من $1;2,49,43,28$.

(٤٨) Franz Woepcke, «Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux,» *Journal asiatique*, 5ème série, tome 15 (avril-mai 1860), pp. 281-320.

أي

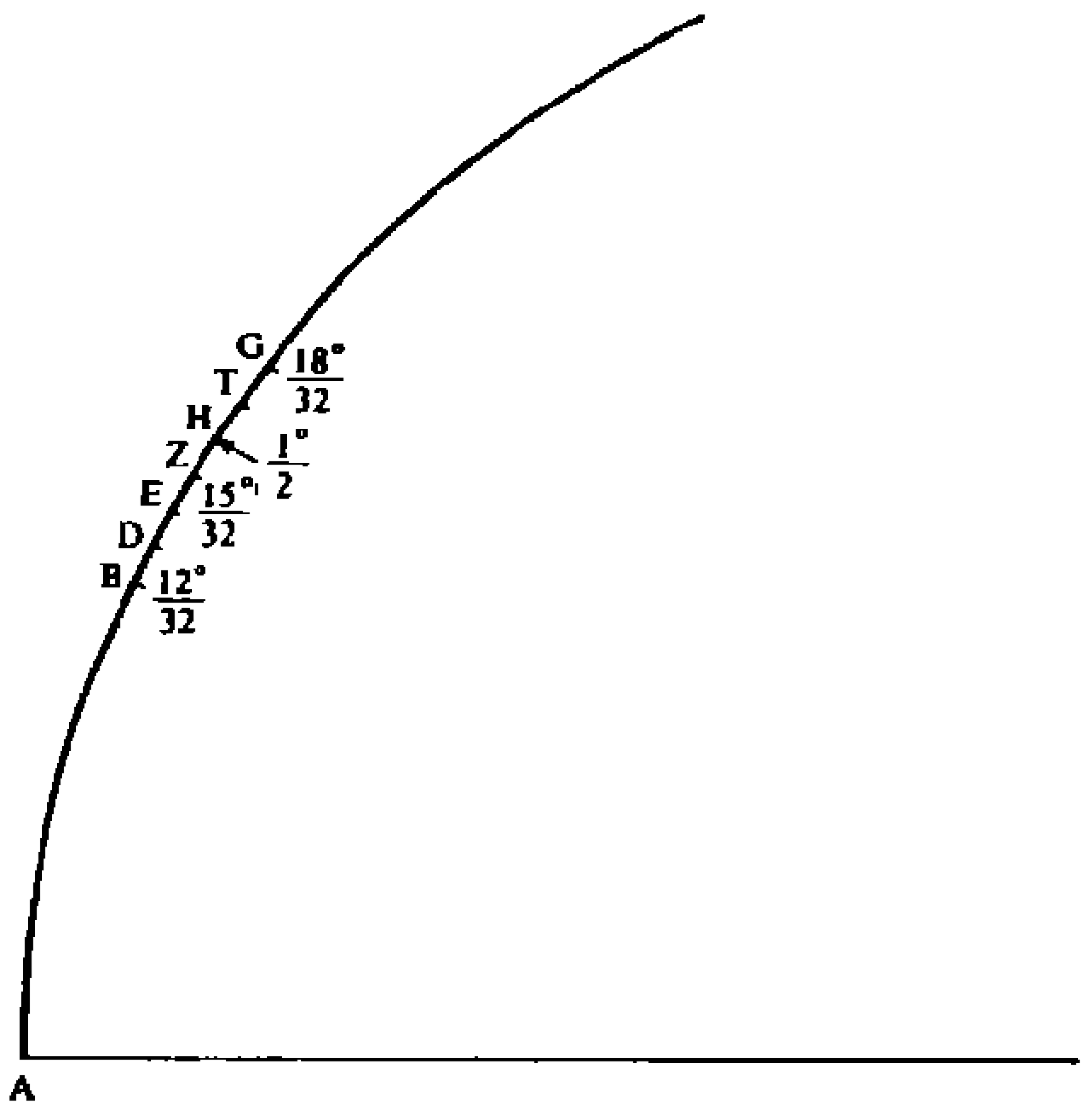
$$[sin\ (18°/32) - sin\ (15°/32)]/3 < sin\ (1°/2) - sin\ (15°/32) < [sin\ (15°/32) - sin\ (12°/32)]/3$$

وهكذا يحصل أبو الوفاء على:

$$0;31,24,55,52,2 < sin\ (1°/2) < 0;31,24,55,57,47$$

فيستنتج، آخذاً نصف مجموع طرفي هذه المتباينة الثنائية:

$$sin\ (1°/2) = 0;31,24,55,54,55.$$



الشكل رقم (١٥ ـ ١٨)

ليس هذا الحساب مضبوطاً بشكل كامل[٤٩]، ولكن هذه الطريقة تعطي حصراً لـ$sin\ (1°/2)$ دقة أكثر بست مرات من الذي تقدمه طريقة **المجسطي** المطبقة على نفس المقادير[٥٠]. ونحن نجدها في النصوص حتى نهاية القرن الخامس عشر الميلادي. فقد طبقها مثلاً، في حساب $sin\ (1°)$، محيي الدين المغربي (القرن الثالث عشر الميلادي)، وهو أحد علماء مراغة في زمن نصير الدين ومؤلف عدة دراسات في حساب المثلثات. يحتوي جدول الجيوب الوارد في كتاب **المجسطي** لأبي الوفاء على أربع منزلات، وهي مدرجة بأرباع الدرجات. ونجد نفس النموذج في الجدول الوارد في **القانون**، وهو بالفعل مضبوط. و**القانون** هو مؤلف ذائع الصيت للبيروني، وهو يعطي فكرة جيدة عن الدقة التي وصلت إليها حسابات المثلثات في ذلك الزمن. إن الدراسة الواردة في كتاب **القانون** تفتح، فيما يخص وضع جدول الجيوب، آفاقاً علمية أخرى. فإننا مع صيغة الاستكمال المثيرة للاهتمام، نبقى في إطار منهجي مماثل لما رأيناه أعلاه.

---

(٤٩) يجب بالأحرى، أن يكون معنا: $0;31,24,55,52,2 < sin\ (1/2°) < 0;31,24,55,57,47$.
والمقاربة التالية: $sin\ (1/2°) = 0;31,24,55,51,57 + (1/3).0;0,0,0,5,40 = 0;31,24,55,53,50$ هي الأفضل (مع العلم أن الحساب بست منزلات يعطي: $sin\ (1/2°) = 0;31,24,55,54,0$).

(٥٠) توصل الطريقة الواردة في المجسطي، في الفسحة $[15/32°, 18/32°]$ إلى النتيجة:
$$(8/9).sin\ (9/16°) = 0;31,24,55,31,8 < sin\ (1/2°) < 0;31,24,56,4,26 = (16/15).sin\ (15/132°)$$

يبدو أن البحث عن مقاربات أفضل من تلك التي يؤمنها الاستكمال الخطي، قد أثار بشكل ثابت اهتمام علماء الفلك العرب الذين اعتادوا في حساباتهم على استخدام عدد كبير من الجداول. إن لدينا الآن عدداً من الصيغ التي كانت مستخدمة في الفترة ما بين القرن العاشر والقرن الخامس عشر للميلاد[٥١]. والسؤال الذي يطرح نفسه هو: كيف تم تحضير هذه الصيغ دون الاستعانة بأي مفهوم للتمثيل البياني؟ ويمكن، بهذا الصدد، أن نعتبر القاعدة المستخدمة في **القانون** كمثلٍ على التركيب النظري للجداول. وهي معروضة أولاً لتركيب جدول الجيب وجدول الظلال ومعممة بعد ذلك لتركيب أي جدول آخر[٥٢]. وإذا استخدمنا الرموز المألوفة

$$\Delta y_{-1} = y_o - y_{-1}, \Delta y_o = y_1 - y_o, \ldots \Delta^2 y_{-1} = \Delta y_o - \Delta y_{-1}$$

(حيث يكون $x_o - x_{-1} = x_1 - x_o = \ldots = d$، فإن الصيغة التي استبدل بها البيروني الاستكمال الخطي: $y = y_o + (x - x_o).\Delta y_o/d$ في الفسحة $[x_o, x_1]$، هي[٥٣]:

$$y = y_o + \frac{(x - x_o)}{d}\left[\Delta y_{-1} + \frac{(x - x_o)}{d}.\Delta^2 y_{-1}\right]$$

ولقد حاول البيروني أن يثبت، بواسطة شكل، إمكانية التكرار البديهي لهذه الطريقة، وذلك ليفسر الاستكمال المطبق على Δy_{-1}. لقد حيرت هذه القاعدة، الواردة في القانون، المؤرخين. وذلك أن عبارة صحيحة للاستكمال التربيعي معادلةً لصيغة نيوتن من الدرجة الثانية، توجد في كتاب **خندخدياكا**. وهو الكتاب الذي عرفه البيروني جيداً واستشهد به غالباً في كتاباته[٥٤].

---

(٥١) انظر: Javad Hamadanizadeh, «The Interpolation Formulae of Islamic Mathematicians,» paper presented at: *Proceedings of the Second International Symposium for the History of Arabic Science* (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1979).

(٥٢) انظر: أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، **القانون المسعودي**، صحح عن النسخ القديمة الموجودة في المكاتب الشهيرة، تحت إعانة وزارة معارف الحكومة العالية الهندية، ٣ ج (حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف العثمانية، ١٩٥٤ - ١٩٥٦)، ج٣، بخاصة الفصلان السابع والثامن من المقالة الثالثة، المترجمان في:

Carl Schoy, *Die Trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abū'l Raiḥān Muḥ. Ibn Aḥmad al-Bīrūnī* (Hannover: H. Lafaire, 1927).

(٥٣) إذا تفحصنا الصيغة $y = y_0 + (x - x_0)[\Delta y_0 + [(x - x_0)/d - 1]\Delta^2_{y-1}]/d$، نرى أن المعامل $(\frac{1}{2})$ ينقص أمام العبارة $[(x - x_0)/d - 1]\Delta^2_{y-1}$، إذا أردنا أن يمر القطع المكافئ، الذي استبدل به البيروني الوتر الواصل بين النقطتين (x_0, y_0) و (x_1, y_1)، بنقطة ثالثة من المنحنى هي هنا (x_{-1}, y_{-1}). وهكذا يبقى الخطأ المرتكب في استخدام هذا الاستكمال، مساوياً تقريباً، مع إمكانية تغير الإشارة، للخطأ المرتكب في استخدام الاستكمال الخطي.

(٥٤) انظر: Edward Stewart Kennedy, «The Motivation of al-Bīrūnī's Second Order =

تسمح صيغة خنـدخدياكا الرائعة بالحصول على قيم مناسبة تقريباً، انطلاقاً من جدول بسيط يقتصر على ستة أعداد صحيحة(٥٥). وتكتب هذه الصيغة، تبعاً للرموز السابقة، كما يلي:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{d}.\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + x - x_0\ .\ \Delta y_0 - \Delta y_{-1}/2.d\right].$$

وهذا يرجع هندسياً إلى استبدال المنحني في الفسحة $[x_o, x_1]$ بقطع مكافىء يمرّ بالنقاط الثلاث ذات الإحداثيات (x_1, y_1) و(x_o, y_o) و (x_{-1}, y_{-1}). ولقد طبقت على حساب خطوط طول الكواكب، منذ بداية القرن العاشر الميلادي، صيغة أكثر إعداداً لنفس الاستكمال التربيعي تخصّ الفسحتين المتباينتين في الطول $[x_o, x_1]$ و $[x_{-1}, x_o]$(٥٦). وكانت هناك أيضاً صيغ أخرى. سوف نكتفي بعرض قاعدة ابن يونس للجيب. وهي تمكن من الحصول في الفسحة $[x_o, x_2]$ على القطع المكافىء الذي يمرّ بالنقاط الثلاث (x_2, y_2) و (x_1, y_1) و (x_o, y_o)، مع $x_o = n$، $x_1 = n + (1/2)$، $x_2 = n + 1$، حيث يكون n عدداً صحيحاً. ولا ننسى أن الجدول مدرج كما رأينا بأنصاف الدرجات. إن بيان هذه القاعدة يوضح، هنا أيضاً، الاستدلال المتبع. يصحح ابن يونس الاستكمال الخطي المنجز في الفسحة $[n, n + 1]$، بحد مساوٍ للصفر في طرفي الفسحة ويعطي هذا الاستكمال القيمة المضبوطة في وسط الفسحة. وتكتب هذه القاعدة رمزياً كما يلي:

$$sin\ x = sin\ n + (x - n).[sin\ (n + 1) - sin\ n] + 4.(x - n)(n + 1 - x)$$
$$[sin\ (n + 1/2) - (sin\ n + sin\ (n + 1))]/2$$

= Interpolation Scheme,» paper presented at: *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science.... 1976* (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1978), reprinted in: Kennedy [et al.], *Studies in the Islamic Exact Sciences,* and Roshdi Rashed, «As-Samaw'āl, al-Bīrūnī et Brahmagupta: Les Méthodes d'interpolation,» *Arabic Sciences and Philosophy,* vol. 1 (1991), pp. 101-160.

(٥٥) هذه الأعداد، التي يجب الأخذ بها، هي 39,36,31,24,15,5 . وهي تُمثِّل الفروق الأولية للدالة:

$$x \rightarrow 150\ .\ sin\ x$$

حيث تكون قيم x مساوية لأنصاف إشارات البروج، أي لـ:

$150.sin\ 15°$، $150.(sin\ 30° - sin\ 15°)$ ... و $150.(sin\ 90° - sin\ 75°)$

انظر: Brahmagupta, *The Khandakhādyaka: An Astronomical Treatise of Brahmagupta,* translated into english with an introduction, notes, illustrations and appendices by P. C. Sengupta (Calcutta: University of Calcutta, 1934),

بخاصة الفصل الأول، «جدول الجيوب»، المقطع ٣٠ والفصل التاسع، «صيغة الاستكمال»، المقطع ٨.

(٥٦) انظر: Javad Hamadanizadeh, «Interpolation Schemes in *Dustūr al-Munajjimīn,*» *Centaurus,* vol. 22, no. 1 (1978), pp. 43-52.

وهي تعادل أيضاً، مع الرموز السابقة و $\xi = (x - x_o)/d$، ومع $d = \frac{1}{2}$، الصيغة التالية:
$y = y_o + \xi \Delta y_o + \xi(\xi - 1)\Delta^2 y_o/2$، على الفسحة $[x_o, x_o + 2.d]$ (٥٧).

يعتبر **القانون المسعودي** من أهم الكتب التي حررها البيروني. وقد أهداه إلى السلطان الغزنوي الثاني مسعود بن محمود بن سُبُكتجين (Sebüktijin) (١٠٣٠ ـ ١٠٤٠م). وقد كتبه بعد إقامته في الهند، وكان عمره يناهز الستين عاماً. ويتعدى هذا الكتاب الإطار العادي لكتب علم الفلك، فهو ذو مستوى علمي رفيع ويحتوي على إحدى عشرة مقالة. المقالة الثالثة مكرسة لعلم المثلثات المسطحة والكروية، وتحتوي على عشرة فصول. أحد هذه الفصول مكرس لتحديد ضلع تساعي الأضلاع المنتظم (٥٨). توصل البيروني، بعد استخدامه لطريقتين هندسيتين مختلفتين، وبفضل **الجبر والمقابلة** إلى المعادلتين التاليتين:

$x^3 = 1 + 3.x$، التي تحققها النسبة $crd(80°)/crd(40°)$ (أي أن $x = 2.cos\ 20°$)،
و $x^3 + 1 = 3.x$، التي يحققها الوتر $crd(20°)$ (أي أن $x = 2.sin\ 10°$) (٥٩).

وهذا يعبر عن شكلين لمعادلة التثليث. وقد تطرق البيروني في الفصل التالي، وضمن هذا الإطار العام، إلى تحديد وتر درجة واحدة. وأرجع الحل الهندسي لمسألة تثليث زاوية اختيارية إلى حل اثني عشر مسألة تركيب. واختتم هذا الفصل بأربعة حسابات لوتر درجة واحدة، مستنداً في اثنين منها على ضلع تساعي الأضلاع. وقد تناول آخرون فكرة حل معادلة الدرجة الثالثة التي أثيرت في **القانون**. وتم حلُها بطريقة حسابية تكرارية.

إن طريقة تحديد لحظة الاقتران الحقيقي أو الظاهري للكواكب، كما وردت في كتاب **المجسطي**، تمثل هذا النوع نفسه من الطرائق الحسابية التكرارية. وتقدم النصوص الفلكية العربية أمثلة أخرى لهذه الطرائق. ويمكن أن نذكر منها بغية البقاء في مجال حساب المثلثات، الطريقة الثالثة الواردة في **القانون** لتحديد ضلع تساعي الأضلاع. وهي ترتكز على مقاربة وتر الأربعين درجة بالحد الحادي عشر للمتتالية:

$$crd(40° + 2°), crd(40° + \frac{2°}{4}, crd(40° + \frac{2°}{4^2}), \ \dots ,$$

---

(٥٧) تُكتب صيغة ابن يونس، بالمصطلحات المعروفة، كالآتي:
$y = y_0 + (x - x_0).(\Delta y_0 + \Delta y_1)/(2d) + 4[(x - x_0)/(2d)].[1 - (x - x_0)/(2d)](\Delta y_0 - \Delta y_1)/2$،
أي $y = y_0 - \xi(\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta y_0)/2 - 4.(\xi/2)(1 - \xi/2).\Delta^2 y_0/2$، وهذا ما يعطى الصيغة. انظر:
King, *Spherical Astronomy in Medieval Islam: The Ḥākimī Zīj of Ibn Yūnus.*

(٥٨) انظر: البيروني، **القانون المسعودي**، ج٣: **المقالة الثالثة من القانون المسعودي**، تحقيق إمام ابراهيم أحمد، مجموعة لجنة إحياء التراث الإسلامي (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٨٥)، الفصل ٣، و Schoy, *Die Trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abū'l Raiḥān Muḥ. Ibn Aḥmad al-Bīrūnī.*

(٥٩) كما لاحظنا سابقاً، لم يتم الحصول على هذه العلاقات انطلاقاً من صيغ الجمع. والتبسيط بـ **الجبر والمقابلة** يعني تبسيط المعادلات المبرهنة هندسياً، كالمعادلتين: $x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)^2$ و $2x - x^3 = 1 - x$.

التي تركب تبعاً لمبدأ الاستقراء، استناداً إلى صيغ الجمع بواسطة العلاقات:

$$crd\ u_o = crd\ (72^\circ - 30^\circ)\ ,$$
$$crd\ u_1 = crd\ (30^\circ + u_o/4)$$
....
$$...,\ crd\ u_n = crd\ (30^\circ + u_{n-1}/4)...$$

ويوجد في زيج حبش مثل مهم آخر حيث تُطرح المسألة بخصوص اختلاف المنظر. والمطلوب رياضياً في هذه المسألة هو إيجاد دالة استكمال في الفسحة $[0^\circ, 180^\circ]$، تساوي الصفر في طرفي الفسحة، وتبلغ حدها الأقصى k في النقطة $90^\circ - m$ الحائدة عن مركز الفسحة. وقد اتخذ حبش الدالة φ التالية: (١) $\varphi(t) = k.sin\ \ \theta$، حيث تعرف θ ضمنياً تبعاً للمتغير t بـ: (٢) $t = \theta - m.sin\ \theta$.

والدالة φ تحقق بوضوح الشروط المطلوبة، وتُحلّ المعادلة (٢)، بعد وضعها على الشكل التالي:

$$\theta = t + m.sin\ \theta,$$

بواسطة المتتالية (θ_n) المعرفة بـ: $\theta_o = t$، و $\theta_n = f(\theta_{n-1}) = t + m.sin\ (\theta_{n-1})$، التي تقترب، عندما يزيد العدد n إلى ما لا نهاية، نحو الحل المطلوب[٦٠]. لقد عرض هذا الحساب الذي أنجزه حبش، عدة مرات نظراً لبراعته ولأنه يُدخل المعادلة (٢) التي تعرف بـ«معادلة كبلر».

ولقد دُرست أيضاً، بشكل جيد، الطريقة الحسابية التي استخدمها الكاشي في حساب $sin\ (1^\circ)$[٦١]. وهي تطبق على معادلة للتثليث شبيهة بالمعادلات التي وردت في **القانون**. وتستخدم هذه الطريقة الحسابية، كما فعلت طريقة حبش، متتالية تحقق العلاقة: $u_n = f(u_{n-1})$. وتستخدم أيضاً تقنيات الجبريين كتلك التي تمكن من بسط عبارات من النوع التالي بواسطة جدول $(60x_{n-1} + q_n)^3 - (60x_{n-1})^3$، وذلك وفقاً للمعادلة التالية:

---

(٦٠) يأخذ حبش $\theta = \theta_5$. إن المقاربة مضمونة، وذلك أن m تساوي 24، مما يجعل العدد الإيجابي $(m.\pi/180)$ أصغر من 1. انظر: Edward Stewart Kennedy and W. R. Transue, «A Medieval Iterative Algorism,» *American Mathematical Monthly*, vol. 63, no. 2 (1956), pp. 80-83; and Edward Stewart Kennedy, «An Early Method of Successive Approximations,» *Centaurus*, vol. 13, nos. 3-4 (1969), pp. 248 - 250,

وقد نشرت المقالتان السابقتان في: Kennedy [et al.], *Studies in the Islamic Exact Sciences*.

(٦١) انظر بخاصة: Franz Woepcke, «Discussions de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°,» *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 19 (1854), pp. 153-176, and Asger Aaboe, «Al-Kāshī's Iteration Method for the Determination of sin 1°,» *Scripta Mathematica*, vol. 20, nos. 1-2 (March-June 1954), pp. 24-29.

$$(60x_{n-1}+q_n)^3-(60x_{n-1})^3=[(q_n+3.60x_{n-1}).q_n+(3.60)^2x_{n-1}^2].q_n.$$

إن غياث الدين جمشيد الكاشي، كما قلنا سابقاً، هو أحد أواخر كبار العلماء في الإسلام. شغل هذا العالم منصب مدير مرصد سمرقند المهم، في عهد السلطان ألغ بك. وبرز أيضاً كرياضي. لم تكن هذه الطريقة الحسابية معروفة إلا ضمن شرح للجداول الفلكية لألغ بك(٦٢). وهكذا تصعب معرفة مدى اقتباس الكاشي عمن سبقه. ولقد ورد في الشرح المذكور برهان هندسي يثبت فيه أن $sin\ (1°)$ هو حلٌ للمعادلة:

$$x=(x^3+15.60sin\ 3°)/45.60 \qquad (١)$$

ويُبحث عن المجهول x الذي يحقق المتباينة الثنائية: $1;2<x<1;3$، على الشكل التالي:

$$x=q_o+60^{-1}.q_1+...+60^{-n}q_n$$

أي أن x يُكتب بالنظام الستيني $x=q_o;q_1,...,q_n$، إذا افترضنا أن كل q_K أصغر من 60(٦٣). وتهدف الطريقة إلى تحديد الأعداد $q_o,q_1...,q_n$ بالتتابع بواسطة متتالية متقاربة، ويتقدم الحساب في كل مرة إلى الرقم التالي مع أخذ رقم إضافي للعدد $15.60sin\ 3°$ بعين الاعتبار.

وإذا رمزنا إلى حدود المتتالية بـ $x_o=q_o, x_1=q_o;q_1,...,x_k=q_o;q_1,...,q_k$ وبـ $[x]$ إلى الجزء الصحيح من العدد x في النظام الستيني، فإن حساب الكاشي يتتابع، بشكل أوضح، كما يلي: لنكتب انطلاقاً من المعادلة (١)، $x=(x^3+N)/D$ (مع $N=15.60sin\ 3°$ و $D=45.60$). نحصل في المرحلة الأولى على العدد q_o الذي يساوي الجزء الصحيح من N/D فنستنتج $x_o=q_o$. ثم نستخدم r_o باقي قسمة N على D، أي $r_o=N-D.q_0$، لنضع المعادلة (١) على الشكل:

$$x-x_o=(x^3+r_o)/D$$

ثم نحسب $q_1=(x_o^3+r_o)/(60^{-1}.D)$، فنحصل على $x_1=q_0;q_1=q_0+60^{-1}.q_1$، ونستنتج الباقي: $r_1=(x_0^3+r_0)-60^{-1}.Dq_1$ فتصبح المعادلة:

$$x-x_1=(x^3-x_o^3+r_1)/D$$

(٦٢) انظر: Louis Pierre Eugène Amélie Sédillot, *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oulough Beg*, 2 vols. in 1 (Paris: Firmin, 1847), pp. 77-83.

(٦٣) يستطيع القارئ أن يتحقق، استناداً إلى حساب q_k الوارد في الفقرة اللاحقة، من أن هذا الشرط غير مؤكد (لأن المتباينة $x<1;3$ تعطي فقط $q_k\leq 64$). وإن الحصول على $q_k>59$ ينتج من الحصول على رقم سابق أصغر من قيمته الحقيقية بـ 1، عندما نستبدل x^3 بـ x_{k-2}^3 في المعادلة التي تعطي q. ويصحح الخطأ تلقائياً في المرحلة التالية.

وهكذا تصبح المعادلة التي يجب حلها، في المرحلة ذات الرقم $(k+1)$، $(k+1)$ ،$x - x_{k-1} = (x^3 - x_{k-2}^3 + r_{k-1})/D,$ ومنها نحصل على:

$$q_k = (x_{k-1}^3 - x_{k-2}^3 + r_{k-1})/(60^{-k}.D)$$

ثم على $x_k = x_{k-1} + 60^{-k}.q_k$ وعلى $r_k = (x_{k-1}^3 + x_{k-2}^3 + r_{k-1}) - 60^{-k}.Dq_k$. ويكتفي الشارح بذكر حساب أعداد المنزلات الخمس الأولى انطلاقاً من قيمة صحيحة بثماني منزلات لـ $sin\ (3°)$. ويقول إن الكاشي حدد أعداد المنزلات العشر الأولى $sin\ (1°)$. ويمكننا أخذ فكرة عن جودة حساباته في مؤلف آخر مشهور وهو **الرسالة المحيطية**. وهذا المؤلف مكرس لتحديد العدد π بطريقة مختلفة عن طريقة أرخميدس، حيث يكون π حداً للمتتالية:

$$3.2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2} + 1}}}$$

وهكذا يحصل الكاشي تماماً على أعداد المنزلات العشر الأولى في النظام الستيني لـ π، مستخدماً طريقة مناسبة لتحديد الخطأ(٦٤). إن جدول الجيوب في كتابه **الزيج الخاقاني**، مدرج بدقائق الأقواس وأعداده صحيحة في المنزلات الأربع الأولى(٦٥). إن دقة الحساب العددي التي أهملت من قبل علماء الفلك في القرنين التاسع والعاشر للميلاد، تميز هذه الفترة الأخيرة الممثلة بمدرسة سمرقند. ولقد استفادت من التقدم الذي حصل في الجبر ومن أعمال الرياضيين وبخاصة مثل السموأل المغربي وشرف الدين الطوسي.

وقد يكون من المبالغة القولُ بعدم وجود شيء في علم المثلثات قبل القرن التاسع الميلادي. فمفهوم الجيب هندي والأسس عائدة إلى العصر اليوناني مع جدول الأوتار ومبرهنة منلاوس الكروية. ولكن العلماء العرب استخدموا هذه المكتسبات وحولوها إلى علم مرمّز، وهذا ما تمثل في كتاب **رباعي الأضلاع**. وتحولت، بين أيديهم، حسابات **المجسطي** الهندسية بواسطة جدول الأوتار، إلى أداة ذات مرونة فريدة. وتطورت تقنيات أخرى عديدة للحساب الفلكي، مثل استخدام الدالات المساعدة والاستكمال والطرق

---

(٦٤) ترتكز هذه الطريقة على حساب الضلع C_n لمضلع منتظم محوط ذي 3.2^n ضلعاً بواسطة العلاقة: $c_n = \sqrt{4.R^2 - u_n^2}$، حيث $u_n = crd(180° - 120°/2^n)$، مع $u_0 = R$ و $u_n = \sqrt{R.(2.R + u_n^2}$. يحدد الكاشي أولاً عدد التنصيفات، n، المناسب لبلوغ الدقة الحسابية المطلوبة. وهكذا يجد $n = 28$ و $2\pi R = 6, 16; 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50$. وهذا ما يعطي بعد التحويل إلى النظام العشري، $2\pi = 6,2831853071795865$. انظر: Paul Luckey, «Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamshīd b. Mas'ūd al-Kāshī,» *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Bd. 6 (1950).

(٦٥) انظر: Javad Hamadanizadeh, «The Trigonometric Tables of al-Kāshī in His *Zīj-i Khāqānī*,» *Historia Mathematica*, vol. 7 (1980), pp. 38-45.

الحسابية التكرارية. إن دالة الظل والعلاقات الأولى في المثلث ومفهوم المثلث القطبي، من بين المكتسبات العلمية في تلك الحقبة. ونحن نجد ثانية، في هذا المجال الخاص المتشعب من النشاطات الفلكية، النهج الخاص للرياضيين العرب. فقد قاموا بقراءة متجددة دون انقطاع ومغتنية بالنصوص القديمة ومصححة لها. وهكذا استطاعوا تكوين علم جديد كانت تلزمه بعض التطوُرات قبل أن يصبح عنصراً لا غنى عنه في الحساب الرياضي.

ـ ١٦ ـ
تأثير الرياضيات العربية في الغرب في القرون الوسطى

أندريه آلار(*)

ومرة أخرى يستحق أن يذكر البونُ الهام الذي يفصل بين الأعمال العربية في الرياضيات ومعرفة الغرب بها في القرون الوسطى. وإذا استثنينا المخطوطة اللاتينية الوحيدة التي تشهد منذ العام ٩٧٦م على الأرقام الهندية العربية(١)، وكذلك على إسهام جيربير دورياك (Gerbert d'Aurillac) وخلفائه في حقل «العدادات» الحسابية(٢)، فلا شيء يظهر في المؤلفات اللاتينية السابقة للقرن الثاني عشر للميلاد، من الأعمال العربية العديدة التي أعدت خلال الفترة الممتدة من الربع الأول من القرن التاسع للميلاد في عصر الخوارزمي حتى الربع الثاني للقرن الثاني عشر للميلاد، بعد وفاة الخيام (١١٢٣م) بزمن قصير. ونعلم من جهة أخرى ومنذ بروز كتاب هاسكنز (Haskins): **دراسات في تاريخ العلوم في القرون الوسطى** *Studies in the History of Mediaeval Science* أن تأثير العلم العربي في الأعمال اللاتينية لم يظهر في الواقع قبل النصف الثاني من القرن الحادي عشر للميلاد. وصحيح أن هذا الظهور اقتصر على مؤلفات ألفانوس دو سالرن (Alfanus de Salerne) أو خاصة

(*) المؤسسة الوطنية للبحث العلمي (FNRS) البلجيكية، لوفان ـ بلجيكا.

قام بترجمة هذا الفصل منى غانم وعطا جبور.

(١) *Codex Vigilianus* من الاسكوريال (Escurial)، كُتب في دير Albelda (البلدة) الإسباني المستعرب في وادي الإبر (Ebre) أيام السيطرة الإسلامية. انظر: David Eugene Smith and Louis Charles Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston; London: Ginn and Co., 1911), pp. 137-139.

(٢) وهي آلات حسابية عرفت في الغرب بالـ «Abaques». (المترجم).

قسطنطين الأفريقي (Constantin l'Africain) وتلميذيه أتو ويوهانس أفلاسيوس (Atto & Iohannes Afflacius) في مجال الطب[٣]. ولكنه مع ذلك كان من المؤشرات الأولى التي عبرت عن اهتمام بالعلوم الشرقية التي عرفت أولى فترات ازدهارها في الترجمات العديدة في القرن الثاني عشر للميلاد. وحتى لو سلمنا بأن عبارة «النهضة» (Renaissance) التي استخدمت، منذ هاسكنز للدلالة على هذه الفترة، لها ما يبررها، فإن المعرفة المجتزأة للعديد من النصوص المتعلقة بالعلوم الدقيقة، لم تمكن مؤرخي علوم فترة القرن الثاني عشر سوى من صياغة مجموعة من التساؤلات أو من إطلاق بعض الفرضيات غير المؤكدة تماماً اليوم. إن دراسة عدد من النصوص الأولى، التي تكشف عن التأثير العربي في القرن الثاني عشر للميلاد، تسمح بمقاربة وبمعالجة أكثر دقة لهذا الموضوع كما تمكن من المراجعة الحذرة لبعض الآراء التي سُلم بها واعتُبرت أكيدة نتيجة لبعض التسرع. ولا بد هنا من الإشارة إلى ندرة النصوص العربية المكتوبة بين القرن التاسع والثاني عشر التي تم نشرها حديثاً. هذا النقص يتناول بشكل خاص النصوص المتعلقة بعلم الحساب والمذكورة مثلاً في أعمال ابن النديم أو القفطي. ولهذا السبب انطوت معرفتنا بمصادر المترجين اللاتين الأوائل على ثغرات جدية. ونحن، إذ لا نقدم هنا وصفاً دقيقاً لكل من أعمال القرون الوسطى التي يظهر فيها التأثير العربي، فسوف نشدد على المراحل الأولى ـ المجهولة غالباً ـ للتعرف الغربي البطيء على علوم الحساب والهندسة والجبر، كما سنشدد على الأعمال اللاتينية اللاحقة الأكثر أهمية في هذه المجالات.

أولاً: علم الحساب «الهندي» والصيغ اللاتينية الأولى لعلم الحساب العربي

على أثر انحطاط الإمبراطورية الرومانية، وجد علماء القرون الوسطى أنفسهم مضطرين للاستيحاء من المؤلفات المحدودة في علم الحساب العملي أو حتى في الحساب الإصبعي، ذلك ما أملاه غياب المصادر الأخرى التي من شأنها حفظ الإرث العلمي القديم. تدل على هذا الواقع مؤلفات مثل: كتاب *De Nuptiis Philologiae et Mercurii* لمارتيانوس كابللا (Martianus Capella) (عام ٤٠٠م)، وكتاب *De Institutione arithmética*

---

(٣) انظر بهذا الشأن: Fuat Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, 8 vols. (Leiden: E. J. Brill, 1967-1982), especially vol. 3: *Medizin*, pp. 266, 295-297 and 304-307; H. Schipperges, «Die Assimilation der Arabischen Medizin durch das Lateinische Mittelalter,» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, Bd. 3 (1964), pp. 17-54.

وعدة مقالات لـ ر. كروتز (R. Creutz)، في: *Studien und Mitteilungen zur Geschichte der Benediktiner-Ordens und seiner Zweige*, especially vol. 47 (1929), pp. 1-44; vol. 48 (1930), pp. 301-324, and vol. 50 (1932), pp. 420-442.

لبُويس (Boèce) (ت ٥٢٤/٥٢٥م)، وكتاب *Les Etymologiae* لإيزيدور الإشبيلي (Isodore de Séville) (ت ٦٣٦م) وبشكل خاص القسم من مؤلف بيد الموقر (Bède le Vénérable) (ت ٧٣٥م) الذي يحمل العنوان *Loquela per gestum digitorum*؛ كل هذه المؤلفات شكلت القاعدة الأساس لعلم حساب بقي بدائياً. وهكذا، فإن كتاب ألكوين (Alcuin) (ت ٨٠٤م) *Propositiones ad acuendos juvenes* وهو من المؤلفات الأوسع شهرة في أوائل القرون الوسطى لا يشكل سوى سلسلة من مسائل تقليدية بسيطة مثل تلك التي تتعلق بعمر ولد أو بسعة حوض. وتشهد على استمرار طرح مثل هذه المسائل البسيطة مؤلفات مثل كتاب يوحنا الطليطلي (Jean de Tolède)[٤] (حوالى ١١٤٣م) حيث نجد مثلاً مسألة سن يمكن التعبير عنها بمعادلة مكافئة للتالية[٥]:

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 100$$

وفي كتاب فيبوناتشي (Fibonacci) (١٢٠٢) ذي العنوان *Liber abaci* نجد مسألة «De iuuenis uita reperienda» التي يمكن التعبير عنها بالمعادلة[٦]:

$$3x + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 100$$

وأخيراً، نجد مثل هذه المسائل البدائية في مؤلف كلاڤيوس (Clavius) (ت ١٦١٢م) وحتى في مؤلفات لاحقة. وحسب شهادة غليوم دو مالمسبوري (Guillaume de Malmesbury) فإن جيربير دورياك (Gerbert d'Aurillac) (ت ١٠٠٣م) هو صاحب الفضل باقتباس الآلة الحسابية المسماة «Abaque» عن عرب الأندلس. وهي آلة ذات أعمدة تنتقل عليها فِيَش (apices) مرقمة أو غير مرقمة[٧].

---

(٤) انظر لاحقاً الخلط المغلوط بين هذا المؤلف والمترجم يوحنا الإشبيلي (Jean de Séville).

(٥) انظر: Baldassare Boncompagni-Ludovisi, *Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice*, Trattati d'aritmetica; II (Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857), p. 118.

(٦) Baldassare Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi* (Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857-1862), vol. I, p. 177.

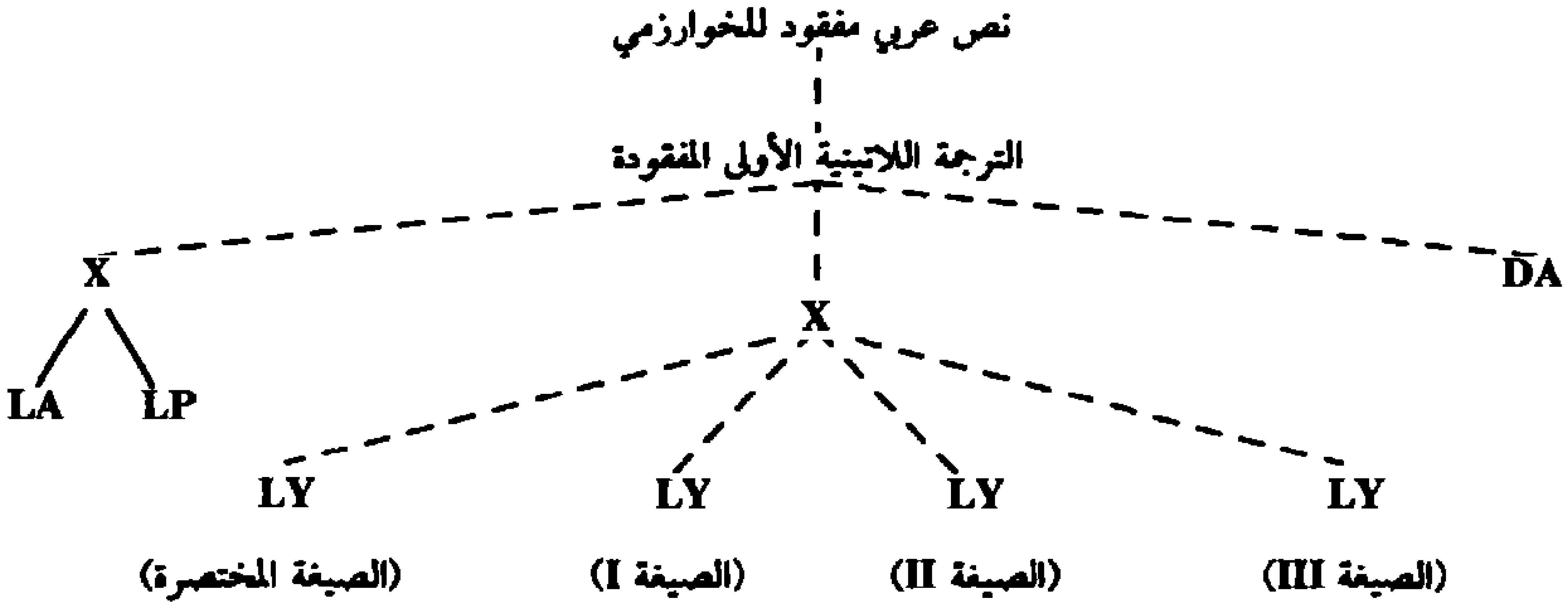
(٧) نحن لا نعتقد مع ذلك أن الأرقام الهندية - العربية قد انتشرت في الغرب عن طريق فيتش الجداول الحسابية، إنما قبلها بواسطة مخطوطات الحساب الهندي. في هذا الموضوع انظر ما جاء في فصلنا لاحقاً، وانظر أيضاً: Guy Beaujouan, «Etude paléographique sur la «rotation» des chiffres et l'emploi des apices du X[e] au XII[e] siècle,» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 1 (1948), pp. 301-313. لنسجل أن جيربير (Gerbert) أتى مرتين على ذكر كتيب مفقود اليوم *De multiplicatione et Diuisione* لجوزيف لوساج Joseph le Sage (Joseph Hispanus). يكتفي المؤلف دون شك بوصف العمليتين الأصعب عن طريق الجداول الحسابية (Abaque).

غير أن أول إسهام علمي عربي رئيسي في تكوين العدة الرياضية في العلم الغربي ابتداءً من القرن الثاني عشر كان الحساب الهندي، أي علم الحساب الوضعي الذي يستخدم الأرقام التسعة إضافة إلى الصفر.

ففي حوالى العام ٨٢٥م، كتب محمد بن موسى الخوارزمي، أحد أبرز أعضاء «بيت الحكمة» في بغداد مؤلفين في علم الحساب، إلا أنهما قد فقدا بلغتهما الأصلية وهي العربية[٨]، وكان قد سبقهما بكتابه الشهير عن الجبر. وتعكس نصوص لاتينية عديدة من القرن الثاني عشر للميلاد صيغاً مختلفة لعلم الحساب هذا نجدها في حوالى أربع وعشرين مخطوطة محفوظة إلى يومنا[٩]:

- *Dixit algorizmi*، ونختصره بـ *DA*.
- *Liber Ysagogarum Alchoarismi* (ونختصره بـ *LY* ويوجد منه أربع صيغ إحداها مختصرة).
- *Liber Alchorismi (LA)*.
- *Liber Pulueris (LP)*.

وبصرف النظر عن الروابط بين هذه المخطوطات[١٠]، نستطيع أن نلخص العلاقات بين النصوص المذكورة بالطريقة التالية:



---

(٨) عن الاسم الحقيقي للمؤلف العربي ومحتوى مؤلفه في الجبر، انظر: Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, collection sciences et philosophie arabes (Paris: Les Belles lettres, 1984), pp. 17-29.
كان للخوارزمي بالفعل مؤلفان في علم الحساب والإثنان مفقودان: أحدهما مكرس تماماً للحساب الهندي (الحساب الهندي)، والآخر، وقد أتى على ذكره أبو كامل، كان يعالج بالتأكيد مسائل حسابية (كتاب الجمع والتفريق).

(٩) تم نشر وترجمة جميع هذه الصيغ، في: André Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarīzmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle* (Paris; Namur: [s. n.], 1992), pp. 1 - 224.

(١٠) يظهر تاريخ مفصل في مقدمة أندريه آلار، في: المصدر نفسه.

عُرف النص *DA* جيداً على أثر طبعه مرات متتالية(١١). ويعتبر هذا النص بالإجماع، على الرغم من كونه جزئياً ومحتوىً في مخطوطة واحدة، الترجمة الأقدم الصادرة عن النص العربي المفقود للخوارزمي(١٢)؛ وتشهد عدة أدلة لصالح هذا الافتراض وهي:

- بداية النص وهو دعاء يشبه إلى حد بعيد التوسل التقليدي الذي يتصدر النصوص العربية(١٣)؛

- الرجوع ثلاث مرات إلى أعمال الخوارزمي(١٤)؛

- الإشارة مرتين إلى الأصل الهندي للحساب الوضعي(١٥)؛

- الإشارة إلى المؤلف الجبري للخوارزمي بتعابير ليست بالضبط تلك التي نجدها في الترجمات اللاتينية المعروفة لهذا الجبر على الرغم من التشابه الكبير معها؛

- أخيراً وجود عبارات أو تعابير غير مألوفة باللغة اللاتينية تظهر الأصل العربي مثل «diuidere super» (diviser par) (قسم على) بدل «diuidere per» أو «in» (في)، و «exitus» (مخرج) بدل «dénominatio» (dénominateur). . . .

ويحتوي النص على وصف دقيق للعمليات الأساسية المستعملة تقليدياً على الأعداد الصحيحة (جمع، طرح، توسط، نسخ، ضرب، قسمة)(١٦). وكذلك يحتوي النص على اعتبارات تتعلق بالكسور الستينية المنسوبة هي أيضاً إلى الهنود والمعتبرة كحالة خاصة من الكسور العادية. ولا بد أن يكون الفصل المتعلق باستخراج الجذر التربيعي قد احتل قسماً

---

(١١) انظر: Baldassare Boncompagni-Ludovisi, *Algoritmi de numero Indorum*, Trattati d'aritmetica; I (Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857); Kurt Vogel, *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das Früheste Lehrbuch zum Rechnen mit Indischen Ziffern* (Aalen: Otto Zeller Verlagsbuchhandlung, 1963); M. A Youschkevitch, «Über ein Werk des Abū 'Abdallah Muhammad Ibn Musa al-Huwarizmi al Magusi zur Arithmetik der Inder,» in: *Schriftenreihe für Geschichte des Naturwissenschaftlichen Technik und Medizin*, Beiheft z. 60 Geburtstag v. G. Harig (Leipzig: [n. pb.], 1964), pp. 21-63, and Allard, Ibid.

وبداية النص ظهرت قبلاً عند: James Orchard Halliwell-Phillips, *Rara Mathematica* (London: J. W. Parker, 1841), p. 73, note (3).

(١٢) نلاحظ مع ذلك، أن نقل مخطوطة كامبريدج (University Library Ii. 6.5) والمؤرخة تقليدياً في القرن الثاني عشر للميلاد وأحياناً في القرن الرابع عشر، قد تم، على ما يبدو، حوالى العام ١١٥٠، حسب أعمال حديثة جارية لـ ر. تومسون (R. Thomson).

(١٣) Allard, Ibid., p. 1.

(١٤) المصدر نفسه، ص ١، ١ و١٢؛ ٢، ١١.

(١٥) المصدر نفسه، ص ١، ١٢؛ ٢، ٢٣.

(١٦) غير أن الترتيب في عرض هذه العمليات ليس متشابهاً في جميع النسخات اللاتينية.

لاحقاً من هذا النص (وهو نص لم يزل غير مكتمل). فقد حوت كل الطبعات اللاتينية مثل هذا الفصل بعد الفصل المكرس للكسور. ولكن يبدو جلياً أن مخطوطة كامبريدج تحتوي على ثغرات تمنعنا من النظر إلى DA على أنه المرجع الوحيد الأقرب إلى الأصل العربي المفقود، كما تمنعنا من اعتبار الصيغ الأخرى كصيغ لاتينية معدلة من DA، ذات صدقية هشة وذات محتوىً قد خضع فقط للزيادة. هذا ما تظهره بشكل خاص عملية طرح الأعداد التي يمكن تقسيم مختلف مراحلها (حسبما تدل عليه مقارنة مختلف الطبعات) إلى عدد من العمليات والتعليمات[١٧]؛ فالعملية الخامسة، التي تملي كتابة الصفر عندما يكون حاصل الطرح منعدماً، غائبة قطعياً عن النص DA، ولكن باستطاعتنا التكهن بسهولة أن المؤلف أخذها بعين الاعتبار لأنه اقترح المثل عن عددٍ «لا يبقى منه شيء في مواضعه»[١٨]. وبالفعل، فبطرحنا ١٤٤ من ١١٤٤ تصبح كتابة الأصفار ضرورية: وهذا قد طبق دون شك في قسم ضائع[١٩]. ونجد مثلاً ثالثاً لم نعرف بالضبط ما رمى المؤلف من ورائه[٢٠]، حيث لا بد أن يكون المقصود (كما في الـ LA) الدلالة على كيفية العمل عندما يحتوي العدد الأكبر، الذي نطرح منه، على أصفار. ولا بد أن تكون كلتا طريقتي البرهان (البرهان بالجمع أو «بواسطة التسعة» الموجودة في الـ LA والـ LP) مذكورتين في القسم المفقود. فمن المناسب، إذاً، ألا ننظر إلى الـ DA على أنه الصيغة الوحيدة التي ينبغي اعتبارها الأقرب من نص الخوارزمي الأصلي[٢١]. وسوف نرى، إضافة إلى ما ذكرنا، أن تأثير علم الحساب اللاتيني التقليدي، الغريب عن التأثير العربي، ليس غائباً عن هذا النص؛ ولكن ذلك لا يحجب كون الـ DA قد حوى في بعض نقاطه إرثاً غائباً في النصوص الأخرى، من غير الممكن تجاهله. فنجد فيه اقتراحاً بقراءة العدد: 1180703051492863 بتجزئته إلى عددٍ معين من «المتتاليات» (Uices) والتي تسمح بالتحديد السهل لمواقع قوى الألف بطريقة تشبه طريقتنا في استعمال الأسس:

---

(١٧) انظر: André Allard, «A Propos d'un algorisme latin de Frankenthal: Une méthode de recherche,» *Janus*, vol. 45 (1978), pp. 119-141.

نذكر أن بدء العملية من اليمين في الـ Ly (car. 6) هو عمل أبي منصور فحسب. فلم يعرف كوشيار بن لبان والإقليدسي والنسوي كما DA وLP إلا البدء من الشمال (car.7)، بينما يقترح الطوسي، كما LA، الطريقتين مع تفضيل للبدء من الشمال.

(١٨) انظر: Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarīzmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*, pp. 8, 30 - 31.

(١٩) المصدر نفسه، ص ٩، ١٠.

(٢٠) المصدر نفسه، ص ٨، ٨: *tribus modis*.

(٢١) إن هذا التفوق للـ DA وحتى التأكيد على أنها ترجمة لاتينية لمؤلَّف الخوارزمي، لا يزال يظهر حتى عند أفضل المؤلفين؛ وفي الواقع يعود إلى الثقة بأمر متعارف على القبول به ضلله السياق العام للنص. انظر مثلاً: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 9.

(1000^5)	(1000^4)	(1000^3)	(1000^2)	(1000)	
5 *uices*	4 *uices*	3 *uices*	2 *uices*		
1	180	703	051	492	863

وهذه الطريقة في القراءة، وكذلك كلمة «*uices*» لا تظهر في أي من النصوص اللاتينية المذكورة[٢٢].

بينما كان شال (Chasles) منذ العام ١٨٣٧م يعارض الفكرة التي تقول بأن الـ *Liber abaci* لفيبوناتشي كان أول عمل يُدخل إلى الغرب الحساب الهندي الموروث عن العرب[٢٣]، كان ليبري (Libri) (١٨٣٨م) يدعم، وبشكل حازم، الرأي السابق، غير أنه كان يذكر وجود مخطوطة في باريس تحتوي على كتاب[٢٤] *Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam in Magistro A compositus*. ومع ذلك، لم تتحقق شهرة النص *DA* إلا عندما نشر ناغل (Nagl) في العام ١٨٨٩م نسخة مختصرة منه موجودة في المخطوطة ٢٧٥ من فيينا، اعتبر فيها المؤلف أن تاريخ وضع النص سابق للعام ١١٤٣م، وبهذا تأييد لرأي شال[٢٥]. وقد نشر كورتز (Curtze) في العام ١٨٩٨م، وبطريقة أكثر شمولية، النص الحسابي الموجود في مخطوطة ميونيخ ذات الرقم ١٣٢٠١[٢٦]. وفي العام ١٩٠٤م، كتب تانري مذكرة قصيرة نشرت بعد وفاته المفاجئة في السابع والعشرين من تشرين الثاني[٢٧]؛ وفيها يذكر هوية نص

---

(٢٢) غير أن كلمة «*uices*» تدل في الـ *Liber abaci* لفيبوناتشي على ضرب الأعداد الصحيحة (٧١ تاليات لـ ٧ تصبح ٩٤٩).

(٢٣) انظر: M. Chasles, «Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,» *Mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, vol. 11 (1857), pp. 510-511.

(٢٤) يدلّ العنوان المعطى والإشارة ٩٨٠ من الـ «Fonds sorbonnes» على أن المقصود هو المخطوطة اللاتينية الحالية، انظر: مخطوطة المكتبة الوطنية، ١٦٢٠٨، و Guillaume Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, 2 vols. (Paris: Renouard, 1938), pp. 47 et 298.

(٢٥) انظر: A. Nagl, «Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der Indisch-Arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im Christl. Abendlande,» *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch - Literarische Abteilung*, Bd. 34 (1889), pp. 129-146 and 161-170.

غير أن التأريخ مغلوط. نحن نرى، مع فيختنو (Fichtenau)، أن ١١٤٣ تشكل «*terminus post quem*». انظر: H. von Fichtenau, «Wolfger von Prüfening,» *Mitteilungen der Österreich. Institut für Geschichtsforschung*, Bd. 51 (1937), p. 320.

(٢٦) انظر: M. Curtze, «Über eine Algorismus-Schrift des 12. Jahrhunderts,» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Bd. 8 (1898), pp. 3-27.

(٢٧) انظر: Paul Tannery, «Sur l'auteur d'un texte algorithmique du douzième siècle publié =

المخطوطة الباريسية وهوية طبعة كورتز، موحياً، فضلاً عن ذلك وبحذر، أن «العمل [عمل المؤلف] باستطاعة أدلار دو باث (Adélard de Bath) القيام بمثله على ما يبدو». وقد عمم مؤلف هاسكنز (Haskins) هذا الافتراض على الرغم من تحفظات المؤلف، وعلى الرغم من الإشارة إلى تشابه أكيد مع جزءٍ من المؤلف الفلكي لبيار ألفونس (Pierre Alphonse)(٢٨).

يبدو مناسباً، وقبل أن نحدد الشهادة التي يقدمها الـ LY *(Liber Ysagogarum)* عن إدخال العلوم العربية إلى الغرب اللاتيني، أن نحدد محتوى هذا الـ *LY* ومكانته وسط ترجمات القرن الثاني عشر للميلاد.

يحتل القسم الحسابي من الـ LY الكتب الثلاثة الأولى (من خمسة) حيث كُرس الكتابان الأخيران وبإيجاز للهندسة وللفلك. فالدراسة الكاملة للنص، مرفقة بدراسة كتاب *De opere astrolapsus* لأدلار دو باث قد أعطت اليوم عناصر لم يكن باستطاعتها الظهور إلى الآن(٢٩). لنعتبر أولاً (وهذا مؤكد) أن الجداول الزمنية في الكتاب الخامس قد احتُسبت على أساس تاريخ الأول من تشرين الأول/ أكتوبر للعام ١١١٦م، وأن الصيغة المختصرة، المرتبطة بالصيغة الأولى *(I)*، قد كتبت بعد العام ١١٤٣م بقليل. فعلى اعتبار أنّ هذا المؤلف مجموعة متجانسة تعود جميع أجزائها إلى الكاتب الواحد نفسه، يمكننا القول إنه، أي هذا المؤلَّف، قد وُضع حوالى أواسط القرن الثاني عشر. ومن جهة أخرى، لم يظهر عند أدلار دو باث أيُّ شكل لأي رقم خاص بالحساب الهندي. والأمر ذاته ينطبق على بيار ألفونس،

= par Curtze,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 5 (1904), réimprimé dans: *Mémoires scientifiques*, vol. 5, pp. 343-345.

(٢٨) انظر: Charles Homer Haskins, *Studies in the History of Mediaeval Science*, (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1924), p. 24, reprinted (New York: Ungar Pub. Co., 1960).

وعلى القاعدة نفسها لفرضية هاسكنز، فإن النسب لبيار ألفونس (Pierre Alphonse) قد أوحى به مجدداً: José Mª. Millás Vallicrosa, «La Aportación astronómica de Petro Alfonso,» *Sefarad*, vol. 3 (1943), p. 83;

واعترف به شكلياً فيما بعد: Richard Lemay, «The Hispanic Origin of Our Present Numeral Forms,» *Viator*, vol. 8 (1977), p. 446, note (46).

وسنرى لاحقاً أنه لا يمكن الاحتفاظ بهذا الوضع.

(٢٩) بالرغم من إشارة الكتاب الرابع الـ *LY* إلى الموسيقى *(De musicis ac geometricis rationibus)*، فهو لا يحتوي سوى على الهندسة: وحدها المخطوطة A 3 sup من ميلانو (الصيغة الثانية المضافة) تحتوي على اعتبارات مقتضبة عن العلاقات الموسيقية، وعلى غرار نشرة كورتز (Curtze)، لم تأخذ نشرتنا المؤقتة من *LY* في العام ١٩٧٥ بعين الاعتبار إلا الجزء الحسابي من المؤلف. انظر: André Allard, «Les Plus anciennes versions latines du XIIᵉ siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwārizmī,» (Louvain: 1975), (non publié).

وقد قام ب.ج. ديكاي (B. G. Dickey) بشرح ونشر مجمل النص مرفقاً بـ *De opere astrolapsus*. انظر: B. G. Dickey, «Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts,» (Unpublished Thesis, Toronto, University of Toronto, 1982).

حيث الجداول الزمنية في الكتاب الخامس في الـ *LY* تشبه جداول هذا المؤلف في الصفحة ١١٤ (وجه) من المخطوطة ٢٨٣ من «Corpus Christi College» (أوكسفورد). ونحن نعلم أن بيار ألفونس قد أسس عمله على التطابق مع الجداول الخوارزمية؛ وبدافع من بيار، الذي من الممكن أن يكون أدلار دو باث قد التقاه خلال إقامة في انكلترا، قام هذا الأخير بترجمة الجداول الخوارزمية في العام ١١٢٦م(٣٠). علاوة على ذلك، فإن مصطلحات الكسور الستينية في الـ *LY* (tercia، secunda، minuta، gradus) لا تتطابق قط مع مصطلحات بيار ألفونس (gradus, puncti, minutiae, minutiae, minutiarum) الذي لا يسمح مؤلّفه باستنتاج أنه كان على إلمام بالطرق العملية للحساب الهندي. هذا يدل على ضرورة إجراء تحليل جديد لتوالي أدلار دو باث وبيار ألفونس ككاتبين لـ *LY*.

فمنذ العام ١٩٠٤م، أوضح تانّري (Tannery) أنه لم يجد في الكتاب الرابع، غير المطبوع حتى ذلك الحين، والمكرس لهندسة موجزة، سوى استعارة من العلوم العربية. ومن أمثلة هذه الاستعارة القيمة التقريبية لـ π وهي $\sqrt{10}$، التي اعتُبرت أفضل من القيمة $22/7$(٣١). ويبدو مناسباً، وقبل تفحص المحتوى الحقيقي لهذا الكتاب، أن نوضح العلاقات بين مختلف صيغه. وفيما يتعلق بالجزء الحسابي وكذلك بالجزء الهندسي، نجد أن الصيغة الثانية (*II*) من مخطوطات ميلانو وباريس ليست سوى الصيغة الأولى (*I*) من المخطوطات الأخرى والتي زيد عليها بشكل واسع. فبعد أن تقدم الصيغ (*I*) و(*II*) و(*III*) وصفاً لـ «صنف أول» من عمليات الضرب الناتجة عن ضرب الأعداد التسعة الأولى بعضها ببعض، بواسطة جدول متداخل، نراها، كما في الصيغة المختصرة، تقدم طريقة يمكن التعبير عنها كالتالي(٣٢):

إذا كان $10 - a < b < a < 10$، يكون:

$$ab = 10[b - (10 - a)] + (10 - a)(10 - b)$$

---

(٣٠) انظر: Otto Neugebauer, «The Astronomical Tables of al-Khwārizmī,» *Hist. Filos. Skr. Dan. Vid. Selks.*, vol. 4, no. 2 (1962), pp. 143-145, and Dickey, Ibid., pp. 83-84.

حيث يلفت الانتباه إلى أن والشر دو مالفرن (Walcher de Malverne) (المتوفى العام ١١٣٥م) تلميذ بيار ألفونس، قد استعمل عادة في الـ *De dracone* الأرقام الهندية دون أن يأتي بهذا الخصوص على ذكر إرث معلمه، خلافاً لما يعلن بشأن الكسور الستينية؛ (وذلك إلى جانب الأرقام الرومانية). ومن المحتمل أن تكون الأرقام الهندية عائدة إلى ناسخ مخطوطة الـ *De dracone* أو أن والشر دو مالفرن قد عرفها عن طريق آخر غير بيار ألفونس.

(٣١) انظر: Tannery, «Sur l'auteur d'un texte algorithmique du douzième siècle publié par Curtze,» p. 344.

(٣٢) انظر: Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarizmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*, pp. 27, 18-21; 37, 1-15, et 36, 5-7.

وتنفرد الصيغة (II) بتقديم طريقة أخرى:

إذا كان $a < 10$ و $b < 10$، يكون:

$$ab = 10b - b(10 - a) = 10a - a(10 - b)$$

وأصل هذه الطرق غير مؤكد. ولقد ورد، في المثل المعطى عن ضرب ٨ بـ ٧ الذي قدمه أبو الوفاء في القسم الثاني من مؤلفه الحسابي المكتوب بين عامي ٩٦١ و٩٧٦م، وصف يعادل الطريقة الأولى. ونجد مجدداً هذه الطريقة في كتيب *algorisme* لاتيني مجهولُ المؤلف في دير «سالم» (Salem)، من المحتمل أن يكون قد كتب في بداية القرن الثالث عشر[٣٣]. ولكن بعكس الـ LY والصيغ التي تلتها والتي افترضت $a > b$، لم يكن على المؤلف العربي أن يهتم بالأعداد السالبة طالما أنه أظهر الطريقة عينها على مثل ضرب ٣ بـ ٥. ويمكن للطريقة الأخرى، الخاصة بالصيغة الثانية (II) والتي لا نعرف معادلاً عربياً لها، أن تكون ناتجة عن الطرق العملية للحساب الإصبعي التقليدي. نجد هذه الطريقة أيضاً في *l'Algorisme de Salem* وفي *l'Algorismus Vulgaris* لجان دو ساكروبوسكو (Jean de Sacrobosco) والذي لم يستوح الـ LY[٣٤]. بيد أن زيادات أخرى على الصيغة الثانية (II) تدل بالتأكيد على تأثير التقليد المبني على **الأصول** لإقليدس وعلى **علم الحساب** لبويس[٣٥]. غير أن مخطوطات الصيغة الثانية فقط أعطت لهذا المؤلف العنوان *Liber Ysagogarum Alchorismi*؛ وهو العنوان الذي أعطته له مخطوطة باريس رقم ١٦٢٠٨، ناسبة تأليفه إلى «المعلم A»، «a Magistro A compositus». ومهما تكن هوية هذا «المعلم A»، فلم يكن سوى مؤلفٍ لصيغة فيها بعض الزوائد.

وفيما يتعلق بالصيغة الثالثة (III) والتي يشير مستهلُها الخاص إلى فرنسا، فإنها تحتوي على أجزاء عديدة مماثلة للصيغة الأولى أو للصيغتين الأولى والثانية، ولكنها تحتوي أيضاً على عدد من النصوص والأمثلة التي، وإن كان لها صلة بالمواضيع عينها، إلا أنها كُتبت بطريقة

---

(٣٣) غير أن الكاتب المجهول لا يأخذ بعين الاعتبار سوى الأعداد بين ٥ و١٠. انظر: M. Cantor, «Über einen Codex des Klosters Salem,» *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. 10 (1865), p. 5.

والطريقة نفسها تظهر أيضاً في أقدم «algorisme» بالفرنسية، من القرن الثالث عشر للميلاد. انظر: E. G. R. Waters, «A Thirteenth Century Algorism in French Verse,» *Isis*, vol. 11, no. 35 (January 1928), pp. 45-84.

(٣٤) انظر: Cantor, Ibid., p. 5, and Maximilian Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius una cum Algorismo ipso*. (Copenhague: [n.pb.], 1897), p. 8.

(٣٥) لتحديد الوحدة، انظر: Euclide, *Les Eléments*, traduit par F. Peyrard (Paris: [s.n.], 1819), VII, définition 1. =

واضحة الاختلاف تستعمل أحياناً مصطلحات خاصة[٣٦].

ويظهر بوضوح تأثير المصادر اللاتينية التقليدية مثل بويس في الفصل الأول من الكتاب الرابع من *LY* المكرس للهندسة. أما الفصول التالية فتشكل هندسة موجزة وتطبيقية تتوافق بعدد من عناصرها مع تلك الموجودة في الكتاب الثاني من مؤلف الهندسة المنسوب لبويس (زعماً)[٣٧]. ولكن بعض الأجزاء تبدو غريبة عن هذا التقليد[٣٨]. ولقد اعتقد ناشر النص، بعد تفحصه لعدة تقاليد إقليدسية من القرن الثاني عشر[٣٩]، أن بإمكانه الجزم أن نصوص الـ *LY* لا تطابق، لا تعبيراً ولا أسلوباً، أياً من هذه التقاليد؛ وأنها على الأخص لا تطابق الصيغ المنسوبة لأدلار دو باث[٤٠]؛ ومع ذلك فإننا نجد عبارة خاصة بالتحديد الأول من كتاب **الأصول** الثالث تدل من دون شك، كما اعتقد هرمان الكورنثي (Hermann de Carinthie) على أن مؤلف الـ *LY* كان على معرفة بنص لإقليدس انتقل بواسطة العرب[٤١]. وتتطابق عدة مقولات من الصيغة الثانية (المزادة) من الـ *LY* مع مقولات من الصيغة الثانية للترجمة العربية لإقليدس؛ وهذه الأخيرة هي المتعارف اليوم على نسبها لأدلار دو باث[٤٢]. وهكذا يمكننا اعتبار التأثير العربي واضحاً في القسم الهندسي من الـ *LY*، ولو أن النص نفسه مرتبط غالباً بالمصادر اللاتينية التقليدية وأن بعض التعابير غريبة عن كل التعابير التي

= ولتحديد العدد، انظر: Euclid, Ibid., VII, définition 2 et Inst. Arithm. I, 3.

انظر أيضاً: Allard, Ibid., pp. 25-26..

(٣٦) انظر، مثلاً، بداية الفصل عن القسمة في: Allard, Ibid., pp. 34-35

(٣٧) انظر: Menso Folkerts, «*Bœthius» Geometrie II; Ein Mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, Bœthius; Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Exakten Wissenschaften; Bd. 9 (Wiesbaden: F. Steiner, 1970), pp. 144-171.

المقصود نص مجهول الكاتب يستعمل مصادر عديدة كُتب في اللورين (Lotharingie) في النصف الأول من القرن الحادي عشر للميلاد.

(٣٨) Euclide, Ibid., I, axiome 5, propositions I, 9; III, 1, 3, 20, 25, 35, 36; IV, 15, et VI, 2, 4,9.

(٣٩) فضلاً عن بويس (Boèce) الأولى والثانية، والترجمات العربية التي قام بها أدلار دو باث (Adélard de Bath) وهرمان الكورنثي (Hermann de Carinthie)، وترجمة للنص الإغريقي مجهولة الكاتب، ونسخة مستوحاة من بويس وأدلار. انظر: Dickey, «Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts,» p. 87.

(٤٠) المصدر نفسه، ص ٨٨ - ٩١.

(٤١) المصدر نفسه، ص ٩٢، حيث يعبّر عن شعاعات الدائرة على أنها «que a centris»، كما في اليوناني، وليس على أنها «radii» كما في النصوص اللاتينية حيث يغيب التأثير العربي.

(٤٢) **الأصول**، المقالة الثالثة، ٢٠، ٢٥، ٣٦ (٣٥ في نسخة أدلار) والمقالة السادسة، ٤ تتشابه تماماً. انظر: Menso Folkerts, «Adelard's Versions of Euclid's Elements,» in: C. Burnett, ed., *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century*, Warburg Institute, Surveys and Tests; XIV (London: [n. pb.], 1987), pp. 55-88.

تعادلها والمعروفة في القرن الثاني عشر؛ علاوة على ذلك، هناك علاقة مميزة تربط الصيغة الثانية من الـ *LY* والصيغة الأدلارية لإقليدس.

ولقد أتاح لنا الكتاب الخامس من الـ *LY* الذي يعالجُ شؤوناً فلكية، على ضوء معرفتنا الحالية بأعمال أدلار دو باث وبيار ألفونس، رؤية أكثر وضوحاً للمساهمة التي قام بها هذان المؤلفان في إعداد الـ *LY*. ولقد أظهر ناشر كتاب *De opere astrolapsus* أن مؤلف أدلار يظهر تأثيراً عربياً اقتصر على زيج الخوارزمي وعلى مسلمة المجريطي(٤٣). من جهة أخرى، يكشف الكتابان *Dialogi cum Judaeo* لبيار ألفونس و*De dracone* لتلميذه والشر دو مالڤرن (Walcher de Malverne) من دون أي التباس عن معرفة بجداول الخوارزمي الفلكية(٤٤). ويدل محتوى الكتاب الخامس من الـ *LY* على استخدام المؤلف لعبارات عديدة صادرة عن العربية، في الفصل الأخير المكرس للحركات السماوية(٤٥). نصادف مثل هذه العبارات في صيغ شارتر وأوكسفورد (Chartres & Oxford) من زيج الخوارزمي، وهي صيغ منسوبة لأدلار دو باث(٤٦). ونصادفها كذلك في المخطوطة *Corpus Christi College 283* لبيار ألفونس، باستثناء كلمة «buht» الموجودة في الصيغ الأدلارية وحدها وفي صيغة مدريد وهذا حسب مراجعة قام بها روبير دو شستر (Robert de Chester). وهكذا يكون مؤلف الـ *LY* على علم بصيغة أكثر كمالاً من صيغة بيار ألفونس. غير أن الصيغة الأخيرة هي بالتأكيد المصدر المباشر للجداول الزمنية الموجودة في الفصل الخامس والتي تدل على تشابه تام معها، عكس ما تدل عليه صيغة أدلار. وهذا التشابه، بالإضافة إلى اهتمام بيار ألفونس بالأبجدية العبرية وبالتقويم اليهودي في الفصلين (٣) و(٤) من *LY*، حمل عدداً من الكتّاب على الاعتقاد بأن *LY* هو من تأليف بيار ألفونس (الملقب «Moses Safardi» وهو يهودي الأصل، من هويسكا، اعتنق المسيحية). ولكن بالمقابل، يمكن لأدلة من الطبيعة نفسها أن تلعب لمصلحة أدلار دو باث: نذكر في هذا المجال التشابهات في الهندسة والتي أوردناها فيما تقدم، كما نذكر كذلك احتساب قطر الأرض في الفصل السادس في الـ *LY* من زيج الخوارزمي(٤٧). فهذا الاحتساب موجود في نسختي شارتر وأوكسفورد العائدتين لأدلار،

---

(٤٣) Dickey, Ibid., p. 94.

(٤٤) الدراسة الأحدث عن هذا السؤال هي دراسة: J. H. L. Reuter, «Petrus Alfonsi: An Examination of His Works, Their Scientific Content and Their Background,» (Unpublished Thesis, Oxford, St. Hilda's College, 1975).

(٤٥) على التوالي: elwazat، tadil، albuht، buht، elaug، emulkaam (٢).

(٤٦) تحتوي مخطوطتا شارتر Bib. Publ.، ٢١٤ وأوكسفورد، مكتبة بودلين، Auct. F. I. 9 على النسخة كاملة وهذه النسخة محتواة جزئياً في مخطوطتي مدريد Bib. Nac.، ١٠٠١٦ وباريس، Bib. Naz، ٣٦٤ .

(٤٧) انظر: Heinrich Suter, «Die Astronomischen Tafeln des Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama Ibn Ahmed al-Majrīṭī und der Lateinischen Übersetzung des Athelard von Bath,» *Danske Videnskabernes Selskab. Skr., 7 Raekke, Hist. og* =

ولكنه غائب عند بيار ألفونس. وعلى عكس ذلك، نرى أن المصطلحات الفلكية في الـ *LY* تختلف بشكل ملموس عن تلك التي استعملها أدلار دو باث في مؤلفه *De opere astrolapsus*. وهكذا، فأدلار، وفيما يتعلق بـ *l'écentricus* أو بـ *l'épiciclus* في الـ *LY*، لم يشر إلا إلى وظيفتيهما[٤٨]. وما من شيء يسمح بالاعتقاد أن أدلار دو باث كان على علم بنظرية «الإقبال والإدبار» (Trépidation)[٤٩] التي أعلن عنها الفلكي العربي ثابت بن قرة والتي توجد بوضوح في الـ *LY*، في الوقت الذي يبدو فيه جلياً، وحسب دليل والشر دو مالقرن القاطع، أن بيار ألفونس قد استوعب تلك النظرية. بالمقابل، نجد عدم انسجام بين نظام الكرات العشر في علم الكون عند بيار ألفونس والنظام عينه في الـ *LY*، بينما يشبه هذا الأخير إلى حد ما نظام أدلار[٥٠]؛ ومسلمة المجريطي، الذي اطلع أدلار على مؤلفه بشكل جيد، هو بالتأكيد الـ «Almérith» المذكور في الفصل السادس من الـ *LY*. ويبدو غير مجدٍ تفصيل أكثر لمقارنات من هذه الطبيعة: فجميع المقارنات التي حاولنا، وكذلك جميع المقارنات التي قام بها ناشر *De opere astrolapsus*، تدل على أن عناصر لا يستهان بها تسمح بمقارنة محتوى الـ *LY*، وخاصة محتوى الجزء الفلكي، بالأعمال المعروفة تارةً لمؤلف وطوراً للمؤلف الآخر. وعلى الأرجح، يمثل نص الزيج للخوارزمي الموجود في مخطوطة أوكسفورد التقليد الأقرب لتقليد أدلار؛ ولقد لعب هرمان الكورنثي (Hermann de Carinthie) دوراً في صيغة شارتر، ومثله فعل روبير دو شستر في صيغة مدريد؛ من جهة أخرى، يعود الزيج المقتبس الموجود في الـ *Corpus Christi College 283* المنسوب لبيار ألفونس، إلى أعمال أدلار[٥١]. لذلك علينا أن نمتنع اليوم عن اعتبار أدلار دو باث مؤلفاً لـ*LY*. وكذلك أيضاً فيما يتعلق ببيار ألفونس. تدعو إلى هذا الامتناع، بشكل قاطع، عدة عناصر مهمة موجودة في كل كتب الـ *LY*. وتدل مختلف أقسام الـ *LY*، وخاصة الأقسام المكرسة للهندسة والفلك، على أن الأمر يتعلق بتركيبة هجينة، حيث تلتقي تأثيراتُ عدة تقاليد واضحة الاختلاف. وفضلاً عن ذلك، لا يوجد ما يدفع إلى الاعتقاد بوجوب حفظ

=
Filos. Afd. (Copenhagen), Bd. 3, no. 1 (1914),
القيمة المعطاة لخط دائرة الأرض وقيمة π تساوي ٧/٢٢ تعطيان النتيجة ٧٦٣٦ المثبتة في *LY*.

(٤٨) على الشكل التالي: «Et primus quidem circulus, uerbi gratia ad Saturnum, ille dicitur quem Saturnus spatio triginta annorum contra applanon metitur».
انظر: Dickey, «Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts,» p. 159.

(٤٩) تقدم للشمس ٨ درجات خلال ٩٠٠ سنة في منطقة البروج وتأخر مساوٍ في الـ ٩٠٠ سنة التالية.

(٥٠) ثلاث دوائر موجودة فوق زحل لدى بيار ألفونس مقابل اثنين لدى أدلار وفي *LY*.

(٥١) هذه بعض النتائج الهامة الناجمة عن الدراسة الوافية التي قام بها ب. ديكاي (B. G. Dickey) ويوجد نظام كثير الوضوح عن مسألة الجداول الفلكية في القرن الثاني عشر للميلاد يعود إلى ر. مرسييه (R. Mercier).

تاريخ العام ١١٤٣م، والذي لا يظهر سوى في النسخة المختصرة من القسم الحسابي في مخطوطة فيينا، للمجموعة الرباعية من الـ *LY*.

استناداً إلى ما تقدم، فإن الشهادة الوحيدة التي يمكننا التمسك بها بشكل قاطع هي تلك التي تقدمها الصيغة الثانية من الـ *LY*، المتصلة أكثر من غيرها اتصالاً وثيقاً (وهذا مؤكد) بترجمات أدلار دو باث لإقليدس العربي[٥٢]. وهذه الصيغة التي تحوي إضافات واسعة تنسب تأليف الـ *LY* في المخطوطة الوحيدة ١٦٢٠٨ من باريس إلى «المعلم A» (a Magistro A compositus). فهل علينا بالضرورة الاعتقاد أن مؤلف النص اللاتيني المحفوظ هو «المعلم A»؟ لا شيء يؤكد ذلك. ألم يدعُ والشر دو مالقرن، في مؤلفه *De dracone*، أستاذه بيار ألفونس بـ «compositor libri» وهو المذكور بالاسم على الطريقة العربية في مقدمته (Dixit Petrus Alphunsus...)؟ وكذلك يدعو عنوانُ شروحات الفصل الإقليدسي من الصيغة (*III*) لأدلار دو باث، المؤلف بـ «ab Euclide in arabico composita et ab Adhelardo Bathoniensi in latinum transumpta» (كُتب بالعربية انطلاقاً من إقليدس وترجمه إلى اللاتينية لأدلار دو باث)[٥٣]. ويبدو مناسباً، وقبل الإدلاء بفرضية ما عن هوية مؤلّف الـ *LY* وعن أصل النصوص الحسابية اللاتينية، أن نتفحص سلسلة ثالثة من النصوص.

فمنذ الطبعة التي أصدرها بونكومباني (Boncompagni)، انطلاقاً من المخطوطة الوحيدة، من باريس، عن ٧٣٥٩ *Liber Alghoarismi de pratica arismetrice*[٥٤]، *qui éditus a magistro Iohanne Yspalensi (LA)* ونحن ننسب إلى يوحنا الإشبيلي (Iohannes Hispalensis, Iohannes Limiensis) كتابة رسالة لاتينية منبثقة من علم حساب الخوارزمي (ويوحنا الإشبيلي هذا هو المترجم ذائع الصيت لعدد من المؤلفين العرب في علم الفلك كالفرغاني وأبي معشر، والطبري، وثابت بن قرة وكثيرين غيرهم). ويتركز نشاط المؤلّف، على الأقل جزئياً، في طليطلة ما بين العامين ١١٣٣ و١١٤٢م. ويجدر التوقف عند نسبة الرسالة الحسابية هذه إلى يوحنا الإشبيلي. فإن مخطوطة باريس التي نقلها بونكومباني هي الوحيدة (من بين عشر مخطوطات معروفة اليوم) التي تحمل في عنوانها إشارة إلى «magister Iohannes Yspalensis» (المعلم يوحنا الإسباني). وهذه المخطوطة المؤرخة في بداية القرن

(٥٢) أي للترجمة العربية لإقليدس. (المترجم).

(٥٣) انظر: Marshall Clagett, «The Medieval Latin Translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with Special Emphasis of the Versions of Adelard of Bath,» *Isis*, vol. 44, nos. 135-136 (June 1953), p. 36.

(٥٤) Boncompagni-Ludovisi, *Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice*, pp. 25-93.

الرابع عشر للميلاد، ليست، وكما يكشف تاريخ النص، سوى شاهد متأخر وبالغ الضعف. وفي الحالات عينها، لم يتردد ناقل مخطوطة سلمنكا (Salamanque)، وهو أيضاً من القرن الرابع عشر للميلاد، عن إكمال الـ «Magister Iohannes» والمقروء في نموذجه، بعنوان ثانٍ: *Hec est arismetica Iohannis de Sacrobosco* وإذا كان حقاً يوحنا الإشبيلي أحد أكثر المترجمين شهرة في القرن الثاني عشر للميلاد، فجان دو ساكروبوسكو (Jean de Sacrobosco) هو من دون منازع مؤلِّف لـ *Algorismus Vulgaris* والذي عرف منذ القرن الثالث عشر للميلاد نجاحاً باهراً لا يُقارن به سوى نجاح *Carmen de algorismo* لألكسندر دو فيل ديو (Alexandre de Ville dieu). ولكن ينبغي علينا الحذر الشديد عند اعتماد إحدى النسب لمخطوطتي باريس وسلمنكا. وعلى عكس ذلك، وبفضل مخطوطة باريس ١٥٤٦١، من بداية القرن الثالث عشر للميلاد، نستطيع التأكيد أن الـ *LA* ألف في طليطلة (Tolède) حوالى العام ١١٤٣م: فالمخطوطة التي كانت بحوزة هاوي المجموعات الشهير في القرن الثالث عشر للميلاد ريشار دو فورنيفال (Richard de Fournival) ومن ثم بحوزة جيرار دابفيل (Gérard d'Abbeville)، قد نُقلت في إيطاليا ولكنها تحتوي على تقويم طليطلي من العام ١١٤٣ حتى العام ١١٥٩م[٥٥]. إذاً علينا التمسك بشخصية «Magister Iohannes» (المعلم يوحنا) كما أتت على ذكره جميع مخطوطات الـ *LA* باستثناء المخطوطة ٧٣٥٩ من باريس. فالأسلوب والتصويب الممتاز للغة اللاتينية في الـ *LA* لا يتطابقان جيداً مع لغة يوحنا الاشبيلي القليلة الفصاحة والذي كانت ثقافته الأدبية محدودة جداً[٥٦]. ويحتوي نص آخر يحمل عنوان *introductorius liber qui et pulueris dicitur in mathematicam disciplinam (LP)* على مقاطع تعود فعلاً إلى *LA*، ولكنه يحتوي أيضاً على عدة أقسام أصلية. واليوم يظهر أن *LP*، والذي اعتُبر منذ اكتشافه تنقيحاً للـ *LA*[٥٧]، يشكل صيغة أكثر إيجازاً وعلى الأرجح أكثر قدماً، مستوحاة من المصدر اللاتيني عينه. ويظهر الفرق بين هاتين الصيغتين عند مقارنة الطرق العملية المتبعة في كل منهما. فكما في الـ *DA*، يتم جمع الأرقام في الـ *LP* بدءاً من اليسار (فحسب) بينما تتم العملية في الـ *LY* والـ *LA* بدءاً من اليمين. وصحيح أن

---

(٥٥) هذه الإشارة القيمة عائدة لأبحاث م. ت. دالفرني (M. T. d'Alverny) عن ترجمات جيرار دو كريمون. انظر: Marie-Thérèse d'Alverny, «Translations and Translators,» in: Robert L. Benson and Giles Constable, eds., *Renaissance and Renewal in the Twelfth Century* (Oxford: Clarendon Press, 1982), pp. 458-459.

(٥٦) انظر: على سبيل المثال، مقدمة الـ *De regimine sanitatis*.

(٥٧) هذا أيضاً كان، بعد Eneström، موقفنا عند نشرتنا المؤقتة من العام ١٩٧٥. انظر: Allard, «Les Plus anciennes versions latines du XII^e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwārizmī». حققنا طبعة كاملة محققة ومعلقاً عليها عن *LA* و*LP* حيث وُضع النصان بالتوازي. انظر: Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarizmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*, pp. 62-224.

الـ *LA* يعرف أيضاً الطريقة الأولى، ولكنه يعتبرها أقل ملاءمة[٥٨]. ويأتي الـ *LA* مرة واحدة على ذكر الخوارزمي وذلك عند ضرب العددين $٣\frac{١}{٢}$ و $٨\frac{٣}{١١}$ (وهو مثل معروض أيضاً في الـ *DA* و *LY*)، ولكننا لا نجد أثراً لذكر المؤلف العربي في *LP*[٥٩]. وهكذا نجد أمثلة عديدة تدل على أن النصوص اللاتينية من الـ *DA* إلى الـ *LA* مروراً بالـ *LY* و الـ *LP*تطول وتزداد تفصيلاً أكثر فأكثر، بحيث إن ذكر مصدرها، وهو من دون شك مصدر مشترك، يضمحل شيئاً فشيئاً. ويمكن القيام بتقاربات أخرى بين النصوص. فلقد سبق وأشرنا إلى احتواء النسخة الثانية من الـ*LY* على صيغة عن ضرب الوحدات فيما بينها يبدو أنها تتعلق بالحساب الإصبعي التقليدي أكثر مما تتعلق بالحساب الهندي الموروث عن العرب.

إذا كان: $a < 10$ و $b < 10$ يكون: $ab = 10b - b(10 - a) = 10a - a(10 - b)$

ونجد هذه الصيغة نفسها ولكن بتعابير مختلفة، في تتمة للـ *LA*، تتناول الحساب التقليدي والحساب والجبر[٦٠]. وبات الآن من المفيد ذكر الوقائع التالية:

ـ الصيغة الثانية من الـ *LY* هي صيغة مُزادة تستعين بعلم الحساب اللاتيني التقليدي الغريب عن الحساب الهندي الموروث عن العرب وعن النسخة الأدلارية عن إقليدس كما قدمه العرب. ويدعى هذا النص، في هذه الصيغة وحدها وفي نسخة واحدة منها: «a Magistro A compositus» (أي من تأليف المعلم *A*) ولكن لا يمكن لمؤلف المجموعة الرباعية المكونة من الـ *LY* أن يكون أدلار دو باث أو بيار ألفونس؛ غير أنه بالإمكان القيام بعدة تقريبات مع أعمال هذين المؤلفين في الفصول التي تتطرق إلى الهندسة وعلم الفلك؛

ـ تُظهرُ الصيغتان الأولى والثانية من الـ *LY* اهتماماً أكيداً بالعالم اليهودي وحتى باللغة العبرية؛

ـ وحدها الكتب الحسابية من الـ *LY* يمكن اعتبارها بطريقة أكيدة، بفضل الصيغة المختصرة المشابهة للصيغة *(I)*، قد كُتبت في الأعوام التي تلت العام ١١٤٣م؛

ـ تميز المخطوطة ١٨٩٢٧ من ميونيخ *(LY*، الصيغة الثالثة) وبوضوح بين أشكال أرقام تدعى «Toletane figure» (الأشكال الهندية) وأشكال أرقام أخرى أقرب للأرقام العربية وتدعى «Indice figure»[٦١] (الأرقام الهندية)؛

---

(٥٨) انظر: Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarīzmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*, p. 87.

(٥٩) المصدر نفسه، ص ١٦٣.

(٦٠) تحت عنوان *De multiplicatione digitorum interse*. انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice*, p. 97.

انظر أيضاً بهذا الخصوص، الفصل الحادي عشر: «الجبر» من هذه الموسوعة.

(٦١) حول الأرقام انظر الفصل العاشر من هذا الجزء من الموسوعة.

- اتخذت المخطوطة ١٥٤٦١ من باريس والمحتوية على الـ *LA* كنموذج لها مخطوطة كُتبت في طليطلة ما بين العامين ١١٤٣ و ١١٥٩م، وهذه الأخيرة مفقودة اليوم؛

إن مؤلف *LA* هو «Magister Iohannes» (المعلم يوحنا) وإن اعتباره المتعارف عليه «يوحنا الإشبيلي» اعتبار متسرع ومشكوك في صحته كما هو الحال مع جان دو ساكروبوسكو؛

- وجود بعض العناصر الغريبة من الحساب الهندي بشكل مشترك بين الـ *LY* والجزء الثاني من الـ *LA*.

فلنستبعد أولاً افتراض وجود «مدرسة» للمترجمين في طليطلة أيام الأسقف ريمون (Reymond) (١١٢٥ - ١١٥٢م)[٦٢]. ولكن الوقائع النادرة التي تنسب بعض المخطوطات إلى هذا المؤلف أو ذاك تحثُّ على توجيه الأبحاث نحو الأوساط الطليطلية ذات الارتباط بالثقافة العبرية، حيث، وعلى الأقل حسب بعض الصيغ اللاتينية، لعب دوراً كل من المعلم A (Magister A) والمعلم يوحنا (Magister Iohannes). وبعد استبعاد كون المؤلفين المطلوبين، من المترجمين المعروفين أمثال أدلار دو باث وبيار ألفونس ويوحنا الإشبيلي، المؤلفين المطلوبين، فكيف لا يسعنا أن نفكر بمؤلفين آخرين[٦٣]، وخاصة بأفندوث (Avendauth) وبمساعده المعروف بالضبط باسم «Magister Iohannes» والذي من المحتمل أن يكون عضواً في مجمع طليطلة، قد ساهم بالترجمة اللاتينية للغزالي وللمفكر اليهودي ابن غابيرول؟ ولم تتأكد بعد بشكل قاطع هوية أفندوث، الذي يرد ذكره في بعض المخطوطات اللاتينية على أنه «فيلسوف يهودي»[٦٤]، ولكن إقامته في طليطلة من الأمور الثابتة. وحسب الفرضية الأكثر إقناعاً، يبدو أنه الفيلسوف اليهودي أبراهام بن داود الذي عاش في طليطلة حوالى الفترة ١١٤٠ - ١١٨٠م[٦٥]. تصف المقدمة الـ *LY*، والغريبة تماماً عن الحساب الهندي الموروث عن العرب، ستة أنواع من الحركات غير الدائرية بطريقة تشبه تلك التي نجدها في تفسير الشرائع المقدسة *(Commentaire des Saintes Lois)* للفيلسوف اليهودي المعاصر للمسيح، فيلون الإسكندري. ونجد في هذه المقدمة نفسها تجزئة فريدة للساعة مخالفة لكل التقليد اللاتيني منذ مارتيانوس كابللا على الأقل، هذا التقليد الذي كان يعتبر أن

---

(٦٢) هذه الفرضية تعود، فحسب، لخلط مغلوط بين المدعو يوحنا أفندوث (Iohannes Avendauth) ويوحنا الاشبيلي (Iohannes Hispalensis). والشكوك التي أبداها بهذا الشأن هاسكنز أثبتت كلياً في: Alverny, «Translations and Translators,» pp. 444-445.

(٦٣) وسنلاحظ أن أحداً من المؤلفين المذكورين لم يبدِ في مؤلَّف معروف اهتماماً يُذكر بالثقافة العبرية، وتشكل الـ *Dialogi cum Judaeo* لبيار ألفونس دحضاً متعمداً لليهودية.

(٦٤) انظر: Marie-Thérèse d'Alverny, «Notes sur les traductions médiévales d'Avicenne,» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge*, vol. 19 (1952), pp. 339-358.

(٦٥) انظر: Marie-Thérèse d'Alverny, «Avendauth?,» in: *Homenaje a Millás-Vallicrosa*, 2 vols. (Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1954-1956), vol. 1, pp. 19-43.

الزمن مؤلّف من عناصر غير قابلة للتقسيم. وتظهر هذه التجزئة كمحاولة لإقامة قياس مشترك بين سنة يوليوس والشهر القمري في نظام تقويم قمري - شمسي هو بالتأكيد نظام التقويم اليهودي(٦٦). ونجد ثانية، نسبة مخطوطات *LY* لـ «المعلم يوحنا» في المخطوطة اللاتينية ٢١٨٦ من مكتبة الفاتيكان التي تحتوي على ترجمة الغزالي(٦٧). فلنتخلَّ، إذاً، عن اعتبار «المعلم يوحنا» هذا، هو يوحنا الإشبيلي، مترجم أعمال فلكية معروف، أو على أنه جان دافيد (Jean David) الذي أهدى إليه أفلاطون التيفولي (Platon de Tivoli) ترجمته اللاتينية لكتاب مسلمة المجريطي الأسطرلاب(٦٨). كذلك لا يمكن اعتباره أفندوث المذكور في بعض نسخ ترجمات ابن سينا. ولقد سبق وذكرنا تطابق القسم الثاني من *LA* (تأليف المعلم يوحنا) في بعض نقاطه مع الصيغة الثانية *II* من *LY* (تأليف المعلم A). لذلك يبدو من الطبيعي افتراض أن أحد هذين المصدرين هو من وضع أفندوث الذي هو الفيلسوف اليهودي أبراهام بن داود الذي عاش في طليطلة بين العامين ١١٤٠ و ١١٨٠م(٦٩)، (ولكن هذا الافتراض يبقى موضع نقاش). وكان لأفندوث مساعدان: الشماس دومينغو غونديزالڤو (Domingo Gondisalvo) (Gundissalinus) و«المعلم يوحنا»، وهو يوحنا الطليطلي الذي كان على الأرجح عضواً في المجمع الكاتدرائي في طليطلة. ولتأكيد هذه الفرضية، ينقصنا التأكد من وجود معلم يدعى «المعلم جان» في أرشيف المجامع في طليطلة

---

(٦٦) إثنا عشر شهراً قمرياً في السنوات العادية وثلاثة عشر شهراً قمرياً في السنوات المزادة. انظر:
Paul Tannery, «Sur la division du temps en instants au moyen âge,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 4 (1905), réimprimé dans: *Mémoires scientifiques*, vol. 5, pp. 346-347.

ونعتقد أننا يجب أن لا نرى من خلال مثل هذه العناصر، أثراً لاتينياً على التقويم اليهودي، باقياً من عمل الخوارزمي، انظر: Edward Stewart. Kennedy, «Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar,» *Scripta Mathematica*, vol. 27, no. 1 (June 1964), pp. 55-59, reprinted in: Edward Stewart Kennedy [et al], *Studies in the Islamic Exact Sciences* (Beirut: American University of Beirut, 1983).

(٦٧) «Liber Algazelis de summe theorice philosophie translatus a Magistro Iohanne et D. archidiacono in Toleto de arabico in latinum».

انظر: Alverny, «*Avendauth?,*» p. 40, et. C. Sánchez-Albornoz, «Observaciones a unas paginas de Lemay sobre los traductores Toledanos,» *Cuadernos de Historia de Espana*, vols. 41-42 (1965), p. 323, note (49).

(٦٨) قام ر. لوماي (R. Lemay) بتفصيل وبرهان هذه النظرية مطولاً. انظر: Richard Lemay, «Dans l'Espagne du XII^e siècle: Les Traductions de l'arabe au latin,» *Annales, économies, sociétés, civilisations*, vol. 18, no. 4 (juillet-août 1963), pp. 647-654.

عدة فرضيات جريئة عُرضت في هذا المقال، كتلك التي تجعل من يوحنا الإشبيلي (Jean de Séville) قريباً أو حتى ابناً للكونت سيساندو دافيديز (Sisnando Davidiz) المعروف بابن داوود. وقد دحض سانشز - البورنو (C. Sánchez-Albornoz) كل هذه النظرية.

(٦٩) انظر: Alverny, Ibid., pp. 19-43.

خلال الحقبة التي تهمنا[٧٠]. ولكننا نستطيع اعتبار أفندوث (إذا كان هو المقصود بالحرف A) «مؤلفاً» للصيغة اللاتينية التي بحوزتنا من الـ *LY* ولكن دون أن نعتبر كامل المجموعة الرباعية من *LY* صادرة عن تعاليمه فقط.

ويضاف عنصر هام إلى العناصر التي ذكرنا والتي تعطي الدليل على التأثير الأكيد للعلوم العبرية ولترجمات زيج الخوارزمي اللاتينية في إعداد الصيغ الأربع من الـ *LY*. يدل هذا العنصر الجديد على أن بعض النصوص اللاتينية (على الأقل) المنبثقة، ولو من بعيد، من حساب الخوارزمي، قد أُعدت في الأوساط التي عرفت جيداً الترجمات اللاتينية لأعمال إقليدس. فإذا تفحصنا مختلف التحديدات عن الوحدة (**الأصول**، *IIV*، (1)) في النصوص المدروسة، وفي الأعمال اللاتينية السابقة، وفي أولى الترجمات اللاتينية لجبر الخوارزمي، وفي الترجمات اللاتينية الأولى لأعمال إقليدس المنقولة إلى العربية، نلاحظ أن التحديد المعطى في النسخة الثانية المضاف إليها من الـ *LY* منقول بدقة عن التحديد الوارد في الصيغة اللاتينية الأولى لإقليدس المنسوبة غالباً لأدلار دو باث، والتي بدون شك لا تعود لهذا المؤلف[٧١]. وتؤكد المقارنة نفسها، فيما يتعلق بتحديد عددٍ ما (**الأصول**، *VII*، (2))، بشكلٍ قاطع، تطابقاً من النوع نفسه[٧٢]، بينما يبدو بوضوح أن التحديدات في الـ *DA* والـ *LA* والـ *LP* صادرة مباشرة عن بويس[٧٣]. وباستطاعتنا، إذاً، التساؤل عن النسخة الإقليدسية التي كانت بتصرف مؤلف النسخة «المزادة» من الـ *LY* والمنسوبة إلى «المعلم A». وتقدم دراسة موجزة لمصطلحات القسم الهندسي في الـ *LY* بعض عناصر الرد على هذا السؤال. وتعيد بعض الكلمات، ككلمة «hebes» (الدالة على الزاوية المنفرجة) الصلة مع التقليد القديم للـ «Agrimensores» الرومانية[٧٤]. وتتميز هذه الكلمات عن تلك المألوفة آنذاك عند بويس كـ «obtusus»، والمعروفة من قبل مترجمي القرن الثاني عشر للميلاد لأعمال إقليدس المنقولة إلى العربية. وفي القسم الهندسي من الـ *LY* لم يرد ذكر لأي من الكلمات العربية العديدة التي ما زالت موجودة في جميع الصيغ اللاتينية من إقليدس في القرن الثاني عشر[٧٥]. ولكن استعمال بعض الكلمات، مثل «oxigonius» التي تدل على الزاوية الحادة،

---

(٧٠) انظر: Juan Francisco Rivera, «Nuevos datos sobre los traductores Gundisalvo y Juan Hispano,» *Al-Andalus*, vol. 31 (Summer 1966), pp. 267-280.

يلحظ المؤلف عدة اتفاقات عُقدت بين العامين ١١٦٢ و١١٧٦م بين مجمع طليطلة (Tolède) وواحد أو عدة أشخاص يحملون اسم «Magister Iohannes» (أي المعلم يوحنا).

(٧١) Unitas est qua dicitur omnis res una. في كتاب *De unitate et uno* لدومينغو غونديزالفو (Domingo Gondisalvo)، التحديد شبه مطابق: Unitas est qua unaquaeque res dicitur esse una.

(٧٢) Numerus est multitudo ex unitatibus composita.

(٧٣) Numerus est unitatum collectio.

(٧٤) تظهر الكلمة، مثلاً، في الـ *Liber gromaticus* لفرونتان (Frontin)، (القرن الأول ب.م.).

(٧٥) تظهر لائحة بهذه الكلمات العديدة في: H. L. L. Busard, *The First Latin Translation of* =

ولو كانت دليلاً آخر على وجود كلمات الـ «Agrimensores»، يدل على أن مؤلف الـ *LY*، وإن كان على علم بإحدى ترجمات إقليدس الصادرة بالعربية، فلا تستند هذه المعرفة سوى على الصيغة الثانيّة، التي تبدو فعلاً صيغة أدلار دو باث، أو على الصيغ المنسوبة لهرمان الكورنثي، و«الجيرار دو كريمون (Gérard de Crémone)، فالصيغة الأولى التي لا يمكن تحديد مؤلفها لم تعرف للزاوية الحادة سوى عبارة «acutangulus»(٧٦). زد على ذلك أن أجزاء عديدة من النص الهندسي في الصيغة الثانية «المزادة» من الـ *LY* تشبه بدقة الأجزاء الموجودة في الصيغة الثانية العربية لإقليدس. ولم يؤكد بشكلٍ قاطع أن دومينغو غونديزالڤو (Domingo Gondisalvo)، الذي ذكرنا اسمه بالاشتراك مع اسم أفندوث، كان على علم بترجمة لاتينية ما لأعمال إقليدس بصيغتها العربية. ولكنه بالتأكيد كان على معرفة بـ *Liber Algorismi* (أي كتاب الخوارزمي) (ولا يمكن لهذا «الكتاب» أن يكون جبر الخوارزمي). فقد كان واضحاً عندما ذكره في فصل متعلق بالحساب من كتابه *De diuisione philosophie*(٧٧). كان غونديزالڤو، إذاً، على علم بكتاب *Liber Algorismi*، (وهذا الاسم يطابق عنوان الـ *LA*) حيث ترتيب العمليات هو نفسه الموجود في الـ *DA* والـ *LA*، وحيث مفهوم العدد هو نفسه عند إقليدس في صيغته اللاتينية ولا سيما حيث تقسيم الوحدة إلى «كسور الكسور» يتوافق، كما سنرى، مع الفصل الذي عالجته فقط الصيغة من الـ *LA* العائدة إلى يوحنا الطليطلي وهو أحد شركاء أفندوث. كما أن تحديده لـ «الوحدة» في كتابه *De unitate et uno*، الذي يعود إلى ابن غابيرول (ابن غبريال) (انظر الهامش ٧١)، قريب جداً من تحديد الصيغة الثانية من الـ *LY* وكذلك من تحديد ترجمات إقليدس. إضافة إلى ذلك، استلهم في كتابه *De diuisione philosophiae* الترجمة اللاتينية للنيريزي التي قام بها حوالى العام ١١٤٠م جيرار دو كريمون(٧٨). وأخيراً، تستعمل المقدمة المشتركة لنسخات الـ *LY* الثلاث مبادئ الـ «*Constructio*» والـ «*Destructio*» (البناء والهدم) التي حددها أيضاً دومينغو غونديزالڤو في كتابه *De unitate et uno*(٧٩). فبمعرفتنا لنزعة غونديزالڤو الأكيدة لاستلهام أعمال أسلافه بطريقة غير نزيهة(٨٠) لن نستغرب إذا ما وجدنا في الـ *Liber*

= *Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath,* Pont. Institute of Mediaeval Studies, Studies and Texts; LXXIV (Toronto: [n. pb.], 1983), pp. 391-396.

(٧٦) المصدر نفسه، ص ٣٩٨.

(٧٧) انظر: L. Baur, «Dominicus Gundissalinus. *De divisione philosophiæ,*» *Beiträge zur Geschichte der Philosophie der Mittelalters,* Bd. 4, nos. 2-3 (1903), p. 91.

(٧٨) انظر: C. Kren, «Gundissalimus Dominicus,» in: *Dictionary of Scientific Biography,* 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 5, p. 592.

(٧٩) كما يلي: «Sed destructio rei non est aliud quam separatio formae a materia» (P. L. LXIII, col. 1075).

(٨٠) انظر: Lemay, «Dans l'Espagne du XIIe siècle: Les Traductions de l'arabe au latin,» pp. 658-659, =

Ysagogarum، (في حال كان غونديزالفو هو المؤلف) تأثيرات عديدة عربية ويهودية ولاتينية. وتدفعنا عدة دلائل متقاربة على القول إن كتابة الـ *LY* والـ *LA* قد تمت حوالى العام ١١٤٣م في أواسط طليطلة القريبة من أفندوث.

ولكننا نجد جملة من الصيغة (*III*) من الـ *LY* الموجودة في المخطوطة ١٨٩٢٧ الوحيدة في ميونيخ تشير إلى فرنسا وتختلف بوضوح عما يقابلها في الصيغتين (*I*) و(*II*)[٨١]. فهل علينا أن نرى في الصيغة الثالثة، حيث تختلف كلياً مقاطع وأمثلة عديدة عن تلك التي تقابلها في النسخات السابقة وحيث تتوافر الأرقام الرومانية بشكل خاص، نتيجة منفصلة لسفر بيار الموقّر (Pierre le Vénérable) إلى إسبانيا في العام ١١٤١م في بداية حركة الترجمات في طليطلة زمن الأسقف ريمون؟ لسنا نجرؤ على الإيحاء بهذا الافتراض. ألم يُقدم أدلار دو باث نفسه على ترك المدرسة الفرنسية في مدينة تور (التي قد يكون أوفده إليها أسقف باث ويلز (Wells) المدعو جان دو تور بين عامي ١٠٨٨ و١١٢٢م) لبعض الوقت وعلى الاستقاء في الخارج من المصادر العربية، والعودة ربما إلى مدينة لاون (Laon)، بعد بضع سنوات، لعرض محتوى كتابه *Quaestiones naturales* الذي يكون قد ألفه في منطقة خاضعة للسلطة العربية؟ فالصيغة *III* من الـ *LY* تشكل من دون شك أحد أوائل الشهود في فرنسا عن اهتمام جديد بالعلوم الصحيحة؛ ويعود هذا الاهتمام إلى الخميرة العلمية العربية، في السنوات التي تلت انحطاط مدرسة لاون؛ هذا الانحطاط الذي تزامن مع زيارة بيار أبلار (Pierre Abélard) (١١١٢م) ومع وفاة أنسالم (Anselme) (١١١٧م). إلا أن مخطوطة ميونيخ، التي كانت تخص، في القرن الخامس عشر للميلاد، دير «Tegernsee» الشهير، لم تحتو، باستثناء الكتب الحسابية الثلاثة، سوى على جزء من الكتاب الرابع المكرس للهندسة[٨٢]. ويوجد في هذه المخطوطة نصان عائدان للناسخ نفسه، ومؤلفات فلكية من بينها: نص الترجمة التي قام بها يوحنا الإشبيلي لكتاب ما شاء الله في التنجيم *De Receptionibus*، ولكتاب *Introductorium ad astrologiam* («المدخل إلى علم التنجيم» (المترجم) بتصرف عن اللاتينية) لسهل بن بشر (Zael) الذي يوجد أيضاً في المخطوطة

= ذاكراً ب. هورو (B. Haureau) وبيار دوهيم (Pierre Duhem) وم. ألونسو (M. Alonso) الـ *De immortalitate animae* يستعمل بشكل موسع الـ *De anima* لأفندوث، والـ *De processione mundi* والـ *De essentiis* لهرمان الكورنثي، والـ *De ortu scientiarum* للفارابي (وَ Hugues de St. Victor)، والـ *De unitate et uno* لابن غابيرول (Ibn Gabirol).

(٨١) *LY* (النسختان الأولى والثانية): ...oportet nos ab ipsius artis elementis principium sumentes ad tempora et motus coequeua quidem gradatime ascendere.

LY (النسخة الثالثة): ...oportet Gallos ad ipsius artis elementa in duobus existenciae motibus scilicet et temporibus coequeua quidem gradatim ascendere.

(٨٢) انظر: Dickey, «Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts,» p. 303.

١٣٢٠١ (الصيغة I). وإلى جانب عمل ابن بشر نجد في مخطوطة ميونيخ ترجمةً لاتينية لِـ **جداول طليطلة** الفلكية للزرقالي التي قام بها جيرار دو كريمون، وترجمة مجهولة (الكاتب) لإقليدس وُضعت في لوثارنجيا في القرن الحادي عشر للميلاد[٨٣]. فهذه العناصر، بالإضافة إلى تأكدنا من أن المخطوطة المذكورة أخيراً تعود فعلاً إلى النصف الثاني من القرن الثاني عشر للميلاد (وقطعاً إلى ما بين العامين ١١٦٣ و١١٦٨م)[٨٤]، لا تتعارض مع الفرضيات التي أطلقنا. ولكنها في الوقت نفسه لا تسمح بإكمالها. إن النصوص اللاتينية التي بحوزتنا تشكل نتيجة إيجابية تتعارض بوضوح مع توصية المؤلف المسلم الأندلسي ابن عبدون من أواخر القرن الحادي عشر للميلاد «بألا تباع الكتب العلمية لغير المسلمين، لأنهم قد يقومون بترجمة هذه المؤلفات العلمية وينسبها إلى شعوبهم ورجال الدين عندهم، بينما هي في الحقيقة مؤلفات إسلامية»[٨٥].

ثانياً: الأرقام العربية في المخطوطات اللاتينية لعلم الحساب

إن دراسة محتويات النصوص اللاتينية المذكورة هامة ولا شك. ويضاف إلى هذه الأهمية كون هذه النصوص تشكل أوائل الشهادات عن نشر واستخدام الأرقام العربية في الغرب اللاتيني ابتداءً من القرن الثاني عشر؛ هذا القرن الذي بدأ الغرب فيه يتخلص من الطرق الحسابية التي تقدمها أدوات الـ «Abaque» والـ «Apices»[٨٦] التي تعود إلى جيربير (Gerbert)[٨٧]. ولقد حان الوقت الآن للتخلي عن التمييز بين أرقام عربية شرقية وأخرى يقال لها أرقام «الغبار»[٨٨]، هذا التمييز الذي سُلم به لفترة طويلة. ولقد أضحى مؤكداً

---

(٨٣) انظر: Folkerts, *«Bœthius» Geometrie II; Ein Mathematisches Lehrbuch des Mittelalters.*

(٨٤) المصدر نفسه، ص ٩ - ١٤.

(٨٥) نص مذكور من قبل: Alverny, «Translations and Translators,» p. 440.

وحسب خوان فيرنيه J. Vernet، انظر: Juan Vernet, «La Ciencia en el Islam y Occidente,» in: *Settimane XII: L'Occidente e l'Islam nell' Alto Medioevo* (Spoleto: [n. pb], 1965), p. 568, reprinted in: Juan Vernet, *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval* (Barcelona/Bellaterra: [n. pb.], 1979), pp. 21 - 60.

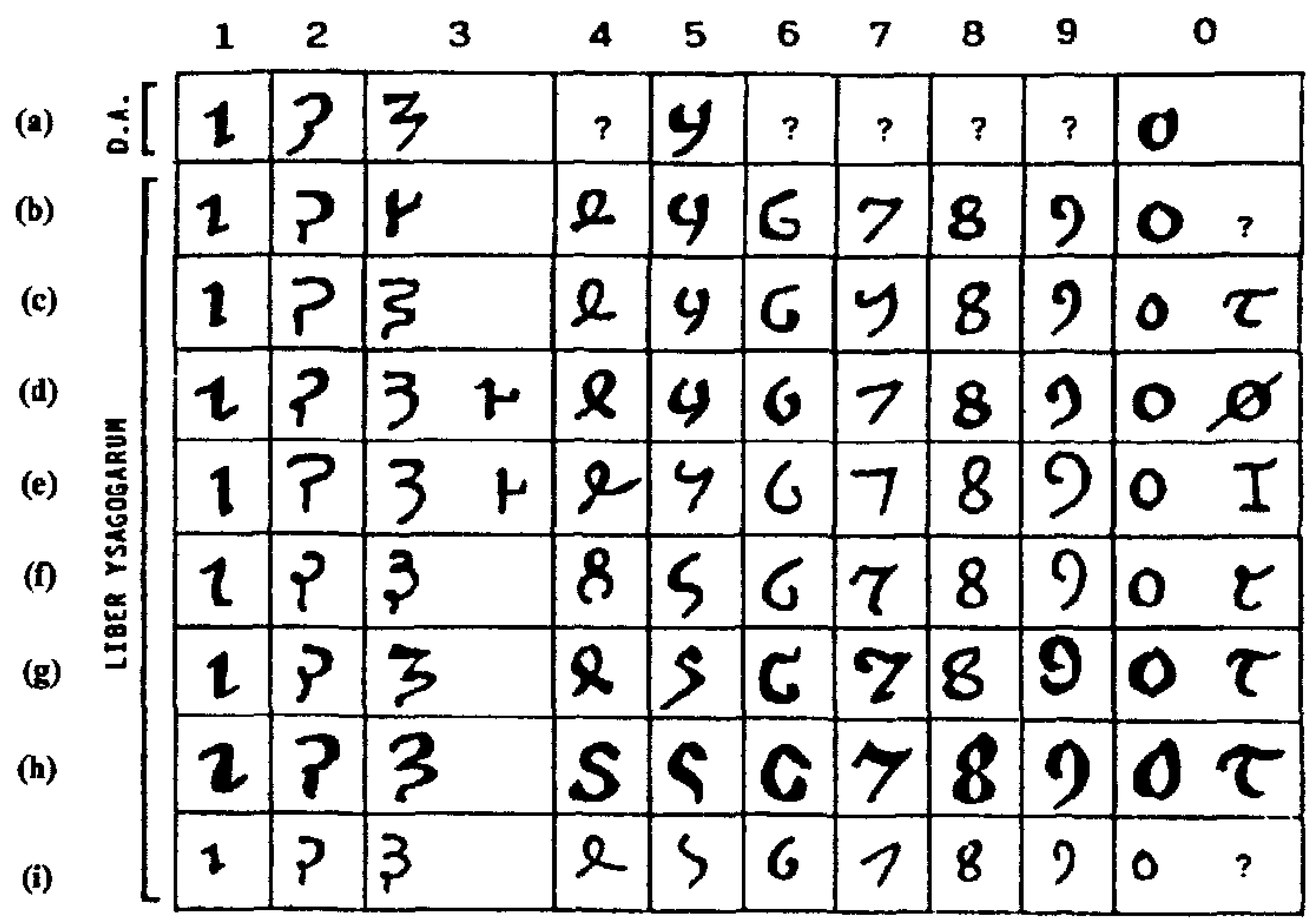
(٨٦) الـ «Abaque» آلة حسابية بدائية تطورت لتصبح ذات أعمدة تتحرك عليها فِيَش (Apices) أو كرات صغيرة تتمثل بواسطتها الأعداد الصحيحة.

(٨٧) عن هذه الاستعمالات قبل القرن الثاني عشر للميلاد، انظر: Beaujouan, «Etude paléographique sur la «rotation» des chiffres et l'emploi des apices du Xe au XIIe siècle,» pp. 303-313.

(٨٨) يظهر هذا التمييز في عدة دراسات، منها على الأخص في: David Eugene Smith and Louis Charles Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston; London: Ginn and Co., 1911), and Solomon Gandz, «The Origin of the Ghubār Numerals, or the Arabian Abacus and the Articuli,» *Isis*, vol. 16, no. 49 (1931), p. 393.

دور طليطلة في إدخال سلسلة الأرقام التسعة مع الصفر إلى أوروبا(٨٩).

وعند تجميع الأرقام التي نصادفها في المخطوطات اللاتينية التي تحتوي على الأعمال المذكورة سابقاً، نحصل على الجدول التالي(٩٠):

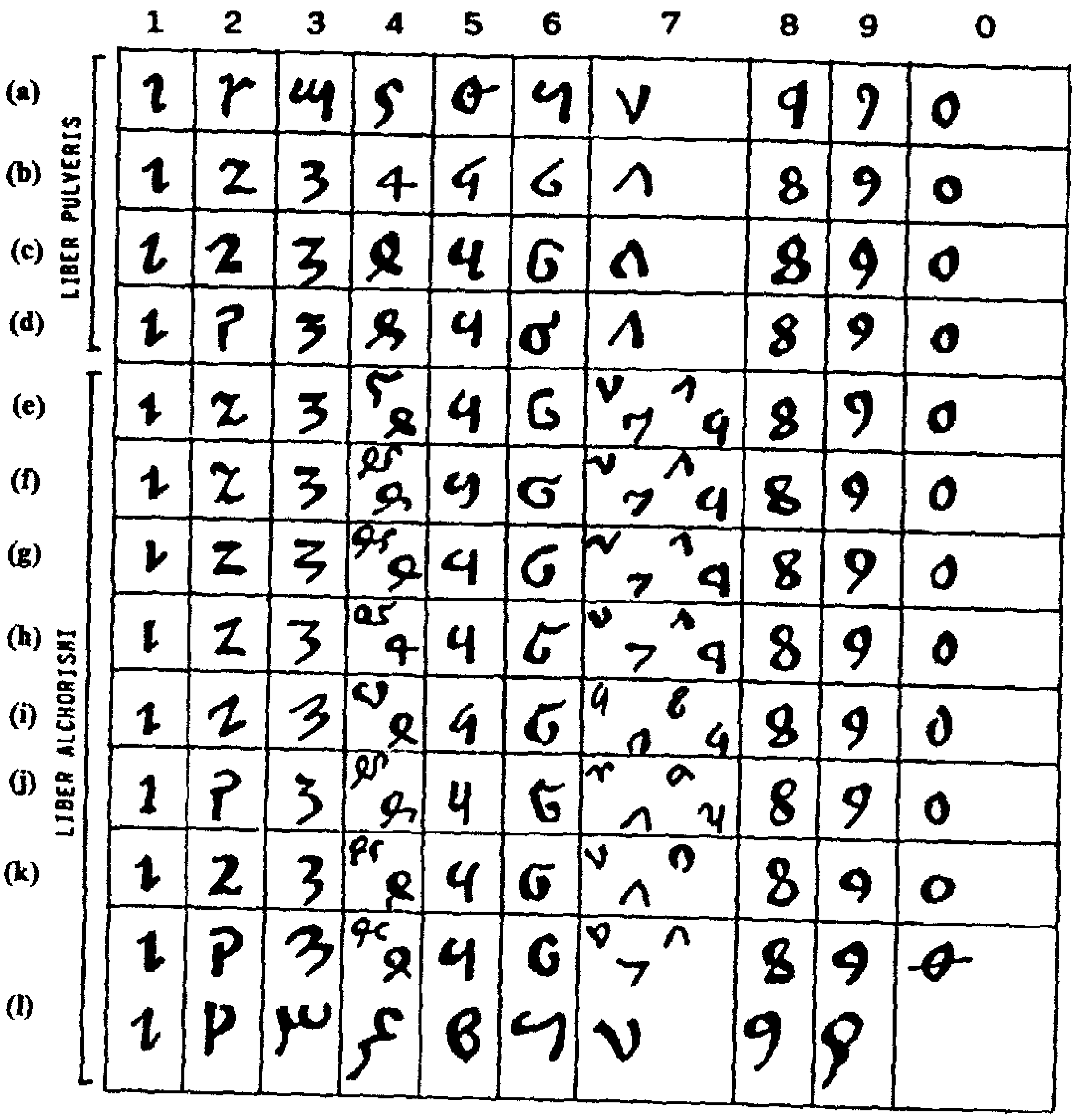


(a) Cambridge, Univ. Lib. Ii.6.5. (C)
(b) Wien, Oster. Nationalbib.275 (V)
(c) München, Clm 18927 (O)
(d) München, Clm 13021 (M)
(e) Genova, Bib. Univ. E III 28 (G)
(f) Milano, Ambr. A 3 sup. (A)
(g) Paris, Bib. Nat. lat. 16208 (P)
(h) Oxford, Bod. Lib. Lyell 52 (l)
(i) Admont, Stiftsbib. frg. 4

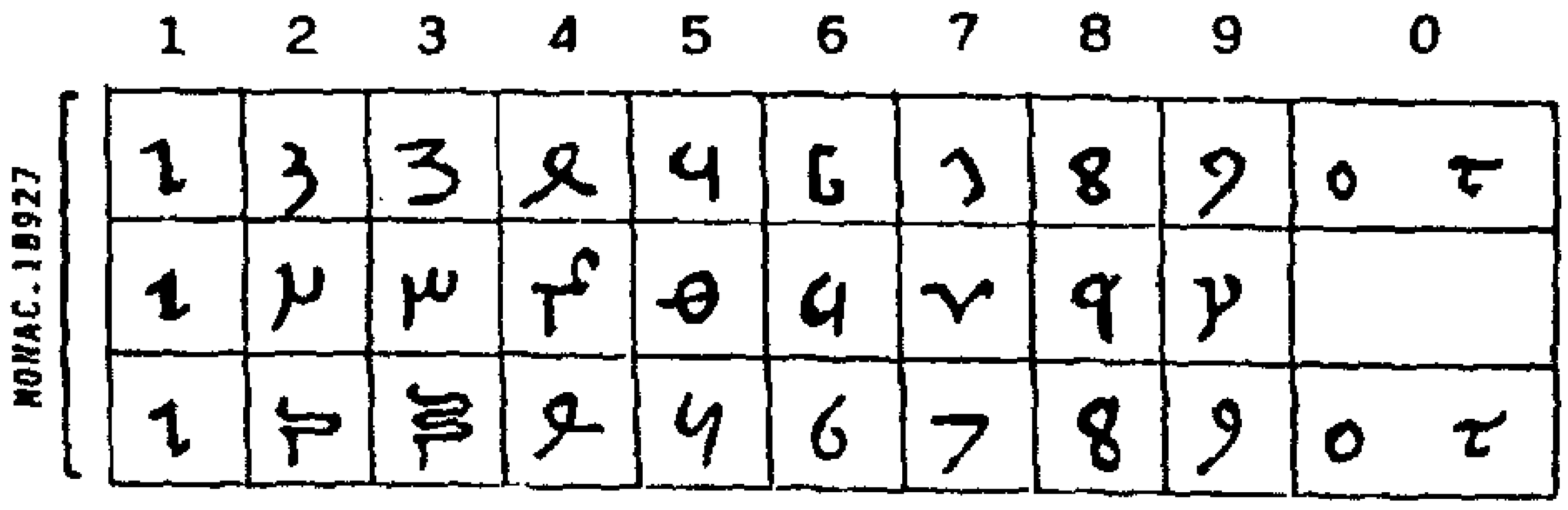
---

(٨٩) انظر: Gonzalo Menéndez Pidal, «Los Illamados numerales arabes en Occidente,» *Boletín de la Real Academia de la Historia*, vol. 145 (1959), p. 188.
نشرة حديثة عن الأرقام في الوثائق العربية في إسبانيا لا تأخذ بعين الاعتبار الأرقام «الغبارية» الشبيهة بأرقام المخطوطات اللاتينية من القرن الثاني عشر للميلاد، إلا في الوثائق المتأخرة من القرنين الخامس عشر والسادس عشر للميلاد، في إقليمَيْ أراغون (Aragon) وڤالانس (Valence). غير أنه من المؤكد أن الأرقام الهندية عُرفت منذ القرن الثاني عشر للميلاد، على الأقل من مترجمي الأعمال الذين استوحوا علم الحساب للخوارزمي. انظر: A. Labarta and C. Barceló, *Numeros y cifras en los documentos arábigohispanos* (Cordoba: [n. pb.], 1988).

(٩٠) الأرقام منقولة بما أمكن من الدقة، لكن دون احترام لأبعادها في المخطوطات. ولم تُنقل الأرقام الظاهرة في مخطوطات لا يزال نموذجها بالتأكيد في حوزتنا. تظهر دراسة أكثر تفصيلاً عن تطور كتابات هذه الأرقام، في: André Allard, «L'Epoque d'Adélard de Bath et les chiffres arabes dans les manuscrits latins d'arithmétique,» in: Burnett, ed., *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century*, pp. 37 - 43.



(a) Oxford, Bod. Lib. Selden sup. 26 (E)
(b) Milano, Ambr. M 28 sup. (B)
(c) Oxford, Bod. Lib. Lyell 52 (I)
(d) Vaticano, Bib. Ap. Reg. lat. 1285 (T)
(e) Paris, Bib. Nat. lat. 7359 (N)
(f) Paris, Bib. Nat. lat. 15461 (P)
(g) Paris, Bib. Maz. 3642 (M)
(h) Paris, Bib. Nat. lat. 16202 (U)
(i) Erfurt, Amplon. Qu 355 (A)
(j) Dresden, Sächs. Landesbib. C 80 (D)
(k) Salamanca, Bib. Univ. 2338 (S)
(l) Vaticano, Bib. Ap. Pal. lat. 1393 (L)



«Toletane figure» جداول طليطلة
«Indice figure»
(Tables astronomiques) الجداول الفلكية

إن تفحص هذه الجداول يعطي أربع وقائع:

ـ تعود الفوارق بين الأرقام في الـ *DA* و*LY* و*LA* و*LP* إلى تطور في طريقة الكتابة عند النساخ اللاتين مرتبط بالكتابة من اليسار إلى اليمين مهما كان التأثير المحتمل للكتابة القوطية(٩١).

ـ نجد في الـ *DA*(٩٢) كما نجد بوضوح في الـ *LA* الدليل على أن بعض الأرقام كانت تكتب بأشكال متنوعة (زمن كتابة هذه المؤلفات).

ـ توجد أشكال أقرب إلى السلسلة العربية التقليدية في المخطوطتين E وL اللتين تحتويان على صيغة هجينة من الـ *LA* والـ *LP*. ولا يمكن النظر إلى هذا الأخير على أنه تنقيح لـ *LA* وإنما على العكس كاستمرار لمصدر مشترك أكثر قدماً. فضلاً عن ذلك، تجلت فيه بوضوح الصعوبات التي تواجه الكتابة في انتقالها من الشمال نحو اليمين؛

ـ تحدد المخطوطة *O* التي تحتوي على النسخة الثالثة من الـ *LY* بجلاء أشكالاً طليطلية مختلفة عن الأشكال الهندية.

وهكذا نستنتج أن بعض المخطوطات يحتفظ بوضوح بأثر من أشكال أرقام شبيهة بتلك التي اكتشفها الغرب خلال النصف الأول من القرن الثاني عشر في المؤلفات العربية في علم الفلك أو علم الحساب. هذا بالرغم من ابتعاد هذه المخطوطات الأكيد عن نصوص عربية في «الحساب الهندي» وعلى الرغم من مفعول التأثيرات الغريبة عن هذا الحساب كعلم الحساب اللاتيني التقليدي والعلوم العبرية وأولى الترجمات اللاتينية في مواضيع مختلفة عن علم الحساب، في إعداد الصيغ الأربع لـ *LY*. وكانت هذه الأشكال توجد أيضاً دون شك في أول ترجمة لاتينية مفقودة لعلم الحساب عند الخوارزمي، على الرغم من احتواء هذه الترجمة على عناصر غريبة عن العلوم العربية وقبل أن يعطيها تحوير النساخ اللاتين الشكل الملاحظ عامة في المخطوطات المحفوظة. وقد حمل هذا التطور في

---

(٩١) هذه النظرية، التي تقدم عدة وجوه جذابة، قام بتوسيعها لوماي مع رسم، انظر: Lemay, «The Hispanic Origin of Our Present Numeral Forms,» pp. 435-462.

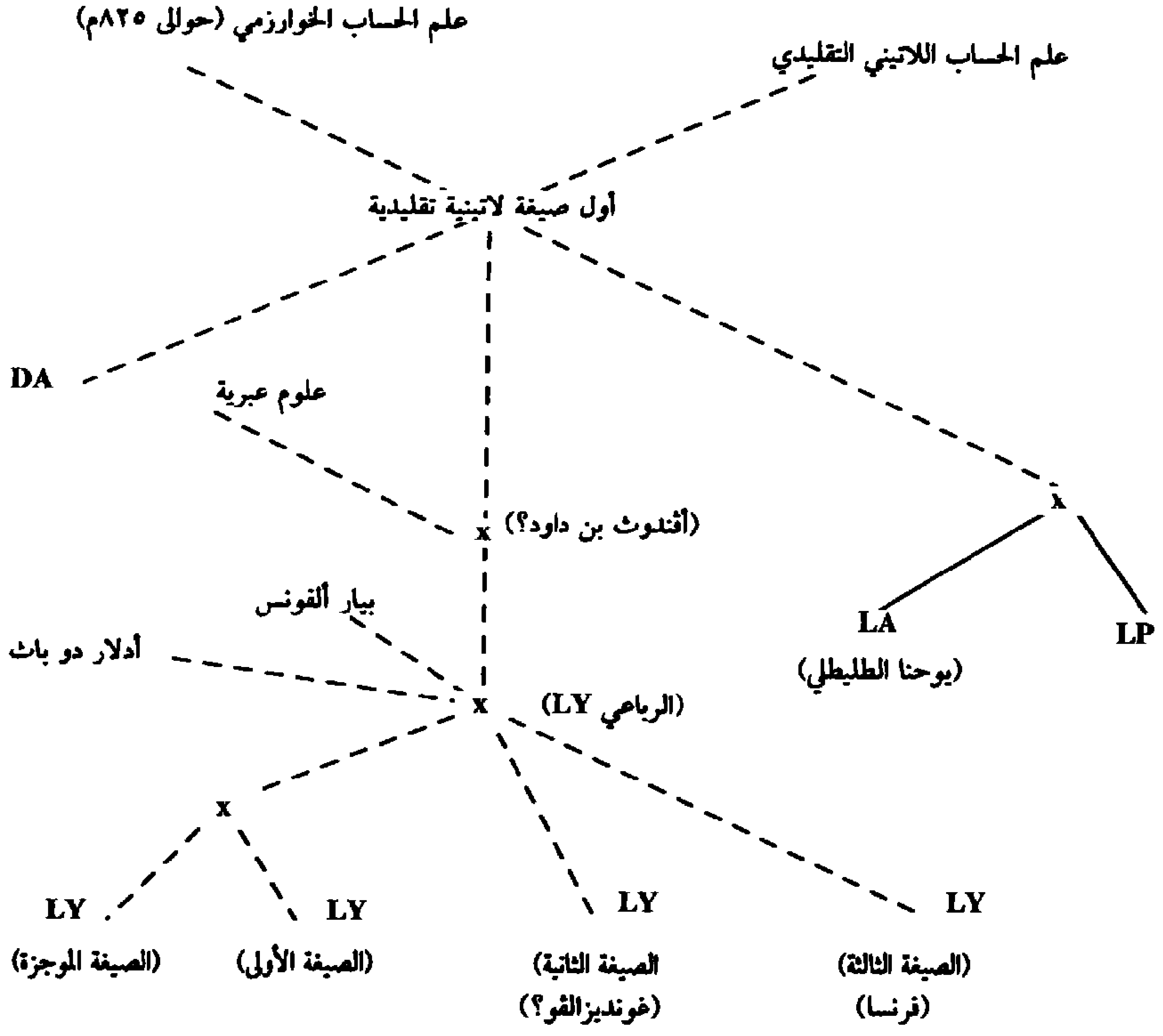
لكن المؤلف، المقتنع نهائياً بدور بيار ألفونس كمؤلف لـ *LY* ويوحنا الاشبيلي (المعروف حسب نفس المؤلف بجان دافيد ويوحنا الطليطلي) كمؤلف لـ *LA*، لم يكترث بالأرقام المميزة لـ *LP*. ويوجد عرض ممتاز عن الأرقام، مذكراً بأشكال أكثر قدماً، في: Guy Beaujouan, «The Transformation of the *Quadrivium*,» in: Benson and Constable, eds., *Renaissance and Renewal in the Twelfth Century*, pp. 469-470.

(٩٢) الجملة «et he sunt figure in quibus est illa diuersitas» مُتْبَعة مع الأسف بثغرة هامة في المخطوطة الوحيدة من كامبريدج. انظر: Allard, *Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarizmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*, p. 1.

النسخ بعض المؤرخين على الاعتقاد بأن هناك أنواعاً من الأرقام (لم يستطيعوا أن يلاحظوا تقاسمها لشكل مشترك)[٩٣]. وهكذا اختفت سريعاً ذكرى أولى الأشكال الطليطلية إلى درجة عدم الظهور مجدداً سوى عند بعض الشهود الواعين لترجمة الزرقالي ولِ **جداول طليطلة**.

ثالثاً: إرث الخوارزمي وغيره من المؤلفين العرب في علم الحساب الغربي

تدل العناصر التي ذكرنا، وبشكلٍ وافٍ، على أن النصوص اللاتينية من القرن الثاني عشر للميلاد المنتمية إلى إرث الخوارزمي، قد تعرضت لكثير من التطورات والتحولات خلال القرون الثلاثة التي تشكل الفاصل الزمني بينها وبين الأصل العربي المفقود. ويمكن تلخيص الشواهد الأساسية والتأثيرات الظاهرة في هذا التقليد بالجدول التالي، انظر الشكل رقم (١٦ ـ ١):



الشكل رقم (١٦ ـ ١)

(٩٣) وحده الشكل الثاني للصفر المذكور في مخطوطات الـ *LY* يُفلت من هذا التطور ويمكن أن يكون من أصل لاتيني.

وهكذا تكون مسألة مصادر النصوص اللاتينية المذكورة قد طرحت بشكل معقد. وهذه المسألة تزداد تعقيداً إذا خطر لنا أن المراجع العائدة للخوارزمي تصبح نادرة خارج الـ *DA*؛ (ومرة أخرى لا يمكننا أن نعلق أهمية بشكل قاطع على الـ *DA* لأننا نجد في هذا النص الناقص أثراً لعلم حساب لاتيني من تقليد بويس). وليس بالإمكان التأكيد أن الكلمات التالية التي استخدمت في القرن الثاني عشر: «alchorismus» أو «alchoarismus» والموجودة في عنوان المخطوطات الوحيدة للصيغة الثانية من الـ *LY*، أو «alchorismus»، أو «alghoarismus»، أو «algorismus» والموجودة في عنوان الـ *LA*، تدل على المؤلف العربي من القرن التاسع. وكانت هذه الكلمات تعني من دون شك «الحساب الهندي» أي الوسيلة الحسابية العملية المبنية على استعمال الأرقام التسعة والصفر، بعكس الأنظمة التقليدية لـ «abaque» وللحساب الإصبعي. ويجب بالتأكيد الاحتفاظ بالتأويل الثاني للعنوان المعطى لـ *LP* في النسخة الهجينة الموجودة في مخطوطة «Palatin 1393» من مكتبة الفاتيكان (Incipit algorismus). فهناك مقطعان يسمحان بإيضاح هذه المسألة: فبعد عرضه بالتفصيل وبعدة طرق عملية ضرب $٨\frac{١}{٢}\frac{١}{٤}\frac{١}{٥}$ بـ $٣\frac{١}{٣}\frac{١}{٩}$[٩٤]، قرر مؤلف الـ *LA* ضرب $٨\frac{٣}{١١}$ بـ $٣\frac{١}{٢}$[٩٥] محدداً بوضوح أن هذا المثل هو من عند الخوارزمي. وليس هذا الاستشهاد (وإن كان استشهاداً بالفعل) ذا أمانة مطلقة. إذ إن ما يقابله في الـ *LA* و*LY* وحتى في *LP*، وفي نفس الظروف، هو عملية ضرب $٣\frac{١}{٢}$ بـ $٨\frac{٣}{١١}$[٩٦]. ولكن مقطعاً آخر من الـ *LA* يبدو وكأنه يشير بوضوح إلى أن المؤلّف يعود إلى سلطة غير محددة[٩٧]. من جهة أخرى، وعلى الرغم من الحذر الذي ينبغي أن يرافق قراءة بعض المقاطع من **فهرست** ابن النديم، يدُلنا هذا المرجع على أن عدة مؤلفين كتبوا، بعد الخوارزمي وقبل القرن الثاني عشر، رسائل في الحساب الهندي[٩٨]. وهنا لا بد من إبداء ملاحظة أولية وهي أن الأمثلة الواردة في النصوص اللاتينية، عن العمليات الجارية على الأعداد الصحيحة تختلف تماماً بعضها عن

---

(٩٤) انظر: المصدر نفسه، ص ١٥١ - ١٥٥ و١٦٠ - ١٦٣.

(٩٥) المصدر نفسه، ص ١٦٣ - ١٦٦.

(٩٦) وهذا برهان إضافي، إذا لزم الأمر، على أن الـ *LP* لم تصدر عن الـ *LA* ولكن لهما فقط مصدر مشترك.

(٩٧) Similiter etiam idem est superioribus quod de diuisione docet dicens,

(«ما يعلمه بخصوص القسمة شبيه بما رأينا أعلاه»). انظر: المصدر نفسه، ص ١٦٨.

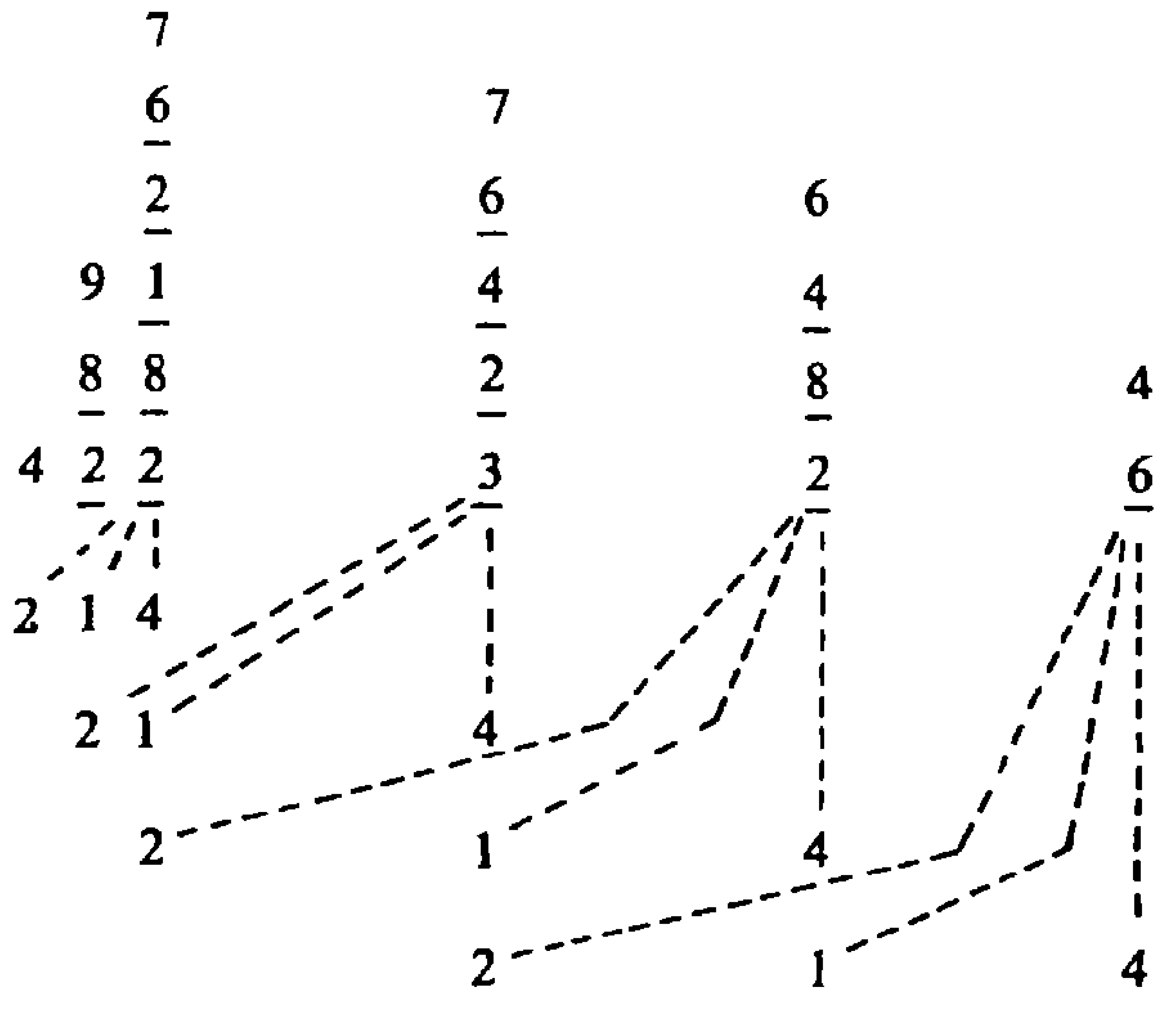
(٩٨) مثل: سند بن علي الصيدناني، وسنان بن الفتح، والكرابيسي، والأنطاكي، والكلوذاني. ويمكننا إضافة غيرهم من المؤلفين ممن نعرف اليوم أعمالهم. انظر: Kūshyār Ibn Labbān, *Principles of Hindu Reckoning*, translated by Martin Levey and Marvin Petruct (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1965),

النص العربي له حققه أحمد سعيدان ونشره في: **مجلة معهد المخطوطات العربية** (القاهرة) (أيار/مايو ١٩٦٧). انظر أيضاً: Abu al-Hassan Ahmed Ibn Ibrahim al-Uqlīdīsī, *The Arithmetic of al-Uqlīdīsī*, english translation by Ahmad S. Saīdan (Dordrecht, Boston: D. Reidel, 1978),

(توجد لائحة بالمؤلفات المعروفة حالياً، ص ٣ - ٥).

بعض؛ نستثني في عدة حالات (ولكن ليس في كل الحالات) الـ *LA* والـ *LP* اللذين لهما مصدر مشترك، كما نستثني عدة أمثلة عن استخراج الجذور التربيعية[٩٩] في فصول تلي تلك المكرسة للكسور.

وبالمقابل، نجد أمثلة عديدة مشتركة، في كل النصوص، عن الكسور الستينية والعادية. ولكننا لا نجد هذه أو تلك من الأمثلة في النصوص العربية في علم الحساب المنشورة اليوم والمختلفة أيضاً فيما بينها. فمن المرجح، إذاً، ألا يكون النص الأصلي للخوارزمي، على الأقل فيما يتعلق بالعمليات الأكثر بساطة، قد احتوى على أمثلة وإنما فقط، ومن دون شك بطريقة مقتضبة، على وصف للأساليب. وعلينا ألا نستبعد أن تكون أول صيغة لاتينية مفقودة قد ضمت للعمليات الأقل استعمالاً (المتعلقة بالكسور وباستخراج الجذور) أمثلة اختيرت كيفما اتفق، نعود ونجدها في النسخات التي تلتها. وهكذا نسير طبيعياً إلى الاستنتاج التالي: يمكن اعتبار الطرق التي وصفها بوضوح وبالطريقة نفسها المؤلفون العرب واللاتين فقط كطرق صادرة (بشكل مباشر أو غير مباشر) عن المؤلف العربي الأول الذي استلهم الطرق الهندية. هذا على الرغم من أن ترتيب عرض الطرق يختلف بشكل ملموس في المؤلفات العربية واللاتينية. ومن بين عمليات أخرى، كانت عملية ضرب الأعداد الصحيحة تتم في البدء فقط بأسلوب يعتمدُ على محو بعض الأرقام، كما يصفها الـ *DA* عند ضرب ٢٣٢٦ بـ ٢١٤؛ ومن الممكن تقديم هذه العملية كما في الشكل (١٦ ـ ٢) التالي[١٠٠]:



الشكل رقم (١٦ ـ ٢)

(٩٩) غير أننا لا نستطيع قول أي شيء عن الـ *DA* في هذا الفصل غير الموجود في مخطوطة كامبريدج.

(١٠٠) انظر: Allard, Ibid., pp. 9 - 10. =

ويمكن أن نستنتج من دراسة النصوص اللاتينية أن المؤلف العربي الأصلي قد ضم فصلين أحدهما عن الكسور الستينية[١٠١] والآخر عن الكسور العادية. وقد يكون هذان النوعان من الكسور قد اختلطا جزئياً، إذ إننا نجد داخل الفصل المكرس للكسور الستينية، في الـ *DA* و*LY* و*LA* و*LP* معاً، المثل عن ضرب $\frac{1}{2}$١ بـ $\frac{1}{2}$١ بواسطة الاختزال إلى الكسور الستينية، والحصول على ′١٥ °٢ وهو ما عُبر عنه فيما بعد بـ $\frac{1}{4}$٢ في الـ *DA* و*LA* و*LP* وإنما ليس في الـ *LY*. وعلى العكس، نجد في كلِّ مؤلف، بمعزل عن المؤلفات الأخرى، خصائص لا يمكن اعتبارها متأتية عن مصدرها البعيد، إذ لا وجود لهذه الخصائص في المجموعة من الشواهد. فهكذا نجد في الـ *LA* نظاماً من الكسور المتالية مرتكزاً على الجمع، كما في ضرب $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$٨ بـ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{3}$٣[١٠٢]، وذلك بطريقة مشابهة لتقسيم الكسور الستينية إلى دقائق وثوانٍ وثالثات (ثوالث). . .، ولكنه يعرض أيضاً نظاماً من «كسور الكسور»، كما في ضرب $\frac{3}{8}$.$\frac{1}{7}$.$\frac{1}{10}$ بـ ٤[١٠٣]. وعلينا أن نرى في طريقة التعبير هذه، الغائبة عن المؤلفات الأخرى وخاصة عن الـ *LP*، والثابت وجودها بشكل واسع طيلة القرون الوسطى والمثبتة كذلك في عدة مؤلفات عربية سبقت من بعيد مؤلفات الـ «algorismes» اللاتينية[١٠٤]، شاهداً لتقليد لا يرغب في رؤية عدد غير الواحد في صورة الكسر. من هنا فقد يقود فحص سريع للغاية لأعمال لاتينية في علم الحساب إلى رفض اعتبار بعض الفصول إرثاً عربياً (وهي فصول غير مثبتة في المؤلفات العربية المعروفة اليوم). كما قد يقود مثل هذا الفحص إلى نسب بعض الطرق الموصوفة بدقة فائقة في النصوص اللاتينية إلى مؤلفين عرب لاحقين للخوارزمي. ونحن نعتبر على العكس أن هذه الفصول تستحق كل اهتمام والحالة الحاضرة للمخطوطة الوحيدة المحتوية على الـ *DA* لا تسمح مع الأسف بدراسة هذه الفصول في هذا المؤلف، لأنها ناقصة. إن قاعدة التقريب للجذر التربيعي الأصم تعطي مثلاً واضحاً عن الشهادة التاريخية التي توفرها النصوص اللاتينية، وتدعى هذه القاعدة عند المؤلفين العرب «قاعدة الأصفار»؛ وهذه القاعدة موصوفة بدقة في كتب الـ *LY* والـ *LA* والـ *LP*. ففيما يتعلق، مثلاً، بالجذر التربيعي للرقم ٢[١٠٥]:

= نقل على التوالي الضارب درجة نحو اليمين؛ يُفترض بالأعداد المخطوط تحتها أن تُمحى لتحل محلها الأعداد التي فوقها. في الفصل نفسه، تضرب النسختان الأولى والثانية من الـ *LY* ١٠٢٤ بـ ٣٠٦، والنسخة الثالثة من الـ *LY* تضرب ٤٠٦ بـ ٢٠٤، والـ *LA* كما الـ *LP*، ١٠٤ بـ ٢٠٦.

(١٠١) اختراع هذه تنسبُه الـ *DA* والـ *LA* إلى الهنود، والـ *LP* إلى المصريين، ولا يتطرق الـ *LY* إلى هذا السؤال.

(١٠٢) انظر: Allard, Ibid., pp. 146-148.

تُربط الكسور المذكورة في هذا النظام بعضها ببعض بكلمة «et» (حرف الوصل «و»)، وحدها الـ *LA* تحتوي على أمثلة عن الكسور العادية المتالية.

(١٠٣) انظر: Allard, Ibid., pp. 158-159.

(١٠٤) انظر: Al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, pp. 60-63.

(١٠٥) انظر: Allard, Ibid., pp. 59-61 et 206-224.

يضع المؤلفون قبل العدد الصحيح عدداً مزدوجاً من الأصفار، فليكن ستة أصفار. فيما بعد يستخرجون بطريقة المحو التقليدية جذر العدد ٢٠٠٠٠٠٠ فيحصلون على العدد ١٤١٤ ويكون «الباقي ضئيلاً». ويعتبرون فيما بعد أن الوحدات والعشرات والمئات في العدد ١٤١٤ تطابق نصف عدد الأصفار الموضوعة سابقاً وأن الوحدة الباقية هي، إذاً، العدد الصحيح لجذر العدد ٢ التربيعي. وفيما بعد يتم تحويل العدد ٠,٤١٤ إلى كسور ستينية بالطريقة التالية: ٤١٤ × ٦٠ = ٢٤٨٤٠ وهو مؤلف من خمسة مواضع، أي بزيادة اثنين من نصف عدد الأصفار الموضوعة سابقاً، وهكذا يتم الحصول على أول جذر تقريبي ′٢٤ °١ ومن ثم ٨٤٠ × ٦٠... وهكذا دواليك للحصول نهائياً على الجذر التقريبي: ‴٢٤ ″٥٠ ′٢٤ °١.

وبعد ذلك تذكر الـ *LA* والـ *LP* (ولكن دون الـ *LY*) أنه بدل التحويل إلى كسور ستينية، يمكننا اختيار كسور يكون مخرجها ٢٠ أو ٣٠ أو أي عدد، مثل ٢٥٢٠ والذي تكمن فائدته في كونه يُقسم على جميع الأرقام من ١ إلى ١٠. وفيما بعد، تحدد الـ *LA* وحدها نظرتها إلى مسألة التعبير عن كسور الجذر التقريبي بطريقة مدهشة بالنسبة إلى ذلك العصر[١٠٦]. فإن اعتبار العدد ١ $\frac{٤}{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ $\frac{٤}{١٠٠٠}$، الناتجة عن الاستخراج، يعبر أيضاً عن الجذر التقريبي للعدد ٢، مما يدل على استيعاب المؤلف لمفهوم الكسور العشرية! وتجدر الملاحظة أن «قاعدة الأصفار» المعروضة أعلاه، بقيت مستخدمة لدى المؤلفين العرب حتى القرن العاشر للميلاد. ويمكن تقديم الصيغة العامة لهذه القاعدة على النحو التالي[١٠٧]:

$a^{\frac{1}{n}} = \frac{(a.10^{nk})^{\frac{1}{n}}}{10^k}$، حيث n وk تشيران إلى أعداد صحيحة.

ويحتوي مثل هذا التقريب حتماً على كسر عشري. وتكمن المسألة كلها مع ذلك في تحديد المدى الذي من خلاله تعرّف المؤلفون على التمثيل العشري للكسر دون الاضطرار إلى تحويله إلى كسر ستيني. ولقد برهن رشدي راشد في دراسة وافية عن الموضوع أنه يجب نسب اختراع الكسور العشرية لمدرسة الكرجي وبصورة خاصة للسموأل[١٠٨]، وليس لمؤلفين كالإقليدسي (حوالى ٩٥٢م)، ولا لمؤلفين غربيين مثل ستيفن (Stévin) (١٥٨٥م) أو بونفيس (Bonfils) (١٣٥٠م). ونعتقد أنه بالإمكان، استناداً إلى تحليل النصوص الأولى اللاتينية من القرن الثاني عشر للميلاد، أن نستنتج أن «قاعدة الأصفار»، التي نجدها في الـ *LY* والـ *LA* والـ *LP*، جميعها، قد ذكرت قبلاً في مؤلف الخوارزمي، ولكن التعبير عن

---

(١٠٦) Aut si hoc facere uolueris, denominabis illud quod remanserit scilicet quota pars sit illius numeri per quem diuidis,

(«أو إذا شئت، تُعطي للباقي مخرجاً يحدد قيمته العدد المقسوم عليه»).

(١٠٧) نذكر صيغة السموأل العامة، الشبيهة بصيغة النصوص اللاتينية، كما يذكر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 121.

(١٠٨) المصدر نفسه، ص ٩٣ - ١٤٥.

الباقي في هذا الكتاب اقتصر على الكسور الستينية. وتدفع الأفكار الخاصة بالـ *LA* وحده والغائبة عن الـ *LP* (مع أن مصدريهما اللاتينيين متطابقان) إلى نسب أول ظهور غربي للكسور العشرية إلى يوحنا الطليطلي في رسالته التي ألفها حوالى العام ١١٤٣م. فهل يدلّ هذا الأمر على ابتكار أصيل أم على انعكاس لتقليد عربي سابق وهو تقليد على الرغم من أنه لم يحدد هذه الكسور بوضوح قبل السموأل، ولكنه على الأقل اقترب منها. في غياب المستند الواضح لا يسعنا الجزم في هذه المسألة.

ولا يسعنا سوى تكرار التعبير عن الأسف لضياع مؤلفات الخوارزمي في علم الحساب. وعلى الأقل يمكننا التأكد من أن هذه المؤلفات، وعلى قدر مؤلّف الجبر للمؤلّف نفسه، تشكل مصدراً رئيساً لتطور لم يتوج سوى في القرن الثالث عشر للميلاد حيث ظهرت مؤلفات أقل شأناً من مؤلفات أواسط القرن الثاني عشر. من هذه المؤلفات كتاب *Algorismus Vulgaris* لجان دو ساكروبوسكو (Jean de Sacrobosco) وكتاب *Carmen de algorismo* لألكسندر دو ڤيل ديو (Alexandre de Ville dieu)، وكذلك أيضاً كتاب *Liber Abaci* لفيبوناتشي (Fibonacci) (على الرغم من أن الكتاب هذا كان أقل رواجاً بسبب صعوبته). ونتيجة للتعقيد في المصادر وللثغرات في المعلومات الحالية عن نقل الإرث العربي، لا بد من تحليل مقارن ومفصل لمحتوى الـ *algorismes* القديمة، إذا أردنا استخلاص عدد معين من الثوابت. إن حضور، أو غياب، خاصة من الخواص في عملية أو أخرى من العمليات الحسابية، يسمح بتحديد موقع كتاب ما إن بالنسبة إلى بقية المصادر أم بالنسبة إلى التيار العلمي الذي يعالجه هذا الكتاب[١٠٩]. فانطلاقاً من هذه المقاييس[١١٠] واستناداً إلى دراسة عملية طرح الأعداد الصحيحة، قمنا بتحديد مواقع المؤلفات التي تعتبر الأكثر قدماً كل منها بالنسبة إلى الآخر.

ويمكن تطبيق هذه المقاييس نفسها على مجموعة المؤلفات من القرنين الثاني عشر والثالث عشر للميلاد المكرسة للحساب الهندي والمعروفة حالياً وهي[١١١]:

Dixit Algorizmi (DA) (النصف الأول للقرن الثاني عشر).

Liber Ysagogarum Alchorismi (LY) (حوالى العام ١١٤٣م).

---

(١٠٩) في مبادئها، هذه الطريقة تطابق طريقة بينيديكت (Benedict)، انظر: S. R. Benedict, «Comparative Study of Early Treatises Introducing into Europe the Hindu Art of Reckoning,» (Thesis, University of Michigan, 1984);

ولكن الأخطاء العديدة الموجودة في هذا المؤلف تجعل من الخطورة الاستناد إليه. انظر: Allard, «A Propos d'un algorisme latin de Frankenthal: Une méthode de recherche,» pp. 119 - 141.

(١١٠) انظر الصفحة ٣ من هذا الفصل.

(١١١) لا بد من التسليم بأن هذه اللائحة ليست وافية بأي شكل: عدة نصوص في علم الحساب حيث تظهر أحياناً الآثار الأولى لتأثير جبر الخوارزمي أو أبي كامل، توجد مخطوطات لاتينية لم تنشر بعد.

Liber Alchorismi (LA) (حوالى العام ١١٤٣م).

Liber Pulueris (LP) (حوالى العام ١١٤٣م).

Algorisme latin de l'abbaye de Salem (القرن الثاني عشر؟)[١١٢].

Algorisme latin du British Museum Royal 15 B IX (القرن الثاني عشر؟)[١١٣].

Algorisme latin du British Museum Egerton 2261 (القرن الثاني عشر؟).

Algorisme français Bodleian Library Selden sup. 26 (القرن الثالث عشر؟)[١١٤].

Algorismus Vulgaris de Jean de Sacrobosco (القرن الثالث عشر)[١١٥].

Carmen de algorismo d'Alexandre de Ville dieu (القرن الثالث عشر)[١١٦].

Ars algorismi, Bib. Apost. Vatic. Palat. lat. 288 (القرن الثالث عشر)[١١٧].

وإذا قمنا بمقارنة منهجية للطرق الموصوفة في هذه المؤلفات[١١٨] وفي المقالات العربية المعروفة حالياً مثل كتاب **في أصول الحساب الهندي** لكوشيار بن لبان (القرن العاشر - القرن الحادي عشر للميلاد)[١١٩] أو **كتاب الفصول في الحساب الهندي** للإقليدسي (القرن العاشر للميلاد)[١٢٠]، نلاحظ، فيما يتعلق مثلاً بطرح الأعداد الصحيحة، تشابهاً ملفتاً للنظر في السير العام للعملية (ترتيب الأعداد وتسجيل النتائج واستعمال الصفر. . .). ويتعلق الفارق الأكثر بروزاً بطريقة بدء العملية، بيسار أو بيمين الأعداد. وتقتصر المؤلفات اللاتينية الأقدم، كما المؤلفات العربية على وصف الطريقة الأسرع وهي تقضي ببدء العملية من اليسار، أو تظهر على الأقل تفضيلها لهذه الطريقة *(LA)*. وتتميز الـ *LY* وحدها عن هذه المؤلفات، ولكننا نعلم أن مصادرها متشعبة ومعقدة،

---

(١١٢) انظر: Cantor, «Uber einen Codex des Klosters Salem,» pp. 3 - 16.

(١١٣) انظر: Louis Charles Karpinski, «Two Twelfth Century Algorisms,» *Isis*, vol. 3, no. 9 (Summer 1921), pp. 396-413.

(١١٤) انظر: Waters, «A Thirteenth Century Algorism in French Verse,» pp. 45 - 84.

(١١٥) انظر: Halliwell-Phillips, *Rara Mathematica*, pp. 1-26, and Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius una cum Algorismo ipso*, pp. 1-19.

(١١٦) انظر: Halliwell-Phillips, Ibid., pp. 73-83.

(١١٧) انظر: Allard, «A Propos d'un algorisme latin de Frankenthal: Une méthode de recherche,» pp. 128-140.

(١١٨) انظر الملاحظات المكملة لنشرة الـ *DA* والـ *LY* والـ *LA* والـ *LP* في: Allard, *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwarizmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle*, pp. 225 - 248.

(١١٩) Kūshyār Ibn Labbān, *Principles of Hindu Reckoning*.

(١٢٠) Al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*.

لذلك فهي لا تستطيع أن تشكل شهادة قاطعة على مصادرها العربية. ولم تتم القطيعة سوى في الأعمال الأحدث من نهاية القرن الثاني عشر أو بداية القرن الثالث عشر للميلاد والتي تبنت بشكل شبه إجماعي طريقة البدء من يمين الأعداد. ويبدو أيضاً أن «البرهان بالتسعة»، الذي كان يوصف في عمليات الضرب والقسمة أو استخراج الجذر، ليس مذكوراً، فيما يتعلق بالجمع وبالطرح، في الأعمال القديمة. فهو بالتالي غير مذكور في مؤلفات الخوارزمي (بخصوص الجمع والطرح). ولا شك أن هذا البرهان قد أدخل مؤخراً، بخصوص هاتين العمليتين، بالمماثلة مع عمليتي الضرب والقسمة.

وقد تسمح، دون شك، مقارنة منهجية لجميع المؤلفات العربية ولصيغها ومطابقاتها اللاتينية والعبرية، بين القرنين التاسع والثالث عشر للميلاد، بتكوين فكرة أوضح عن التطور العربي في الحساب الهندي وعن الفائدة التي جناها منه الغرب اللاتيني، هذا الغرب الذي واجه تقاليد عديدة كانت إجمالاً قابلة للتوافق.

إن ما ذكرنا من عناصر لا يشكل سوى مقاربة أولية متواضعة في موضوع تكثر فيه الفرضيات.

في الصفحات السابقة تكلمنا مطولاً عن كيفية ظهور أول تأثير لعلم الحساب العربي في الغرب وعن الأوساط التي ظهر فيها هذا التأثير. أما الآن فسوف نتحدث فقط عن النجاح وعن التحولات التي عرفها علم الحساب الغربي في القرون التي تلت هذا الظهور.

عرفت أساليب الحساب التي تستخدم الأرقام التسعة والصفر والتي تمارس بواسطة محو الأعداد على «لوح غبار»، انتشارها الأوسع بفضل مؤلفين مختصرين من بداية القرن الثالث عشر للميلاد: *L'Algorismus Vulgaris* لجان دو ساكروبوسكو (Jean de Sacrobosco) (John of Halifax) (ت نحو ١٢٥٦م)[١٢١] وكتاب *Carmen de algorismo* لألسكندر دو فيل ديو (Alexandre de Ville dieu) (Alexander de Villa Dei) (ت حوالى ١٢٤٠م)[١٢٢]. هذه الأساليب التي عرفها فيبوناتشي[١٢٣] ولم يوص باستخدامها، استمرت إلى ما بعد

---

(١٢١) Halliwell-Phillips, *Rara Mathematica*, pp. 1-26, and Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius una cum Algorismo ipso*, pp. 1-19. فما يقارب المئتي مخطوطة المعروفة اليوم والنشرات العديدة المتلاحقة بين العامين ١٤٨٨ و١٥٦٨م، المفهرسة من قبل سميث تدل بما فيه الكفاية على النجاح الشعبي للمؤلف. انظر: David Eugene Smith, *Rara Arithmetica* (Boston; London: Ginn and Co., 1908), pp. 31-33, reprinted (New York: [n. pb.], 1970).

(١٢٢) Halliwell-Phillips, Ibid., pp. 73-83.

يوجد عدد مرتفع جداً من مخطوطات هذا المؤلف وترجمات عديدة باللغات العامية، ويبدو أن أقدمها بالفرنسية يرقى إلى القرن الثالث عشر للميلاد.

(١٢٣) تمارس حسب المؤلف، in tabula dealbata in qua littere leuiter deleantur («على لوحة مبيضة حيث يمكن محو أحرف الكتابة بسهولة»). انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I:I liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 7.

استعمال الحبر والورق إذ إننا نراها موصوفة بدقة ومكيفة بحيث تتلاءم مع الورق، في علم الحساب التجاري الألماني لبيتر بيينيويتز (Peter Bienewitz) (Petrus Apianus) (العام ١٥٢٧م)(١٢٤)؛ تستعمل هذه الأساليب بشكل حصري وفيما يتعلق بالطرح، بعض المؤلفات النادرة من القرن الثاني عشر أو من بداية القرن الثالث عشر للميلاد، التي أتينا على ذكرها سابقاً. لكن هذه الأساليب لم تقض على استعمال اللوح الحسابي المعروف بالـ «abaque». وكان هذا الأخير يُطيل دائماً بعض العمليات، كالضرب أو القسمة، ويجعلها أحياناً عمليات شاقة فعلاً. فأخذت أساليبُ أخرى معروفة من المؤلفين العرب تفرض نفسها تدريجياً في الغرب؛ ويبدو واضحاً أن فيبوناتشي في كتابه *Liber Abaci*، عام ١٢٠٢م، كان رائداً في استخدام مثل هذه الأساليب؛ وهذا ما يظهر بوضوح من خلال أساليبه التي تتعلق بعملية ضرب الأعداد.

وقد أعطى يوحنا الطليطلي في تتمة كتابه *Liber Algorismi (LA)*، دليلاً على معرفته بأساليب لم تعد تستعمل محو الأرقام، وإنما بالأحرى جمع الحواصل الجزئية، إذ إننا نقرأ فيها(١٢٥): $23.64 = 4.3 + 10(6.3 + 4.2) + 100(6.2)$، ويستخدم ساكروبوسكو الأسلوب نفسه في قاعدته السادسة عن الضرب(١٢٦). ولكن هذين المؤلّفين يحصران هذا الاستعمال في الأعداد المؤلفة من وحدات وعشرات. إننا نجد هذه الطريقة نفسها موسعة بحيث تشمل الأعداد أياً تكن، في حساب الرياضي العربي الإقليدسي (نحو ٩٥٢م)، تحت اسم «طريقة المنازل». وهذه الطريقة مبينة عن طريق ضرب العددين ٧٢٥٤ و٤٨٢٣ (تُكتب الحواصل الجزئية في مربعات تتوالى مع مضاعفات العشرة وبدءاً من اليمين)(١٢٧):

48	23	12

...

أي $7254.4823 = 3.4 + 10(3.5 + 2.4) + 100(3.2 + 8.4 + 2.5)...$

$$= 12 + 10.23 + 100.48....$$

وهذه الطريقة هي بالضبط الطريقة الأولى التي يقترحها فيبوناتشي في كتابه *Liber Abaci* (عام ١٢٠٢م) حيث يضرب ٦٠٧ بـ ٦٠٧(١٢٨). ونعود فنجد نفس الطريقة (بتأثير من

---

(١٢٤) وهكذا فبتلاؤمه مع استعمال الورق، يأخذ أسلوب الضرب بالمحي عند بيينيويتز (Bienewitz) الاسم المجازي «الضرب على شكل سفينة شراعية».

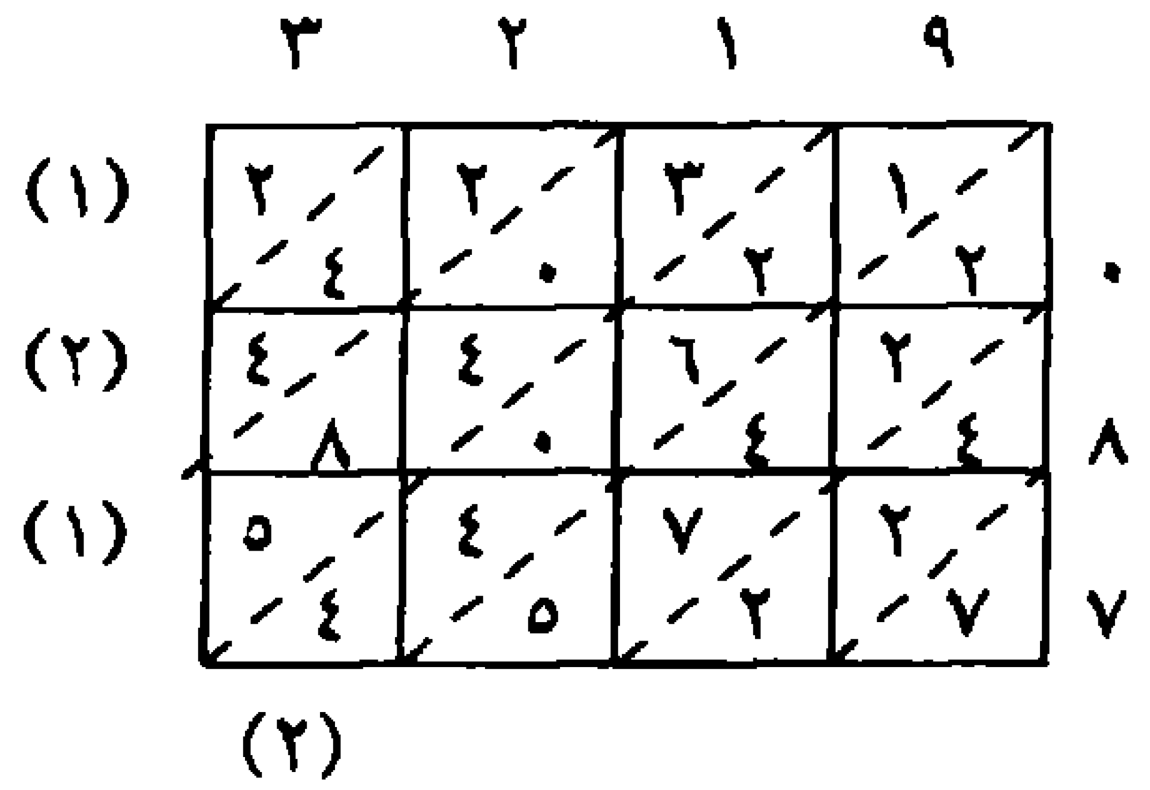
(١٢٥) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice,* pp. 119-120.

(١٢٦) انظر: Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius una cum Algorismo ipso*, p. 9.

(١٢٧) انظر: Al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, p. 387

(١٢٨) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I:I liber abacci. II:Practica* = *geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 12.

فيبوناتشي) في أول رسالة بيزنطية، مجهولة الكاتب، عن الحساب الهندي في العام ١٢٥٢م[١٢٩]، ومن ثم في رسالة لمكسيم بلانود (Maxime Planude) (نحو ١٢٩٢م)[١٣٠]. ونجدها أخيراً في مؤلفات متأخرة، إيطالية أو ألمانية كالتالية: *L'Arithmétique de Trévise* (العام ١٤٧٨م) و*L'Arithmétique de Bamberg* (العام ١٤٨٣م) ومؤلفات بيارو بورغي (Piero Borghi) (العام ١٤٨٤م) وفرنشيسكو بيللوس (Francesco Pellos) (العام ١٤٩٢م) ولوقا باشيولي (Luca Pacioli) (العام ١٤٩٤م) وأخيراً نيكولو تارتاغليا (Niccolo Tartaglia) (العام ١٥٥٦م). ولكن، كان لا بد لـ«طريقة المنازل» هذه أن تفرض نفسها خاصة على شكل شبكة حيث تسجّل الحواصل الجزئية ويكفي فيما بعد جمعها وربما لتُعاد إليها قيمتها الوضعية. فعلى هذا الشكل قدم الإقليدسي، مثلاً، عملية ضرب ٥٦٧ بـ ٤٦٨، أو ضرب ٦٥٨٣ بـ ٤٨٩. ويمكن عرض هذه الطريقة كما يلي[١٣١]:



(٦ × ٤ = ٢٤؛ ٥ × ٤ = ٢٠...)

(٦ × ٨ = ٤٨؛ ٥ × ٨ = ٤٠...)

(٦ × ٩ = ٥٤؛ ٥ × ٩ = ٤٥...)

= نحن لا نقصد على الإطلاق أن نظهر استعمال فيبوناتشي لهذا أو ذاك من النصوص العربية، كعلم الحساب للإقليدسي، بقدر ما نريد التدليل على أن أساليب الحساب المستعملة منذ أمد بعيد في العالم العربي استُعيدت من قبل الغرب في القرون الوسطى. وقد استطاع الغرب التعرف عليها بالنصوص كما بالاحتكاك مع العالم الإسلامي.

(١٢٩) انظر: André Allard, «Le Premier traité byzantin de calcul indien: Classement des manuscrits et édition critique du texte,» *Revue d'histoire des textes*, vol. 7 (1977), pp. 83-87.

(١٣٠) انظر: André Allard, *Maxime Planude: Le Grand calcul selon les indiens*, Travaux de la faculté de philosophie et lettres de l'université catholique de Louvain; XXVII (Louvain-la-Neuve: Publications universitaires, 1981), pp. 56-74.

(١٣١) انظر: Al-Uqlīdisī, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, pp. 136-137.

الرسم الذي نقترح هو الشرح لإحدى طرائق الإقليدسي في جمع «المنازل»، ولا تظهر الأقطار في رسوم النص نفسه.

(جمعُ الأعداد ورباً، بدءاً من المربع السفلي على اليمين، وتسجيل الوحدات، يوفران الحاصل المطلوب وهو ٣٢١٩٠٨٧).

يسمي فيبوناتشي هذه الطريقة **طريقة شكل الشطرنج** حيث يستخدمها في عملية ضرب ٤٣٢١ بـ٥٦٧[١٣٢]. وقُدمت الطريقة عينها، تحت أشكال متقاربة وخاصة تحت شكل يسمى «الخيمة أو الحصيرة» (jalousie) أو «الشبكة» (grillage)، والتي لا تختلف عن الطريقة السابقة سوى بتسجيل جميع الأعداد. وهذه الأشكال مذكورة في العديد من المؤلفات الغربية التي أخذت تتخلى عن العمل بطريقة المحو؛ ولن نذكر من هذه المؤلفات إلا بعضها والأكثر شهرة وهي مؤلفات نيكولا شوكه (Nicolas Chuquet) (العام ١٤٨٤م) ولوقا باشيولي (Luca Pacioli) (العام ١٤٩٤م) ونيكولو تارتاغليا (Niccolo Tartaglia) (العام ١٥٥٦م)[١٣٣]. وفي الأزمنة نفسها بقي مؤلفون عرب عديدون مثل ابن البناء (ت ١٣٢١م) والكاشي (ت ١٤٢٩م) وبهاء الدين (ت ١٦٢٢م) على أمانتهم لهذه الطريقة[١٣٤].

إن عملية الضرب التي فصلنا تكفي لإعطاء فكرة عن التأثير الذي مارسه الخوارزمي وخلفاؤه على الغرب في القرون الوسطى. فبدءاً من النسخات اللاتينية الأولى في القرن الثاني عشر للميلاد، مروراً بالأعمال المعدة جيداً في علم الحساب التجاري الإيطالي في نهاية القرون الوسطى، وصولاً إلى عصر النهضة، يظهر كل الحساب الهندي كما أعده المؤلفون العرب في المؤلفات باللغة اللاتينية ومن ثم باللغات المحلية. وليس بالإمكان إلى يومنا هذا أن ندل تماماً على النصوص أو على المؤلفين أو حتى على الصلات والأقنية التي سمحت بهذا التطور الذي ذكرنا مراحله الأساسية؛ ولكن هذا الحدث أمر مؤكد.

رابعاً: إرث المؤلفين العرب في الهندسة في الغرب في القرون الوسطى

لقد لمحنا سابقاً ولعدة مرات إلى أن أوائل المؤلفين الغربيين الذين كتبوا في الحساب الهندي قد اطلعوا على أقدم الصيغ اللاتينية الصادرة عن ترجمة عربية لأعمال إقليدس. وفي هذا المجال، أشرنا بشكل خاص إلى القسم الهندسي الموجود في الصيغة الثانية من **الرباعي** الذي يتضمنه الـ *(LY) Liber Ysagogarum Alchorismi*. تحمل هذه التلميحات على الاعتقاد

---

(١٣٢) انظر: Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, p. 19.
هذه هي الطريقة التي ستدعى في فلورنسا «قالب سكر» (Per Bericuocolo).

(١٣٣) حتى أننا نجد طريقة «Gelosia» في مخطوطة بيزنطية دون شك من نهاية القرن الرابع عشر للميلاد. انظر: André Allard, «Les Procédés de multiplication des nombres entiers dans le calcul indien à Byzançe,» *Bulletin de l'institut historique Belge de Rome*, vol. 43 (1973), pp. 120-131.

(١٣٤) إنها طريقة «شبكة الصياد» Filet de Pêcheur للمؤلفين العرب.

أن الغرب، في هذا المجال أيضاً، كان مديناً للمؤلفين العرب في اكتشاف هندسة إقليدسية حقة. وتدل الدراسات التي أجريت على أنه قبل القرن الثاني عشر للميلاد، لم يتداول العلميون سوى بعض التحديدات الإقليدسية النادرة التي قام بتجميعها نحويون وعكستها بعض المقاطع من مؤلفات كاسيودور (Cassiodore) (ت نحو ٥٨٠م) أو إيزيدور الإشبيلي (Isidore de Séville) (ت نحو ٦٣٦م). وليس الكتاب السادس من *De nuptiis philologiae et Mercurii* لمارتيانوس كابللا (Martianus Capella) (نحو ٤٧٠م)، على الرغم من دلالة عنوانه الهندسية *De geometria*، سوى مجموعة غامضة لهذه التحديدات، غير المفهومة غالباً؛ وهو لا يحتوي إلا على مسألة واحدة من أبسط المسائل[(١٣٥)]. نشير هنا إلى عدم استخدام المصادر المتوفرة على الوجه الأفضل. فمن القسم الرياضي للمؤلّف الروماني *Corpus* des *Agrimensores*[(١٣٦)]، لم تُستخدم سوى بعض المعطيات كالقياس المقتضب لمساحة الدائرة أو قياس حجم الكرة؛ أما مبرهنة فيثاغورس التي حواها هذا المؤلف والتي لا شك في أهمية تطبيقاتها، فبقيت مجهولة حتى من فرانكون دو لياج (Francon de Liège) (ت نحو ١٠٨٣م)[(١٣٧)]. وما من شك بأن بويس (ت نحو ٥٢٤م) قد قام بترجمة إقليدس، على الأقل جزئياً، كما يؤكد كاسيودور[(١٣٨)]. ولكن المؤلّف المعروف بـ**الهندسة I** *(Géométrie I)*[(١٣٩)] والمنسوب إلى بويس ينتمي جزئياً إلى الكتاب الأول من مؤلف

---

(١٣٥) Quemadmodum potest super datam directam terminatam lineam trigonum aequilaterum constitui.

(«بناء مثلث متساوي الأضلاع على خط مستقيم مُعطى») انظر: J. Willis, *Martianus Capella*. (Leipzig: [n. pb.], 1983), p. 258.

وقام ستال (Stahl) بتحقيق مجمل عن العلوم الرومانية في القرون الوسطى. انظر: William Harris Stahl, *Roman Science: Origins, Development and Influence to the Later Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin, 1962).

(١٣٦) عرفه مثلاً راوول دو لياج (Raoul de Liège) (حوالى العام ١٠٢٥م) تحت اسم «Podismus»، ربما بالرجوع لمؤلف ماركوس جونيوس نيبسوس (Marcus Junius Nipsus).

(١٣٧) نلاحظ أيضاً أن قيمة π عند هذا المؤلف قد أُعطيت كـ $3.24 = (9/5)^2$. وكتيبه *De quadratura circuli* المهدى إلى هرمان (Hermann)، رئيس أساقفة كولونيا (العام ١٠٣٦ - ١٠٥٦م) لم ينتج عن مؤلف في الهندسة، ولكن عن شرح بويس (Boèce) لكتاب *Catégories* لأرسطو؛ انظر: Menso Folkerts and A. J. E. M. Smeur, «A Treatise on the Squaring of the Circle by Franco of Liege of about 1050,» *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 26, no. 98 (1976), pp. 59-105, et vol. 26, no. 99 (1976), pp. 225-253.

وفيه يعتبر تقريب أرخيدس قيمة صحيحة، وكذلك الصيغة عن مساحة الدائرة التي نقلتها الـ *Agrimensores*، وهي ١١ مرة مربع القطر مقسوماً على ١٤، المطابقة لتقريب لـ π مساوٍ لـ 3.1429.

(١٣٨) انظر: Folkerts, *«Bœthius» Geometrie II; Ein Mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, p. 69.

(١٣٩) حسب التسمية التقليدية منذ «Bubnov» أو *Demonstratio artis geometricae* في:

= Friedrich Blume, K. Lachmann and A. Rudorff, *Die Schriften der Römischen Feldmesser*, 2 vols.

والكتاب الخامس من مؤلف *Altercatio*؛ وهو يحتوي على مقتطفات *Agrimensores* من حساب إقليدس (الكتاب الثاني)، كما أنه يقدم من دون أدنى برهان التحديدات والمصادرات والموضوعات ومعظم القضايا من الكتب الأربعة الأولى من **الأصول** (الكتاب الثالث والرابع وبداية الكتاب الخامس). ويصح نفس القول في كتاب **الهندسة II** المؤلف في لوثارنجيا (Lotharingie) في النصف الأول من القرن الحادي عشر للميلاد استناداً إلى رسالة جيربير عن وسائل الـ «abaque»، وإلى كتاب *Agrimensores*، وإلى مقتطفات من إقليدس شبيهة بالمقتطفات الموجودة في الـ *Géometrie I*(١٤٠).

قبل نهضة القرن الثاني عشر، اقتصر إذاً انعكاس أعمال إقليدس في الغرب على هندسة عملية ومختصرة. فانطلاقاً من هذا الوضع يجب النظر إلى مدرسة جيربير (ت ١٠٠٣م) في مدينة ريمس الفرنسية أو إلى مدرسة تلميذه فولبير (Fulbert) (حوالى ٩٦٥ ـ ١٠٢٨م) في مدينة شارتر (Chartres). ويجب ألا يُبحث عن سبب هذا الفقر العلمي في بداية القرون الوسطى إلا عبر الغياب شبه التام للنصوص العلمية. وقد حصر هذا النقص المؤلفين في حدود فن الحساب، حيث أبدعوا أحياناً، ولكنه تركهم في غربة عن التفكير البرهاني(١٤١). وهكذا كان اكتشافُ الغرب اللاتيني في القرن الثاني عشر للميلاد للترجمات العربية لإقليدس نقطة انطلاق ثورة علمية. ومنذ العام ١٨٨٠م، لفت ويسنبورن (Weissenborn) الانتباه إلى ترجمة لاتينيـة لـ **الأصول** قام بهـا أدلار دو باث(١٤٢)،

(Berlin: Reprografischer Nachdruck der Ausg., 1848-1852), vol. 1, pp. 377-412.

والتي وصفها تانري (Tannery) بـ «شبه ـ هندسة» «Pseudo -Géométrie» انظر: Paul Tannery, «Notes sur la pseudo-géometrie de Boèce,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 1 (1900), réimprimé dans: *Mémoires scientifiques*, vol. 5, pp. 211-228.

(١٤٠) حول محتوى المؤلف، انظر: Folkerts, Ibid., pp. 69-104.

(١٤١) انظر مثلاً تركيب هالّو عن علماء الرياضيات اللياجيين (Liégeois) من القرنين العاشر والحادي عشر للميلاد، في: R. Halleux, «L'Apport scientifique jusqu'à la fin du XVe siècle,» dans: *La Wallonie: Le Pays et les hommes: Lettres, arts, culture* (Bruxelles: La Renaissance de livre, 1977), pp. 489-496.

من جهة أخرى، تشهد فقرة من ترجمة لاتينية من القرن السادس لـ **أصول** إقليدس في مخطوطة على طِرس من فيرونا (Vérone) على معرفة أفضل بكثير بهندسة إقليدس؛ ولكن لم يبق على الأكيد إلا القليل من هذه المعرفة بين القرنين التاسع والثاني عشر للميلاد في مختارات مجمعة تسيطر فيها مقتطفات من الـ *Arigmensores*. انظر: Marius Geymonat, *Euclidis latine facti fragmenta Veronensia* (Milano: Instituto Editoriale Cisalpino, 1964).

(١٤٢) انظر: H. Weissenborn, «Die Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath,» *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-Literarische Abteilung*, Bd. 25 (1880), pp. 143-166.

هذه الترجمة التي حجبها في ذلك الوقت المؤلّف المعروف بتفسير كمبانوس دو نوڤارا (Campanus de Növara) (نحو ١٢٥٥م) الذي حظي بانتشار واسع. وكذلك لفت «بجورنبو» Björnbo الانتباه إلى ترجمة لاتينية مماثلة قام بها جيرار دو كريمون (Gérard de Crémone)، وكان هو مكتشفها في العام ١٩٠١[١٤٣]. إلا أن م. كلاغيت (M. Clagett) في العام ١٩٥٣[١٤٤]، ومن بعده ج. أ. موردوخ (J. E. Murdoch) في العام ١٩٦٨[١٤٥]، سلطا أولى الأضواء المهمة على الاكتشاف المجدد لأعمال إقليدس في الغرب في القرون الوسطى. ومنذئذٍ تحاول أعمال مهمة جارية إلى الآن إعطاء رؤية واضحة عن عدة نصوص إقليدسية من القرنين الثاني عشر والثالث عشر للميلاد[١٤٦]. وسنلخص فيما يلي النتائج الأساسية لهذه الدراسات.

تحققت عدة ترجمات عربية لـ **أصول** إقليدس انطلاقاً من مخطوطات يونانية كانت موجودة في ظل الإمبراطورية البيزنطية[١٤٧]. وقد حقق الحجاج (نحو ٧٨٦ - ٨٣٣م) ترجمة أولى منها، مفقودة اليوم، وثانية أقصر منها في زمن خلافة المأمون، قام بشرحها النيريزي (ت نحو ٩٢٢م). وأنجز إسحق بن حُنين (ت ٩١٠م) ترجمة أخرى لم تُذكر إلا في مراجعةٍ لثابت بن قُرة (ت ٩٠١م)؛ وقام قسطا بن لوقا (ت نحو ٩١٢م) في بغداد بترجمة الكتابين الرابع عشر والخامس عشر غير الإقليدسيين، وتحمل بعضُ أجزاءٍ من النصوص على الاعتقاد بوجود ارتباط بين هذه الترجمات. فقد تكون بعض المخطوطات من مراجعة ثابت بن قُرة متأتية من ترجمة الحجاج، وعلى الأخص في القسم الحسابي من **الأصول** (الكتب من السابع إلى العاشر)[١٤٨].

---

(١٤٣) انظر: Axel Anthon Björnbo «Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 6 (1905), pp. 239-248.

(١٤٤) انظر: Clagett, «The Medieval Latin Translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with Special Emphasis of the Versions of Adelard of Bath,» pp. 16 - 42.

(١٤٥) انظر: J. E. Murdoch, «The Medieval Euclid: Salient Aspects of the Translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara,» *Revue de synthèse*, vol. 89 (1968), pp. 67-94.

(١٤٦) هذه الأعمال، المرتكزة على دراسة لعدة مخطوطات، عائدة بنوع خاص إلى ر. لورش (R. Lorch)، و س. بيرنت (C. Burnett)، و م. فولكرتس (M. Folkerts)، وهـ. ل. بوزار (H. L. L. Busard).

(١٤٧) والصيغة العربية لإقليدس الأكثر انتشاراً هي نسخة الطوسي التي أتت بعد المؤلفات اللاتينية المدروسة هنا. يوجد أيضاً نسخة منسوبة خطأً للطوسي ومطبوعة في روما منذ العام ١٥٩٤م.

(١٤٨) انظر: G. De Young, «The Arabic Textual Traditions of Euclid's *Elements*,» *Historia Mathematica*, vol. 11 (1984), pp. 147-160, and Paul Kunitzsch, «Findings in Some Texts of Euclid's Elements,» in: Menso Folkerts and U. Lindgren, eds., *Mathemata. Festschrift. für. H. Gericke* (Stuttgart: [n. pb.], 1985), pp. 115 - 128.

واستخلص الغرب في القرون الوسطى فائدة جلى من هذه الترجمات لـ **الأصول**. فقد شاع نسب ثلاث صيغ لاتينية من إقليدس (المعرّب) إلى أدلار دو باث (نحو ١٠٨٠ ـ ١١٥٠م)[(١٤٩)]، وذلك بالإضافة إلى صيغة *(LY) Liber Ysagogarum* المتعارف أيضاً على نسبها للمؤلف نفسه[(١٥٠)]. تعود صيغة أخرى من دون شك لهرمان الكورنثي (Hermann de Carinthie) (نحو ١١٤٠ ـ ١١٥٠م)[(١٥١)]، وأنجز أيضاً واحدة منها جيرار دو كريمون (نحو ١١١٤ ـ ١١٨٧م) وهو مترجم غزير الإنتاج[(١٥٢)]. والصيغة المسماة أدلار I، في القسم الأكبر منها، تشكل ترجمة قريبة من مراجعة ثابت بن قرة، أو عبرها من ترجمة إسحق ابن حنين؛ ولكن بعضاً من مقاطعها أقرب إلى تقليد الحجاج[(١٥٣)]. يتعلق الأمر، إذاً، بنسخة هجينة وُضعت على الأرجح في الربع الثاني من القرن الثاني عشر للميلاد، ويبدو أنها غير عائدة لأدلار نفسه وتحتوي على الكتابين الرابع عشر والخامس عشر غير الإقليدسيين؛ ولكنها لا تضم الكتاب التاسع ولا «القضايا» من الأولى إلى الخامسة والثلاثين من الكتاب العاشر لـ **الأصول**. وعرفت النسخة أدلار II، التي يبدو فعلاً أنها عائدة لأدلار دو باث، نجاحاً واسعاً في القرون الوسطى، ولكن تاريخها نادرُ التعقيد؛ وما نعرفُ اليوم يدل على أنها تعرضت لعدد من الترميمات[(١٥٤)]. وعلى الرغم من أن اسم أدلار، على ما يبدو،

---

(١٤٩) رُتبت هذه الصيغ حسب الترقيم الأول والثاني والثالث منذ مقالة كلاغيت الرئيسية. انظر: Clagett, «The Medieval Latin Translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with Special Emphasis of the Versions of Adelard of Bath,» pp. 16 - 42.

(١٥٠) حسب: Folkerts, «Adelard's Versions of Euclid's *Elements*,» p. 63.

لقد فصلنا في الفصل الأول محتوى الصيغة *LY* وما يمكن أن يعود فيها إلى أدلار، ويبدو لنا عدم إمكانية إثبات الأطروحة التي تجعل من أدلار دو باث (Adélard de Bath) مؤلفاً لـ *LY*.

(١٥١) انظر: H. L. L. Busard, ed., *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia*, books 1-6 (Leiden: Brill, 1968), books 7 - 12; (Amsterdam: [n. pb.], 1977).

النسبة لهرمان الكورنثي (Hermann de Carinthie) تقليدية منذ أعمال بيركنماجر (Birkenmajer) على مكتبة ريشار دو فورنيفال (Richard de Fournival). انظر: Haskins, *Studies in the History of Mediaeval Science*, p. 50.

(١٥٢) انظر: H. L. L. Busard, *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona* (Leiden: Brill, 1984).

مخطوطات أخرى ذكرها المحرر منذ ما بعد هذه الطبعة. انظر: H. L. L. Busard, «Some Early Adaptations of Euclid's Elements and the Use of Its Latin Translations,» in: Folkerts and Lindgren, eds., *Mathemata. Festschrift für H. Gericke*, pp. 130-131.

(١٥٣) انظر: Kunitzsch, «Findings in Some Texts of Euclid's Elements,» pp. 115 - 128 and R. Lorch, «Some Remarks on the Arabic-Latin Euclid,» in: Burnett, ed., *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Twelfth Century*, pp. 47-53.

(١٥٤) قام م. فولكرتس وهـ. ل. بوزار بتحضير الطبعة المحققة لهذا النص انطلاقاً من ما يقارب ٥٤ =

مذكور فيها، فقد تكون مختلفة المصادر؛ وهذا أمر غير مستغرب بالنسبة إلى مؤلفات القرون الوسطى. وقد يكون بين هذه المصادر بويس أو مصدره نيقوماخوس (Nicomaque) وشيشرون (Cicéron)[(١٥٥)]؛ وكذلك فقد يكون بينها إغبريكس (Eggebericus) ورجينرس (Reginerus) وهو اسم لم نستطع تحديد هويته[(١٥٦)]، وأوكريتس (Ocreatus) (أو أوكريا (Ocrea))، الذي قد يكون نيكولا أوكريتس (Nicolas Ocreatus)، تلميذ أدلار والذي أهداه مقالته في علم الحساب[(١٥٧)]، وروبرتوس دو ماريسكو (Robertus de Marisco) - الذي من المحتمل أن يكون روبير مارش (Robert Marsh)، قريب روبير غروستست (Robert Grosseteste) (ت ١٢٥٣م) ورئيس شمامسة أوكسفورد[(١٥٨)]. وهذه الصيغة الثانية، وتحت شكل قد يكون أقدم من الشكل الذي تقدمه اليوم المخطوطات المتوفرة، قد تُرجمت من دون شك من العربية، على الرغم من عدم غياب تأثير إغريقي لاتيني فيها[(١٥٩)]. وهناك صيغة ثالثة، شديدة الاختلاف عن الأولى، تعيد ما نجده في الثانية من تحديدات ومصادرات وموضوعات ونصوص قضايا مضيفةً إليها براهين عدة. وقد عرف روجر بيكون (Roger Bacon) (نحو ١٢١٤ - ١٢٩٢م) هذه الصيغة *(III)* على أنها *editio specialis Alardi Bathoniensis*[(١٦٠)].

= مخطوطة؛ وهذه الطبعة على قدر كبير من الأهمية في تاريخ العلوم في القرون الوسطى. لا يسعنا سوى التذكير فيما يخصها ببعض العناصر المعروفة. ونشير إلى أن طبعة غولدات (G. D. Goldat) غير المنشورة ليست إلا نسخاً لمخطوطة واحدة. انظر: G. D. Goldat, «The Early Medieval Tradition of Euclid's *Elements*,» *(Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1954)*.

(١٥٥) انظر: *Pinguis Minerua* في المقالة الحادية عشر، ٢١ (= *De Amicitia*، ٧، ١٩). ويظهر القول نفسه في الـ *De eodem et diuerso* لأدلار دو باث (Adélard de Bath).

(١٥٦) القضية العاشرة، ٤٢، ومقدمة الكتاب العاشر.

(١٥٧) نسوق هذه الفرضية بحذر شديد: تذكر المخطوطات بالتمام «ex (أو in) Ocrea Johannis»، مما يجعل صعباً، من الناحية النحوية، مجرد الرجوع إلى يوحنا أوكريتس (Jean Ocreatus) أو إلى نيكولا أوكريتس (Nicolas Ocreatus). ومن الممكن إيجاد جواب على هذه المسألة في الأوراق الثلاث الأولى من مخطوطة من القرن الثاني عشر للميلاد، Cambridge Trinity College، حيث يُذكر ألاردس (Alardus) وجوهانس (Johannes) كهندسيين. وتبقى غامضة مراجع أخرى في ختام الكتاب العاشر: «Lincol» (Lincol <niensis>?), «Zeob», «Rog» (Rog <erius>?), »Hel» (Hel <iensis>?).

(١٥٨) انظر: Folkerts, «Adelard's Versions of Euclid's *Elements*,» p. 64, note (55).

(١٥٩) إلى جانب التعابير المميزة مثل التعبير XIII، ٧: «wa delicah me aradene en nubeienne»، نجد غالباً عبارات مستعملة مثل «hypothenusa» و «ysosceles»، . . . الخ التي لا تظهر أبداً في النسخة الأولى.

(١٦٠) لكن روجر بيكون (Roger Bacon) استعمل بكل تأكيد المخطوطة ١٦٦٤٨، مكتبة باريس الوطنية والتي يتحدث قلفوتها عن *editio*. وقام كلاغيت بنشر مقدمة النص، في: Marshall Clagett, «King Alfred and the *Elements* of Euclid,» *Isis*, vol. 45, no. 141 (September 1954), pp. 273-277. يوجد، علاوة على ذلك، مجموعة مبعثرة من المسائل الهندسية تحت عنوان «Bathon (Bachon?) Alardus in 10 Euclidis?» في مخطوطة مكتبة فلورنسا الوطنية (Conv. soppr. J IX 26 (folios 46 - 55) =

وتبدو هذه الصيغة كشرح أكثر مما تبدو كترجمة مستقلة، على الرغم من احتوائها على تعابير عربية غير موجودة في الصيغة *(II)*.

ولكن الترجمة المنسوبة إلى هرمان (Hermann) والمعروفة عبر مخطوطة واحدة، والتي تنقصها الكتب من الثالث عشر إلى الخامس عشر من **الأصول**، عرفت نجاحاً أقل كثيراً من سابقاتها. وقد دلت دراسات حديثة أُجريت أساساً على نصوص التحديدات، على وجود علاقات أكيدة بين صيغة هرمان وبعض المقاطع من الصيغة المُزادة من الـ *LY* والصيغتين الأولى والثانية الأدلاريتين. ويبدو واضحاً أن الصيغة (II) لأدلار تحتل مركزاً وسطاً بين الصيغة *(I)* وصيغة هرمان، وأن بعض مقاطعها قد استُعيدت في الصيغة المزادة من الـ *LY*(١٦١). ويبرهن الناشر أن نص هرمان كما نملكه اليوم يشكل صيغة مختصرة بشكل ملحوظ، تعكسها بصورة مختلفة الصيغة الهجينة الموجودة في المخطوطة *Reginensis* ١٢٦٨ من مكتبة الفاتيكان(١٦٢).

وقد شاءت المصادفات المتعلقة بانتقال النصوص ونشرها ألا تعرف ترجمة **الأصول** التي قام بها المترجم الكبير جيرار دو كريمون في القرن الثاني عشر للميلاد(١٦٣) نفس النجاح الذي لقيته الصيغة الأدلارية الثانية؛ ومع ذلك فهي تشكل الصيغة الأكمل بين صيغ **الأصول** التي عرفها الغرب اللاتيني قبل اكتشافه مجدداً النص الإغريقي. وليس في الأمر ما يدعو إلى الدهشة؛ فهي أقرب إلى تقليد إسحق بن حنين وثابت بن قرة منها إلى تقليد الحجاج، لذلك فقد تضمنت عناصر إقليدسية عديدة غائبة عن النصوص الأخرى المذكورة(١٦٤): إن نوعية مصدرها الرئيسي بالذات وهو أكثر أمانة للنص الإغريقي الأصلي، تفسر تفوق هذه الترجمة اللاتينية. وقام جيرار دو كريمون أيضاً بترجمة لشرح النيريزي للكتب العشرة الأولى من **الأصول**(١٦٥)، ولشرح الكتاب العاشر العائد لمحمد بن

= وينسبها الناشر لروجر بيكون. انظر: H. L. L. Busard, «Ein Mittelalterlicher Euklid-Kommentar, der Roger Bacon Zugeschrieben Werden Kann,» *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 24, no. 95 (1974), pp. 199 - 217.

(١٦١) انظر الدراسة الدقيقة عن هذا السؤال، في: Folkerts, Ibid., pp. 66-68.

(١٦٢) انظر: Busard: *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*, pp. xi-xii , and «Some Early Adaptations of Euclid's Elements and the Use of Its Latin Translations,» pp. 133 - 134.

(١٦٣) انظر: Busard, *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*.

(١٦٤) وهكذا القضايا الأولى، ٤٥؛ السادسة، ١٢؛ الثامنة، ٢٤ و٢٥، والعاشرة ٢١ و٢٢، ومن الثامنة، ١٤ و١٥. جميع هذه العناصر أُغفلت في نسخات هرمان الكورنثي وأدلار دو باث.

(١٦٥) انظر: Maximilian Curtze, «Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii,» in: I. L. Heiberg and Heinrich Menge, eds., *Euclidis Opera Omnia* (Lipsiae: In aedibus B. G. Teubneri, 1899), pp. 1-252.

عبد الباقي(١٦٦)، والجزء من شرح الكتاب العاشر لپاپوس الإسكندري (Pappus d'Alexandrie) والذي ترجمه ابن مالك الدمشقي(١٦٧).

ولم تكن وساطة العرب للغرب اللاتيني في معرفة إقليدس حتمية. فلقد قام في صقلية طالب مجهول (هو نفسه من دون شك من ترجم كتاب **المجسطي** لبطلميوس(١٦٨) عند قدومه من سالرنو) بنقل الكتب من الأول إلى الثالث عشر والكتاب الخامس عشر وخلاصة عن الكتابين الرابع عشر والخامس عشر من **الأصول** نحو ١١٦٠م من اليونانية إلى اللاتينية. وليس من مجال للمقارنة بين تأثير عمله هذا وتأثير الترجمات العربية لإقليدس، السابقة أو المعاصرة له (التي أزاحت من الاستعمال مقالات الهندسة العملية المستوحاة من الـ *Agrimensores*) أو بينه وبين تأثير الرسائل العربية عن استعمال الأسطرلاب مثل *Practica geometrie* لـهوغ دو سان فيكتور (Hugues de Saint Victor) (نحو ١٠٨٦ - ١١٤١م)(١٦٩). ولم يتم وضع أي شرح لـ **الأصول**، جدير بالاهتمام قبل منتصف القرن الثالث عشر للميلاد، وحتى شرح ألبير الكبير (Albert le Grand) بالذات متعلق بشدة بشرح النيريزي(١٧٠). ولكن الدراسة المنهجية، كما بوشر بها اليوم، لعدة مخطوطات لاتينية، وخاصة لمخطوطات القرنين الثالث عشر والرابع عشر للميلاد، تدل على انفجار مذهل في الاهتمام بالعلوم الإغريقية وتوجهاتها، في الغرب اللاتيني، وهو اهتمام حفزت عليه الترجمات العربية لإقليدس في النصف الأول للقرن الثاني عشر للميلاد. وما سنقدمه هو مثل يُظهر هذا الواقع كما تظهره عشرات غيره(١٧١).

---

(١٦٦) المصدر نفسه، ص ٢٥٢ - ٣٨٦.

(١٦٧) انظر: G. Junge, «Das Fragment der Lateinischen Übersetzung des Pappus-Kommentars zum 10. Buche Euklids,» *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Bd. 3, no. 1 (1934), pp. 1-17.

(١٦٨) انظر: John E. Murdoch, «Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto Unknown Medieval Latin Translation of the Elements Made Directly from the Greek,» *Harvard Studies in Classical Philology*, vol. 71 (1966), pp. 249-302.

ظهرت أول ترجمة لاتينية كاملة صادرة عن النص اللاتيني في البندقية في العام ١٥٠٥م، غير أن نشْرة فيديريكو كوماندينو (Féderico Commandino) (Pesaro، العام ١٥٧٢م) هي التي قامت بدور الأساس لجميع النشرات المتتالية حتى بداية القرن التاسع عشر للميلاد.

(١٦٩) انظر: S. K. Victor, «Practical Geometry in the High Middle Ages: *Artis cuiuslibet consummatio* and *the Pratike de geometrie*,» Memoirs of the American Philosophical Society, vol. 134 (1979).

(١٧٠) انظر: P. M. J. E. Tummers, *Albertus (Magnus)' Commentaar op Euclides' Elementen der Geometrie* (Nijmegen: [n. pb.], 1984), and J. E. Hofmann, «Über eine Euklid-Bearbeitung die dem Albertus Magnus Zugeschrieben Wird,» paper presented at: J. A. Todd, ed., *Proceedings of the International Congress of Mathematics, 14-21 August 1958* (Cambridge: [n.pb.], 1960), pp. 554 - 566.

(١٧١) انظر: Busard, «Some Early Adaptations of Euclid's Elements and the Use of Its Latin Translations,» pp. 139-140 and 153-154.

ففي نهاية الكتاب الثامن من **الأصول** نجد قاعدة عن التناسب، في الورقة ٤٩ (وجه) من المخطوطة اللاتينية ٧٣ من مكتبة جامعة بون (القرن الثالث عشر للميلاد) وفي الورقة ٣٨ (وجه) من الـ *Reginensis* اللاتينية ١٢٦٨ من مكتبة الفاتيكان (القرن الرابع عشر للميلاد)، مقدمة كما يلي:

«الثلاث كميات معطاة، تعادل نسبةُ الأولى إلى الثالثة حاصل ضرب نسبة الأولى إلى الثانية بنسبة الثانية إلى الثالثة»[١٧٢].

وبرهانها يمكن إيضاحه كالتالي:

فليكن $\frac{b}{a} = d$ ؛ $\frac{c}{b} = e$ ؛ $d.e = f$

بما أن $d.a = b$ و $d.e = f$ ؛ يأتي $\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$ و $e.b = f.a$ (**الأصول** VII، ١٩).

وإذ $e.b = c$ ؛ إذاً $f.a = c$ و $\frac{c}{a} = f = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{b}\right)$.

يتوافق هذا البرهان (ولو بشكل مختلف) مع البرهان الذي يقدمه أوطوقيوس (Eutocius) في شروحاته (II، ٤) لكتاب **الكرة والأسطوانة** لأرخيدس[١٧٣]. هذه القاعدة يعبر عنها هندسياً التحديد الخامس من الكتاب السادس لـ **الأصول** في الترجمة الصقلية للنص الإغريقي[١٧٤]، وهذا يشكل الاستثناء الوحيد تقريباً. فهذه القاعدة عُرفت في الغرب اللاتيني حسب الصيغة المقدمة أعلاه استناداً إلى ترجمة جيرار دو كريمون للنص العربي[١٧٥]. كما نجدها، من دون برهان، في ترجمة قام بها جيرار دو كريمون أيضاً لكتاب *Epistola de proportione et proportionalitate* لأحمد بن يوسف (ت نحو ٩١٢م)[١٧٦] والتي ذكرها

---

(١٧٢) Propositis tribus quantitatibus eiusdem generis proportio prime ad tertiam producitur ex proportione prime ad secundam et proportione secunde ad tertiam.

انظر: المصدر نفسه، ص ١٥٣، هامش رقم (٤٧).

(١٧٣) انظر: Marshall Clagett, ed., *Archimedes in the Middle Ages*, University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 6, 5 vols. (Madison, Wis.: University of Wisconsin, 1964-1984), vol. 2, pp. 16-18.

(١٧٤) Proportio ex proportionibus constare dicitur quando proportionum quantitates in se ipsas multiplicate fecerint aliquam.

(١٧٥) Dicitur quod proportio ex proportionibus aggregatur quando ex multiplicatione quantitatis proportionum, cum multiplicantur in seipsas, prouenit proportio aliqua.

(١٧٦) انظر: W. R. Schrader, «The Epistola de proportione et proportionalitate of Ametus Filius Josephi,» (Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1961).

كمبانوس دو نوڤارا (Campanus de Novara) (ت ١٢٩٦م)، وليوناردو فيبوناتشي (العام ١٢٠٢م)[177] وتوماس براردواردين (Thomas Bradwardine) (ت ١٣٤٩م)[178]. ويظهر البرهان في كتاب *Liber de proportionibus* المجهول المؤلف والمنسوب إلى جوردانوس نموراريوس (Jordanus Nemorarius) (ت ١٢٣٧م) وفي مؤلف *Tractatus de proportione et proportionalitate* المنسوب إلى كمبانوس دو نوڤارا[179]. كما يظهر تحت شكل القاعدة (IV، ٢٧) في الـ *Liber de Triangulis* للمدعو نموراريوس[180] وفي ملحوظات روجر بيكون (Roger Bacon) (ت حوالى ١٢٩٢م) حول الأصول[181]. ويوجد برهان آخر شبيه ببرهان أوطوقيوس في مقالة البصريات *(Perspectiua)* (حوالى ١٢٧٠م) لويتلو (Witelo)[182]. وفي القرن الرابع عشر للميلاد، ظهر نص القاعدة وبرهانها في مؤلفات مثل مؤلف الـ *Quadripartitum* لريتشارد دو والنغفورد (Richard de Wallingford) (ت ١٣٣٥م)، أحد أوائل المتابعين باللاتينية لمؤلف الطوسي في علم المثلثات[183]. كما ظهر في مؤلف *De proportionibus uelocitatum in motibus* لسيمون دو كاستيللو (Simon de Castello) المنسوب إلى نيكولا أورسم (Nicolas Oresme)[184]؛ ونجد النص بمفرده في الـ *Tractatus de proportionibus* لتوماس براردواردين (١٣٢٨م)[185] وفي الـ *Tractatus*

---

(١٧٧) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 119.

(١٧٨) انظر: Henry Lamar Crosby, ed. *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus; Its Significance for the Development of Mathematical Physics* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1955), p. 74.

(١٧٩) انظر: H. L. L. Busard, «Die Traktate *De Proportionibus* von Jordanus Nemorarius und Campanus,» *Centaurus*, vol. 15, nos. 3-4 (1971), pp. 193-227.

(١٨٠) انظر: Maximilian Curtze, *Jordani Nemorarii Geometria, vel De Triangulis Libri IV* (Thorn: E. Lambeck, 1887), pp. 45-46, note (29).

(١٨١) Busard, Ibid., p. 215, note (30).

(١٨٢) Clagett, ed., *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 2, pp. 13-15.

المؤلف، المهدى إلى غليوم دو موربك (Guillaume de Moerbeke)، المترجم الكبير من القرن الثالث عشر للميلاد، قد استوحى بشكل واسع علم المناظر لابن الهيثم (Alhazen)، ويشكل حلقة هامة في نشر البصريات الإغريقية ـ العربية؛ ويعود كبلر (Kepler) إليه في العنوان نفسه لكتابه عن البصريات العام ١٦٠٤.

(١٨٣) انظر: John David North, *Richard of Wallingford: An Edition of His Writings*, 3 vols. (Oxford: Clarendon Press, 1976), vol. 1, p. 60.

(١٨٤) انظر: J. F. McCue, «The Treatise *De proportionibus velocitatum in motibus* Attributed to Nicholas Oresme,» (Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1961), pp. 25-26, note (46).

(١٨٥) Crosby, ed., *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus; Its Significance for the Development of Mathematical Physics*, p. 76.

proportionum لألبير دو ساكس (Albert de Saxe) (١٣١٦ ـ ١٣٩٠م)(١٨٦). ولا شك في أن بحوثاً مشابهة، تتناول المؤلفات اللاحقة سوف تُظهر الاستعارة عينها.

لقد أشرنا إلى تفسيرات ألبير الكبير وروجر بيكون لـ **الأصول**، المرتكزة على صيغتي أدلار الثانية والثالثة؛ وكلاهما استعان بشدة بتفسير النيريزي الذي ترجمه جيرار دو كريمون(١٨٧). ولكن، من بين جميع المؤلفات المستوحاة من إقليدس بالعربية، فإن الأقوى تأثيراً والأوسع انتشاراً هو ولا شك **كتاب الشروحات** *(Commentaire)*(١٨٨) لكمبانوس دو نوفارا الذي يشكل فعلاً الـ *editio princeps* لإقليدس (البندقية العام ١٤٨٢م) والمكتوب من دون شك بين العامين ١٢٥٥ و١٢٦١م. يدل على نجاح هذا المؤلف العدد المرتفع جداً لمخطوطاته، بالإضافة إلى حوالى الثلاث عشرة طبعة متتالية له تمت فقط خلال القرنين الخامس عشر والسادس عشر للميلاد. وبالمقابل، فمعرفتنا لمصادر كمبانوس المختلفة لا تزال ناقصة وذلك لعدم توفر الدراسة الوافية حول هذه المسألة. بين هذه المصادر نجد بالتأكيد الصيغة الثانية لأدلار دو باث، وشرح النيريزي (Anaritius)(١٨٩)، والـ *Epistola* لأحمد بن يوسف الذي ذكره المؤلف كمبانوس مرات عديدة تحت اسم *Ametus filius Josephi*(١٩٠)، والـ *Arithmétique* لـنـمـوراريـوس (Nemorarius)، والـ *De triangulis* لـنـمـوراريـوس المزعوم(١٩١). ولا مجال هنا لذكر مؤلفات القرون الوسطى التي يظهر عبرها مؤلف

---

(١٨٦) انظر: Busard, «Some Early Adaptations of Euclid's Elements and the Use of Its Latin Translations,» p. 140.

(١٨٧) انظر: Curtze, «Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii,» pp. 1-252.

لا يقتصر تأثير النيريزي في مؤلف روجر بيكون على شرحه لإقليدس: نجده أيضاً في القسم غير المنشور من مؤلفه *Communia Mathematica* المحتوى في مخطوطة «Digby» ٧٦، أوكسفورد. من جهة أخرى لم يعرِّف على مصادر ألبير الكبير بشكل قاطع: نجد تكراراً في النص تلميحات مثل «Translatio ex greco, translatio ex arabico» التي تدل على أن المؤلف قد عرف ترجمة لاتينية للنص الإغريقي وأنه ميزها عن مصادره العربية.

(١٨٨) حسب المعنى السائد في القرون الوسطى والقاضي بأن يُلحق بالنص وبرهانه، براهين أخرى ولازمات أو مبرهنات إضافية، ونرى فيما بعد، مثلاً بخصوص تثليث الزاوية.

(١٨٩) أضاف كمبانوس (Campanus) إلى العرض والبرهان الأول، ١ من: *Euclide, Les Eléments* برهانين مطابقين لبرهاني النيريزي. انظر: Clagett, «The Medieval Latin Translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with Special Emphasis of the Version of Adelard of Bath,» p. 29, note (31) (4), and Murdoch, «The Medieval Euclid: Salient Aspects of the Translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara,» p. 80, note (41); p. 82, note (53); p. 89, note (84) and p. 92, note (100).

(١٩٠) مثلاً في: Euclide, Ibid., V, 16.

(١٩١) هكذا تتناسب المقالة الأولى، ٤٨ لـ «Campanus» (الورقة ١٠ من طبعة العام ١٤٨٢م) مع =

كمبانوس عن إقليدس كعمل محدد في تطور الفكر العلمي. فقد تجاوز تأثيرُ هذا الاكتشاف الجديد لإقليدس بواسطة الترجمات والمؤلفات العربية الأصلية، إطار الأدب العلمي، وفاق ذلك ليشكل القاعدة نفسها لتلقين كل علم وكذلك لكل معرفة موسوعية(١٩٢). وفي هذا الصدد تجدر الإشارة إلى الفرق النوعي بين نوعين من الكتابات الهندسية. النوع الأول يتجلى مثلاً في مؤلف **الهندسة العملية** لكاتب مثل هوغ دو سان فيكتور، الذي كتب استناداً إلى معرفة الكاتب بويس وحسب، كما يتجلى في مؤلفات مثل *Agrimensores* و*Quadratum geométricum* لجيربير وفي المؤلفات العربية عن الأسطرلاب. أما النوع الثاني فيتجلى في **هندسة عملية** أخرى لفيبوناتشي (العام ١٢٢٠م) أو لدومينيكوس دو كلافاسيو (Dominicus de Clavasio) (نحو ١٣٤٦م) مثلاً حيث تأثير الترجمات اللاتينية للأعمال العربية حول إقليدس، دائم الحضور(١٩٣). ولم يقتصر الإسهام في تقدم الغرب العلمي على هذه المعرفة بكتاب **الأصول** على الرغم من الأهمية القصوى لهذه المعرفة. فمهما بلغت درجة جهلنا بالمصادر الحقيقية لمؤلف ليوناردو فيبوناتشي(١٩٤) **الهندسة العملية**، فإن بعض الوقائع تبدو

= المقالة الرابعة، ١٧ من *De triangulis*، في: Curtze, *Jordani Nemorarii Geometria, vel De Triangulis Libri IV*, p. 37.

وفي المقالة الخامسة، ١٦، يذكر كمبانوس آخر التحديدات التي بدأ بها الكتاب الثاني من علم الحساب (في الطبعة القديمة لجاك ليفيفر ديتابل (Jacques Lefèvre d'Etaples)) مستعيداً مشروع غرانت (E. Grant)، باشر هـ. ل. بوزار (H. L. L. Busard) تعليقاً على علم الحساب لجوردانوس (Jordanus)، والمفقود للأسف إلى الآن. يجب انتظار هذه الطبعة لندرس حقاً ما يعود لكمبانوس وما يعود لجوردانوس. لِنُشر فقط هنا إلى وجود فوارق ملموسة بين مصطلحات المؤلفين. هكذا، في: *Seriem numerorum in infinitum posse extendi* وَ *Nullum numerum in infinitum decrescere* (المطلبان ٣ و٤ من الكتاب الأول)، يحل محل الفعلين «extendi» و «decrescere» عند جوردانوس بالتتالي الفعلان «procedere» وَ «diminui» عند كمبانوس.

(١٩٢) نكتفي بتقديم أحد الأمثلة. فقد كتب فيليب إيليفان (Philippe Elephant) وهو طبيب من تولوز في منتصف القرن الرابع عشر للميلاد مؤلفاً رياضياً بعنوان *Mathematica*. مع قسم هندسي مستوحى بشكل واسع من كمبانوس. انظر: P. Cattin, «L'Œuvre encyclopédique de Philippe Eléphant: Mathématique, alchimie, éthique (milieu du XIV^e siècle),» dans: *Ecole Nat. de chartes: Position des thèses* (Paris: [s. n.], 1969), pp. 9-15.

(١٩٣) انظر: H. L. L. Busard, «The Practica Geometriæ of Dominicus de Clavasio,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 2 (1965), pp. 520-575.

لتحديد، مثلاً، طبيعة الأسطوانة (Columna Rotunda) أو المخروط (Piramis Rotunda) قبل إيجاد مساحتيهما، يذكر المؤلف بوضوح التحديدين ١١ و٩ من الكتاب الحادي عشر لكمبانوس (= التحديدين ٢١ و١٨ من النص الإغريقي).

(١٩٤) انظر فقرتنا التالية عن الجبر. لقد فقدنا إلى الآن الأثر لعدد وفير من الترجمات اللاتينية التي لا تحصى لمؤلفات عربية نفذت في القرن الثاني عشر للميلاد، ومؤلف فيبوناتشي لا يدل على معرفة له بالعربية. ضمن هذا الإطار يجب أن نفهم استنتاجات أفضل المؤلفين، كاستنتاج: Rashed, *Entre arithmétique et* =

محيرة. فالكتاب الرابع من هذا المؤلف (١٢٢٠م) الذي يحمل العنوان *De diuisione omnium camporum inter consortes* («حول قسمة جميع الحقول بين ورثة محتملين») هو أول انعكاس غربي للمؤلف المفقود لإقليدس عن قسمة الأشكال الهندسية[١٩٥]. وهو مؤلف ذكره بروكلس (Proclus) في شرحه للكتاب الأول من الأصول. والكتاب الرابع المذكور هو تركيب يستند إلى عدة مؤلفين[١٩٦]. وهو يضيف إلى القضايا أمثلة عددية تبرر عنوانه. ولكن ما لا يقل عن اثنتين وعشرين من القضايا التي يحتويها قد عولجت بطريقة شبه مطابقة للتي نعرفها من أحد النصوص العربية[١٩٧]؛ وهناك ثماني قضايا ذكرها فيبوناتشي بوضوح، أما الست الأخيرة فقد ساقها من دون أي برهان، على افتراض كونها معلومة[١٩٨].

ولا يسعنا التنويه بما فيه الكفاية بالتأثير الرئيس للأعمال العربية حول إقليدس وبانتشارها في عدة أعمال من القرون الوسطى. وقد عرف الغرب مؤلفات أخرى، لا تقل عن هذه الأعمال، وذلك عبر الترجمات اللاتينية التي قام بها جيرار دو كريمون. فإننا نعلم، منذ أن كرس م. كلاغيت (M. Clagett) مؤلفه الهام لتقليد أرخميدس العربي - اللاتيني[١٩٩]، كيف ظهرت الأعمال الرياضية لهذا العالم الإغريقي. وعلى الرغم من الإسهام الكبير لترجمات غليوم دو موربك (Guillaume de Moerbeke) (حوالى ١٢١٥ - ١٢٨٦م) صديق القديس توما الأكويني، للنص الإغريقي، فإن تأثير أرخميدس بالعربية

= *algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p. 260:

«لا أحد يجهل العلاقة المباشرة لفيبوناتشي مع الرياضيات العربية».

(١٩٥) ربما بعض من أجزاء كتاب *Practica geometrie* تعكس أيضاً الـ *Métriques* لهيرون الإسكندري، انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abacci, II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 2, and Gino Arrighi, *La Practica de Geometria*, Testimonianze di storia della scienza; III (Pisa: Domus Galilaeana, 1966).

(١٩٦) وهذا، مرة أخرى، «شرح» (بالمعنى السائد في القرون الوسطى).

(١٩٧) المقصود هو النص الأول من النصين اللذين نشرهما: Franz Woepcke, «Notice sur les traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide,» *Journal asiatique*,, 4ème série, tome 18 (1851), pp. 217 - 247; traduction anglaise dans: Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 4 (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959), pp. 24-30.

(١٩٨) حسب استنتاجات أرشيبالد، انظر: Raymond Clare Archibald, *Euclede's Book on Divisions of Figures, with a Restoration*, based on Woepcke's text and on the Practica Geometriæ of Leonardo Pisano (Cambridge, Mass.: University Press, 1915), p. 11.

(١٩٩) انظر: Clagett, ed.,*Archimedes in the Middle Ages*, vols. 1-5.

حيث يختصر الفصل السابع من الجزء الأول، ص ٥٥٨ - ٥٦٣، استنتاجات المؤلف عن التقليد العربي - اللاتيني لأرخميدس. وهذه الاستنتاجات قد استكملت في الأجزاء من الثالث إلى الخامس.

تجاوز كثيراً إطار القرنين الثاني عشر والثالث عشر للميلاد. ويكفي للاقتناع بذلك أن نذكر أن مؤلفاً مثل الـ *Liber de motu* لجيرار دو بروكسل (Gérard de Bruxelles) (القرن الثالث عشر للميلاد)، ولو أن المؤلف ينسبه إلى معلوماته الخاصة، مرتبط بشدة بكتاب **قياس الدائرة** الذي ترجمه جيرار دو كريمون[(٢٠٠)]. وينطبق نفس القول على كتاب *Liber de curuis superficiebus* لجوهان دو تينمو (Johannes de Tinemue) (Jean de Tynemouth?) (ت نحو ١٢٢١م)[(٢٠١)]. ويعتبر هذا المؤلف، مع كتاب **قياس الدائرة** *(De mensura circuli)*، المؤلف الأكثر شعبية في القرنين الثالث عشر والرابع عشر للميلاد من بين المؤلفات التي استوحت أرخميدس. وقد ساهم، مع كتاب الـ *Verba filiorum Moysi* لبني موسى في تعريف الغرب على قضايا الكتاب الأول من كتاب *De sphaera et cylindro* **(الكرة والاسطوانة)** لأرخميدس. وقد استعمله، على سبيل المثال، كل من نيكولا أورسم (Nicolas Oresme) (حوالى ١٣٢٠ ـ ١٣٨٢م) وفرنسوا دو فراري (François de Ferrare) (العام ١٣٥٢م) والمؤلف المجهول لشروحات كتاب *Liber de ponderibus*، وكذلك المؤلف المجهول لكتاب *Liber de inquisicione capacitatis figurarum* (القرنان الرابع عشر والخامس عشر للميلاد).

ولا بد لأي عرض منهجي للتأثير العربي على استعمال علوم القرون الوسطى لكتابات أرخميدس من أن يأتي على ذكر مؤلفات جوردانوس نموراريوس وليوناردو فيبوناتشي وروجر بيكون وكمبانوس دو نوفارا وتوماس براداواردين وفرنسوا دو فراري ونيكولا أورسم وألبير دو ساكس وويغاندوس دورنهايمر (Wigandus Durnheimer) وغيرهم من المؤلفين ممن لم يتسنّ لنا معرفة أعمالهم. إن الحالة الراهنة للمعارف تجعل من الصعب التفريق بين ما يعود بشكل خاص للتأثير العربي وما يعود لتأثير النص الإغريقي أو لترجمته اللاتينية في القرن الثالث عشر للميلاد، التي قام بها غليوم دو موربك (Guillaume de Moerbeke). ولكن بعض الوقائع جديرة بالذكر. من بين مثل هذه الوقائع ما نجده في مجرى الحلول اللاتينية لمسألة تثليث الزاوية، الشهيرة.

إذا استثنينا الحالة الخاصة للقاطع المرسوم من طرف قطر عمودي على وتر ما، لا تتضمن مسألةُ القاطع المنطلق من نقطة والذي يعترضه خطان مستقيمان أياً كانا على طول معطى، حلولاً بواسطة المسطرة والبيكار، إذ إنها تقود إلى البحث عن نقاط تقاطع القطعين: الزائد $y(c-x) = ab$ والمكافئ $x^2 = ay$[(٢٠٢)]. لقد استخدم أرخميدس هذا القاطع في القضايا من الخامسة إلى الثامنة من كتاب **الحلزونيات** *(Spirales)*، وفي القضية الثامنة من

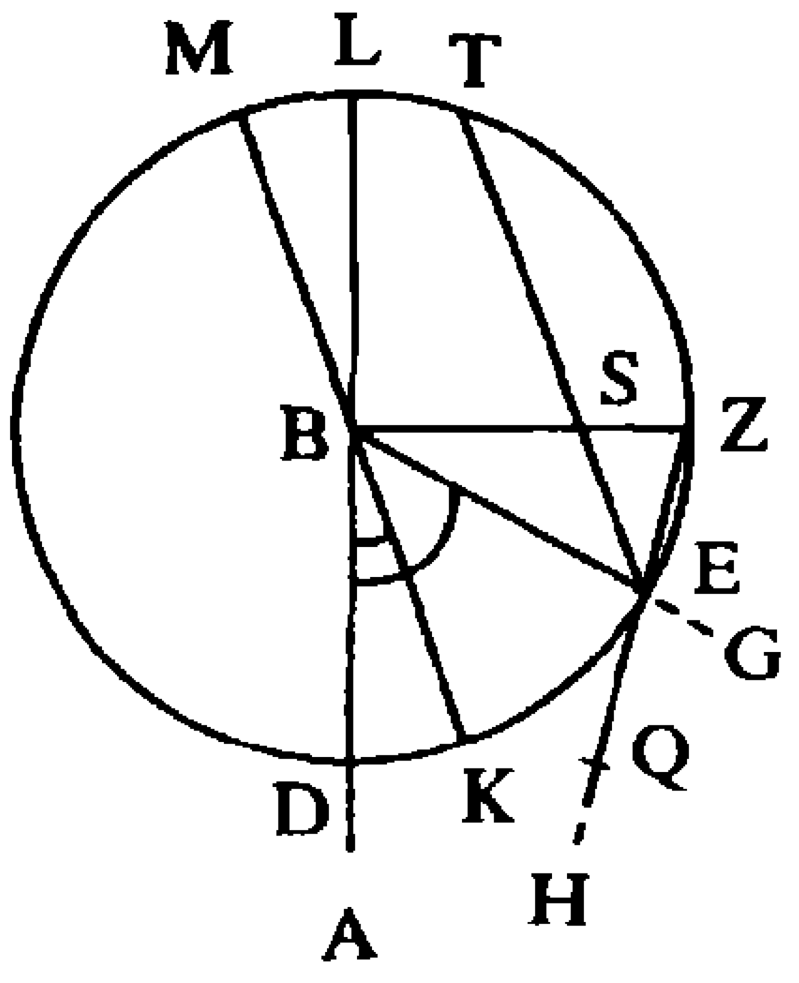
---

(٢٠٠) انظر: Marshall Clagett, «The *Liber de Motu* of Gerard of Brussels and the Origins of Kinematics in the West,» *Osiris*, vol. 12 (1956), pp. 73-175.

(٢٠١) انظر: Clagett, ed., *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, pp. 439-557.
غير أننا نلاحظ أن الناشر سجل تأثيرات عديدة للنص اليوناني في هذا المؤلف.

(٢٠٢) الأمر الذي، في المفهوم الجبري، يعود إلى حل مسألة من الدرجة الثالثة.

كتاب المقدمات *(Liber assumptorum) (Lemmes)* الذي لا نعرفه اليوم إلا عن طريق تنقيح عربي له[٢٠٣]. وقد أثبت ت. هيث (T. Heath) في مؤلفه التقليدي عن الرياضيات الإغريقية أن مسألة «القاطع» مربوطة بمسألة «الانحناءات» (inclinationes)، التي ذكرها پاپوس (Pappus)، وبتثليث الزاوية[٢٠٤]، ولكننا نجهل طريقة حل أرخميدس لمسألة القاطع. وهذه المسألة، كمسألة تثليث الزاوية، أظهرتها للغرب الترجمة اللاتينية التي قام بها جيرار دو كريمون لمؤلف **كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية** *(Livre de la connaissance de la mesure des figures planes et sphériques)* لأبناء موسى بن شاكر الثلاثة، وعُرفت هذه الترجمة تحت اسم *Liber trium fratrum*[٢٠٥]، وغالباً تحت اسم *Verba filiorum Moysi*[٢٠٦]، وتقترح القضية الثامنة عشرة من *Verba* لتثليث الزاوية حلاً يمكن اختصاره كما يلي، انظر الشكل رقم (١٦ ـ ٣)[٢٠٧]:



الشكل رقم (١٦ ـ ٣)

يتم الحصول على تثليث الزاوية الحادة ABG بـ «انحناء» الوتر ZE الممدد إلى ZH باتجاه ما (ويتم الحصول على هذا الوتر بربط النقطة Z، طرف الشعاع BZ العمودي على الخط المستقيم LA، بالنقطة E، تقاطع الخط المستقيم BG مع محيط الدائرة ذات الشعاع BD)، وبالإبقاء على النقطتين Z على محيط الدائرة وE على تقاطع BG ومحيط الدائرة، حتى تعادل القطعةُ ZQ المساوية لشعاع الدائرة القطعة TS على القاطع TE الناتج عن «الانحناء». وبرسم القطر MK الموازي لـ TE نحصل على الزاوية DBK وهي الثلث المطلوب للزاوية ABG.

هذا الحل الآلي هو من نفس النوعية لرسم محارية الدائرة التي استعملها روبرڤال[٢٠٨] (Roberval) للهدف عينه. ويطابق هذا الحل (مع فوارق تفصيلية طفيفة)، أول الحلول للموضوع عينه التي أعطاها الـ *Liber de triangulis* وهو مجهول المؤلف ومستوحى من كتاب

---

(٢٠٣) *Kitāb māʾūdhāt*، ترجمه ثابت بن قرة وشرحه النسوي؛ الترجمة والشرح كانا في أساس كتابة الطوسي.

(٢٠٤) انظر: Sir Thomas Little Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. (Oxford: Clarendon Press, 1921), reprinted (Oxford: Clarendon Press, 1960-1965), vol. 1, pp. 235-244.

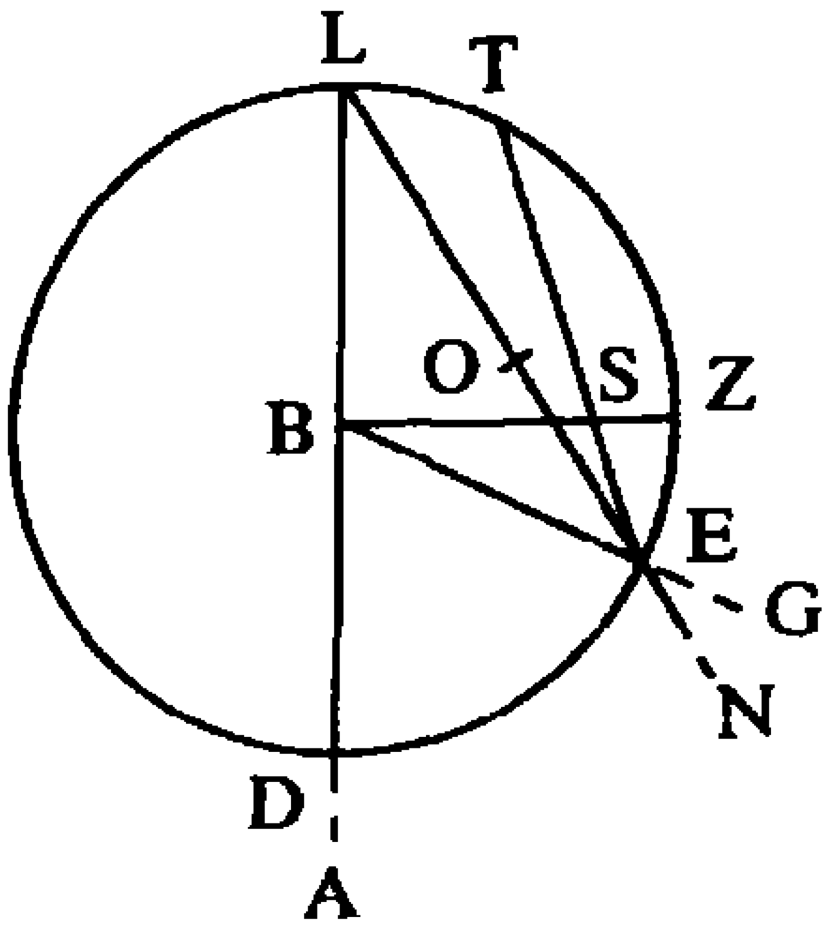
(٢٠٥) حسب تسمية روجر بيكون (Roger Bacon) في كتابه: *Communia Mathematica*.

(٢٠٦) انظر: Clagett, ed.,*Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, pp. 223-367.

(٢٠٧) نهمل هنا البرهان الوارد في النص.

(٢٠٨) انظر الشرح المفصل الذي أعطاه كلاغيت، في: المصدر نفسه، مج ١، ص ٦٦٦ ـ ٦٦٨.

Liber philotegni لجوردانوس نموراريوس(٢٠٩). في حل ثانٍ، مختلف عن الأول، اختار المؤلف أن «يحني» الخط المستقيم LN بتحريك النقطة L على خط الدائرة باتجاه Z وبالحفاظ على النقطة E عند تقاطع خط الدائرة والخط المستقيم BG، حتى تصل القطعة LO المساوية لشعاع الدائرة إلى الشعاع BZ؛ ويحصل هكذا على TSE القاطع عينه للحل الأول (الشكل رقم (١٦ ـ ٤)):



الشكل رقم (١٦ ـ ٤)

ولكن النص يشير بوضوح إلى أن أياً من الحلين الآليين لا يرضي المؤلف إطلاقاً(٢١٠). ويفضل هذا الأخير عليهما حلاً هندسياً يقضي بالبناء المباشر للقاطع TSE حيث تعادل القطعة TS شعاع الدائرة، ذاكراً بهذا الخصوص القضية (٧، ١٩)، من الـ *Perspectiva*. لقد أظهر الناشر في هذا البناء المرتكز على المقاطع المخروطية تأثيراً لبصريات ابن الهيثم (Alhazen) مطابقاً لتقليد النص الذي نجده في مخطوطات الكلية الملكية للفيزيائيين في لندن *(Royal College of Physicians)*(٢١١). هذا الواقع لا يدعو إلى العجب إذ إن ابن الهيثم كان مصلحاً حقيقياً في مجال البصريات الهندسية. لذلك لا بد من الإشارة هنا أيضاً إلى ضرورة العودة إلى مؤلف عربي أو إلى ترجمته. كما وتجدر الإشارة إلى أن الحل الثالث لهذه المسألة (تثليث الزاوية) قد أورده مؤلف كتاب *De triangulis*، الذي ادخل إلى الـ *editio princeps* من أصول إقليدس (البندقية، ١٤٨٢) (استناداً إلى شرح كمبانوس دو نوفارا)، من دون ذكر الـ *Perspectiva*؛ وقد أصبح جزءاً متكاملاً من تعليم الهندسة(٢١٢).

لم يقتصر تأثير كتاب الـ *Verba filiorum* لبني موسى على عمل مؤلف *De triangulis* ولا على عمل روجر بيكون. فهذا التأثير ملموس بالقدر نفسه، مثلاً، في الجزء الهندسي من المخطوطة اللاتينية B ٧٣٧٧ من مكتبة باريس الوطنية (القرن الرابع عشر للميلاد) فيما يتعلق بمساحة دائرة أو مثلث، وفي الـ «Pseudo-Bradwardine»، أو في الـ *De inquisicione capacitatis figurarum* (القرنان الرابع عشر الخامس عشر للميلاد). وتجدر الإشارة خاصة

---

(٢٠٩) انظر: المصدر نفسه، مج ١، ص ٦٧٢ ـ ٦٧٧.
عن مؤلف الـ *De triangulis*، انظر الاستنتاجات، في: المصدر نفسه، مج ٤، ص ٢٥ ـ ٢٩، ومج ٥، ص٣٢٣ ـ ٣٢٤.

(٢١٠) ... mihi nequaquam sufficit dicta demonstratio, eo quod nihil in ea certum reperio,
(«لا يرضيني البرهان المعطى، إذ لا أجد فيه أي تأكيد»).

(٢١١) انظر: المصدر نفسه، مج ٤، ص ١٩ ـ ٢٠، ٢٥ ـ ٢٦ و٢٨ ـ ٢٩.

(٢١٢) انظر: المصدر نفسه، مج ١، ص ٦٧٨ ـ ٦٨١.

إلى تشابه النصوص بين الـ *Verba filiorum* (لبني موسى) والـ *Practica geometrie* لفيبوناتشي (العام ١٢٢٠م) فيما يختص بمساحة الدائرة، وبالصيغة الهيرونية (هيرون الإسكندري) لمساحة المثلث، ولمساحة المخروط أو الكرة، وللبحث عن وسطين دائمي التناسب بين كميتين معطاتين؛ وهذا التشابه يدل على مصادر عالم الرياضيات البيزي الكبير. ونلاحظ أيضاً، على سبيل المثال، ظهور الصيغة الهيرونية لمساحة المثلث تبعاً لأضلاعه(٢١٣) في مؤلفات كالـ *Artis metrice practice compilatio* لليونار دو كريمون (١٤٠٥م) من دون برهان، وفي كتاب الـ *Summa* للوقا پاشيولي (Luca Pacioli) (حوالى ١٤٩٤م) مع برهان مستعار من فيبوناتشي، وفي علم الحساب التجاري الألماني ليوهانس ويدمان (Johannes Widmann) (العام ١٤٨٩م)، وكذلك أيضاً عند بيار دو لارامي (Pierre de la Ramée) (Petrus Ramus) (العام ١٥٨٩م) مع برهان شبيه ببرهان الـ *Verba filiorum* لبني موسى؛ ولا بد أيضاً من وجود هذه الصيغة عند عدة مؤلفين من القرن السادس عشر للميلاد.

لقد تعمدنا، في الاعتبارات الموجزة السابقة، إلقاء الضوء على دور الترجمات العربية لإقليدس وأرخميدس، في تقدم العلوم في القرون الوسطى. إن نهجنا هذا يجب ألا يوحي بأن الغرب، من خلال المؤلفات العربية، قد اكتفى بعقد روابط مع العلم اليوناني تتعدى تلك الروابط الواهية الموروثة من هندسة بويس. إن الاعتقاد باقتصار دور الترجمات على عقد هذا الارتباط لخطأ فادح، يؤدي إلى رؤية تشوه أعمال هؤلاء المترجمين، الذين حاولنا، فيما تقدم، فقط أن نلفت الانتباه إلى أهميتها وانتشارها. فإذا كان جيرار دو كريمون، الأكثر شهرة وأهمية من بين هؤلاء المترجمين، قد ساهم فعلاً بالتعريف بمؤلفات إقليدس وثيودوس وأرخميدس ومنلاوس وديوقليس، فإن الترجمات اللاتينية قد جعلت الغرب في القرون الوسطى يدرس على مؤلفات عدد أكبر من الكتاب والجامعين والمترجمين والمفسرين وخاصة المؤلفين العرب الأصيلين؛ نذكر من هؤلاء: أبناء موسى الثلاثة وأحمد بن يوسف وثابت بن قرة وابن عبد الباقي وأبو بكر الحسن والنيريزي والكندي - وهنا اقتصرنا من دون ترتيب على ذكر المؤلفين الذين كان لمؤلفاتهم تأثير مباشر على الهندسة، والذين قام بترجمة كتبهم جيرار دو كريمون. يبدو ملائماً، في هذا الإطار الذي ذكرنا منه بعض الملامح البارزة، إدخالُ مؤلفات مثل الـ *Liber de aspectibus* والـ *Liber de speculis comburentibus* (أو *Perspectiva*) لابن الهيثم (ومن المؤكد أن جيرار دو كريمون هو واضع الترجمة لأول هذه المؤلفات وربما للثاني وهما المؤلفان اللذان عرّفا الغرب في القرون الوسطى على القطوع المخروطية). ولقد استُكمل هذان المؤلفان بترجمة الـ *Liber de duabus lineis* بفضل جان دو باليرم (Jean de Palerme) وهو مقرب من البلاط الصقلي لفريديريك الثاني دو هوهنشتوفن (Frédéric II de Hohenstaufen)، حوالى ١٢٢٥م، ومن ثم بالترجمات التي قام بها غليوم دو

---

(٢١٣) المساحة = $[p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{2}}$، (تمثل p نصف المحيط و a، b، c الأضلاع). ينسب البيروني الصيغة لأرخميدس وهي بالتأكيد سابقة لهيرون.

موربك (Guillaume de Moerbeke) (١٢٦٩م) لأرخميدس وأوطوقيوس، وفي نهاية القرن الثالث عشر للميلاد بالرسالة *Speculi Almukefi compositio*، المجهولة المؤلف. لم يعد ضرورياً تكرار أهمية هذه النصوص وارتباطها بمؤلفات مثل مؤلفات ويتلو (١٢٧٠م) وجان فوزوريس (Jean Fusoris) (١٣٦٥ ـ ١٤٣٦م)، ومعاصره جيوفاني فونتانا (Giovanni Fontana)، أو جان مولر (ريجيومونتانوس) (Regiomontanus) (Jean Muller) (١٤٣٦ ـ ١٤٧٦م)، وكذلك تأثيرها على مؤلفات القرن السادس عشر للميلاد(٢١٤). إن هذه المدرسة التي بدأت بحماس في القرن الثاني عشر للميلاد استمرت حتى الأزمنة الأكثر تقدماً للعلوم الغربية التي، وإن عن غير وعي غالباً، كانت متأثرة بها.

وينبغي التذكير بأن اهتمام القرون الوسطى بالهندسة، الذي اقتصر أولاً على تقارب مقتضب موروث عن بويس في إطار الرباعي (Quadriuium) بقي فيما بعد متصلاً اتصالاً وثيقاً بدراسة الفلسفة وليس باعتباره علماً رياضياً خاصاً. وفي ضوء هذه الملاحظة يمكننا أن نفهم لماذا لم تلق أفكار ومبادرات علماء الرياضيات العرب الهامة بخصوص «مصادرة إقليدس» أي صدى في العالم اللاتيني في القرون الوسطى(٢١٥).

خامساً: بدايات الجبر وتأثير العلوم العربية

حاولنا في المقاطع السابقة وصف الخطوط الرئيسية للإرث العربي في ميادين علم الحساب والهندسة في القرون الوسطى، ولم نأت سوى على ذكر التواصل الطويل لتعليم غربي تتموضع جذورُه في الترجمات اللاتينية للمؤلفات العربية خلال النهضة في القرن الثاني عشر للميلاد(٢١٦). وفي حقل الجبر، هناك أمور جعلت اهتمام المؤرخين بمصادر وشهود انطلاقة الجبر في القرون الوسطى يتراجع إلى المرتبة الثانية(٢١٧) أو يقتصر على دراسات جزئية. من هذه الأمور الأعمال الجبرية الأصيلة التي لمعت فيها أعظم الأسماء في دنيا

---

(٢١٤) انظر: المصدر نفسه، مج ٤.

(٢١٥) نجد عرضاً وافياً يقدمه ج. أ. موردوخ (J. E. Murdoch) حول انتقال أصول إقليدس. انظر: «Euclid: Transmission of the *Elements*,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 4, pp. 437-459.

ونستطيع استكمال هذا العرض بالأعمال الحديثة المذكورة في دراستنا.

(٢١٦) اليوم أيضاً تدرس العمليات الحسابية الأساسية حسب طرق تعود لعلم الحساب التجاري الإيطالي من القرن الخامس عشر للميلاد، وهذا العلم متعلق بشكل واسع بطرق الحساب الهندي الموجودة في المؤلفات العربية. وحتى تاريخ قريب، كان جزء من الهندسة الإقليدسية، يشكل عنصراً مهماً في التعليم الثانوي في معظم البلاد الأوروبية: ولقد كشفنا عن أصوله العائدة للقرون الوسطى.

(٢١٧) لم تلق التجاوب دائماً النداءات المتكررة من رواد أمثال بول تانيري (Paul Tannery) أو جورج سارتون (George Sarton).

العلوم الغربية منذ بداية العصر الحديث، والاهتمام المحدود لمؤرخي العلوم بمصادر القرون الوسطى، والاكتشاف المتأخر الذي كان غالباً قريب العهد للأعمال العربية الأصيلة التي تفوق كثيراً الأعمال اللاتينية الغربية المعاصرة لها. لذلك فقد كان يقتصر الأمر غالباً ومن دون أي تعليق آخر، على أن اسم «الجبر» نفسه ناتج عن مؤلف للخوارزمي، وكان يُذكر أيضاً وجود أول ظهور في الغرب لتأثير السبّاق اليوناني العبقري ديوفنطس الإسكندري، في مؤلف ليوناردو فيبوناتشي منذ العام ١٢٠٢م: إنه تأكيد صحيح، من دون شك، ولكنه خطير ذلك لأنه يحجب تحديد الوسيط العربي الضروري[٢١٨]. لذلك فليس من المستغرب أن ترانا نجهد هنا لتحديد محتوى المؤلفات اللاتينية القديمة، عساها تكشف عن مصادرها ولو بشكل جد جزئي.

لقد اكتشف الغرب، قبل منتصف القرن الثاني عشر للميلاد بقليل، كيف يمكننا، بواسطة «الجبر»، حل معادلة من الدرجة الثانية محولة إلى شكل قانوني (أي بتحويل أول معاملاتها إلى الواحد) وبالاحتفاظ في كل من طرفيها بالحدود الإيجابية فحسب، وذلك بإضافة كمية معينة إلى كلا الطرفين، وكيف يتمُ اختزال الأعداد المتشابهة بواسطة «المقابلة». هذه الوسيلة هي ما يدعو إليها الجزء الأول من الكتاب الموجز في الجبر والمقابلة[٢١٩] الذائع الصيت للخوارزمي؛ ولحسن الحظ وصلنا نصه العربي، عكس ما حصل لمؤلفي علم الحساب للمؤلف عينه. ولقد برهنا أنه من المحتمل جداً أن يكون المعلم يوحنا (Magister Iohannes) يوحنا الطليطلي مساعد ابن داود (Avendauth)، وليس المترجم اللاتيني المعروف يوحنا الإشبيلي (Iohannes Hispalensis) ـ كما تشير فقط مخطوطة باريس ٧٣٥٩ الشديدة التلف ـ هو من كتب الـ *Liber Alchorismi de pratica arismetice (LA)*. وهذا الكتاب الأخير هو الأفضل إعداداً والأكثر كمالاً من جميع المؤلفات القديمة الصادرة عن علم حساب الخوارزمي. ولكننا لا نعلم إلا القليل عن الفقرات التي لا تحمل أي عنوان والتي تلي القسم المتعلق بالحساب الهندي في المؤلف نفسه[٢٢٠]. نجد في هذه الفقرات أفكاراً عن

---

(٢١٨) وردت هكذا في التركيب الممتاز لـ: G. Beaujouan, «La Science dans l'occident médiéval chrétien,» dans: R. Arnaldez, [et al.], *La Science antique et médiévale des origines à 1450*, histoire générale des sciences; 1 (Paris: Presses universitaires de France, 1966), p. 598.

عن معرفة النص الإغريقي لديوفنطس في الغرب، انظر:

André Allard, «La Tradition du texte grec des *Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie,» *Revue d'histoire des textes*, vols. 12-13 (1982-1983), pp. 57-137.

(٢١٩) كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة. وعن المعنى الحقيقي لهذا المؤلف، انظر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, pp. 17-29.

(٢٢٠) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice*, vol. 2, pp. 93-136.

عدة مخطوطات استعملناها لكي تنجز الطبعة المحققة عن فصول الحساب الهندي، لا تحتوي على هذا الجزء.

الأعداد الصحيحة، وعن الكسور والنسب، ناتجة عن علم الحساب اللاتيني التقليدي، وعدة مسائل في علم الحساب التطبيقي، وحتى إننا نجد ـ ولكن مرة أخرى، فقط في مخطوطة باريس ٧٣٥٩ ـ مربعاً سحرياً[٢٢١]. وتدل التحديدات عينها على أن المؤلف استعمل الحساب الهندي الذي سبق هذه الفقرات[٢٢٢]. لكننا نجد على الأخص تحت عنوان *Exceptiones de libro qui dicitur gebla et mucabala*[٢٢٣]، فصلاً قصيراً تضمن وصفاً لمعادلات الخوارزمي ثلاثية الحدود محوّلة إلى شكلها القانوني[٢٢٤] ومتبعة بتطبيقات عددية.

نعلم منذ العام ١٩١٥ أن روبير دو شستر (Robert de Chester) (Robert de Rétines) قد حقق ترجمة لـ جبر الخوارزمي[٢٢٥]، في العام ١١٤٥م، من دون شك، بعد فترة وجيزة من اعتزاله مؤقتاً العمل العلمي للتفرغ لإنجاز أول ترجمة لاتينية لـ القرآن الكريم (العام ١١٤١ ـ ١١٤٣م) تلبية لطلب بطرس الموقر (Pierre le Vénérable). ومن الصعب منح ثقة من دون تحفظ لصيغة النص المنشورة باسمه والمستندة بشكل شبه حصري إلى مخطوطة نسخها عالم الرياضيات الألماني يوهان شوبل (Johan Scheubel) في القرن السادس عشر للميلاد (هي ترميم عائد لشوبل نفسه). وهذا الأخير أضاف إلى النص عدة حسابات، واستبدل بعض التعابير الأصلية بتعابير أكثر تداولاً في زمانه («*census*» بدل «*substantia*»)؛ فلا يسعنا سوى أن ننسب إليه عدة مقاطع غير موجودة لا في النسخات اللاتينية الأخرى ولا في النص العربي[٢٢٦]. ومن جهة

---

(٢٢١) استعاده: M. A. Youschkevitch, *Geschichte der Mathematik in Mittelalter* (Leipzig: [n. pb.], 1964), p. 342; traduction allemande d'un ouvrage paru en russe (Moscou: [s. n.], 1961).

مصداقية هذا المربع السحري تدعو للريبة الشديدة. إلى الآن، لا تتيح لنا الأعمال التي باشرنا، عن هذا الجزء من النص بإعادة بناء تاريخه.

(٢٢٢) مثل التحديد «unitas est origo et pars numeri» وهو مختلف عن تحديد الترجمات اللاتينية لإقليدس. انظر الهامش رقم (٧١).

(٢٢٣) وليس «gleba mutabilia» كما تُذكر بتضخيم مخطوطة باريس التي قام الناشر بنقلها. ولا مجال أيضاً للبحث عن معنى في تتمة النص المنشور: «queres» («سوف تبحث») بدلاً من «que res» («أي مربع»)، و«tocius» («من المجموع») بدلاً من «tociens» («عدد من المرات»)... الخ. وسنذكر كملاحظة بعض المختارات المعادة بواسطة مخطوطات الـ *LA* وسنأتي على ذكر النص نفسه كالصيغة الأولى، (Version I).

(٢٢٤) Aut que res cum tociens radice sua efficiat numerum (أي $x^2 + px = q$)؛ aut que res cum tali numero efficiat tociens radicem (أي $x^2 + q = px$)؛ aut que tociens radix cum tali numero efficiat rem (أي $x^2 = px + q$).

(٢٢٥) انظر: Muhammad Ibn Mūsā Al-khuwārizmī, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi,* edited by Louis Charles Karpinski, Contributions to the History of Science; pt. 1 (New York: Macmillan, 1915),

المذكورة هنا كالنسخة الثانية.

(٢٢٦) انظر: المصدر نفسه، ص ٨٨ ـ ٨٩، وهامش رقم (٢).

أخرى، منذ ملاحظات بجورنبو (Björnbo)[٢٢٧]، اتُّفق على الاعتراف بجيرار دو كريمون كمؤلف للنسخة الثالثة المنشورة في العام ١٨٣٨م[٢٢٨]؛ واعتُبرت تنقيحاً نسخة منسوبة للمترجم عينه ومنشورة في العام ١٨٥١[٢٢٩]: يبدو واضحاً أن النص المفضل هو المترجم عن العربية، خلافاً للنص الذي أتى من بعده[٢٣٠].

وإذا اعتبرنا على سبيل الافتراض أن الـ *Liber Alchorismi* ليوحنا الطليطلي يشكل مجموعة متجانسة يمثل الحساب الهندي الجزء الأول منها، فإن مقطع الجبر من دون شك معاصر لترجمة روبير دو شستر ويمثل معها الظاهرة اللاتينية الأولى لمؤلف الخوارزمي، والتي أزاحتها بعد وقت قصير ترجمة جيرار دو كريمون. وفي غياب دراسة وافية عن هذه الصيغ الثلاث وعن علاقاتها بالنص العربي يمكننا فقط الإشارة إلى أن الصيغة الأولى، على الرغم من قصرها، تبتعد بصورة ملحوظة عن النص العربي وعن الصيغتين الثانية والثالثة[٢٣١]. ففي المثل المرافق للمعادلة الثانية (القانونية) $(x^2+q=px)$، نلاحظ أنه تمّ في الصيغتين الثانية والثالثة حلُّ المعادلة بالعبارة التالية:

$$x=\frac{p}{2}\pm\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]^{\frac{1}{2}}\text{، عند كون } \left(\frac{p}{2}\right)^2>q$$

ولقد طُبقت هذه العبارة في المثل الذي اختارته الصيغة الثانية والثالثة وكذلك النص العربي:

---

(٢٢٧) انظر: Björnbo, «Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen,» pp. 239-241.

(٢٢٨) انظر: Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix - septième siècle,* vol. 1, pp. 412-435.

هذا النص مذكور كالصيغة الثالثة.

(٢٢٩) Baldassare Boncompagni - Ludovisi, «Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese,» *Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei* (1851), pp. 412-435.

(٢٣٠) يستحق السؤال تفحصاً جديداً سنقوم به في طبعتنا المحققة (قيد التحضير) عن جبر الخوارزمي: النسخة الثالثة محتواة، على الأقل، في ثلاث عشرة مخطوطة لاتينية يجهلها الناشر، بالإضافة إلى بعض المخطوطات بلغات محلية، تظهر نجاح المؤلف. بالمقابل، نحن لا نعرف إلا مخطوطة واحدة غير مخطوطة الناشر تحتوي على الصيغة التي نشرها بونكومباني (Boncompagni).

(٢٣١) نلاحظ تباعداً في المصطلحات نفسها لدى المترجمين: فلقد عُبر عن المربع (māl) بـ «res» (النص الأول) وبـ «substantia» (النص الثاني) و «census» (النص الثالث وتنقيحه). وعُبر عن جذر المربع بـ «radix» (النصوص الأولى والثانية والثالثة)، وبـ «radix» أو «res» (تنقيح النص الثالث)؛ وعبر عن معظم الوحدات (درهم) بـ «numerus» (النص الأول) وبـ «drachmae» (النصان الثاني والثالث) وبـ «dragmae» أو «unitates» (تنقيح النص الثالث). قد نتوقع أن تكون كلمة «res» من النص الأول ترجمة لكلمة شيء للخوارزمي للتعبير عن كمية مجهولة، وأن تكون كلمة «numerus»، التي أعطاها بعض علماء الجبر اللاتين فيما بعد دور التعبير الديوفنطسي «res» (شيء) للدلالة على كمية مجهولة، ترجمة أقل أمانة من كلمة «dragmae».

$x^2 + 21 = 10x$، وتؤدي إلى الجذرين: $x = 3$ و$x = 7$. ولكن الصيغة الأولى تنفرد بتقديم المثل التالي (بجذر وحيد) ومن دون أي تعليق:

$x^2 + 9 = 6x$، وفيه $q = (\frac{p}{2})^2$، والذي يظهر في جبر ابن ترك، المعاصر للخوارزمي، ولكن ليس عند هذا الأخير، على الرغم من مطابقته فعلياً للحالة العامة الواردة في النص العربي للخوارزمي: «فجذر المال مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان»؛ إننا نجد هذه الحالة العامة مترجمة بتعابير خاصة في كل من الصيغتين الثانية والثالثة(٢٣٢). وقد حدد فيبوناتشي عام ١٢٠٢م نفس المفهوم(٢٣٣).

في الأزمنة التي تلت أولى الترجمات اللاتينية، تلقى العلميون بتفاوتٍ درس الجبر للخوارزمي الذي اختلف وقع تأثيره. فقد عرض جوردانوس نموراريوس في كتابه *De numeris datis* (بداية القرن الثالث عشر للميلاد) (القضية IV، ٨ و٩ و١٠) بشكل وبأمثلة خاصة به، المعادلات الثلاث، ثلاثية الحدود والمحولة إلى شكلها «القانوني»(٢٣٤). ويسترجع

---

(٢٣٢) انظر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, p.23.

نقتبس عن رشدي راشد ترجمة نص النشرة الحديثة لعلي.م. مشرفة ومحمد.م. أحمد: وليس بتصرفنا سوى النشرة القديمة لـ: F. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa* (London: [n.pb.], 1831)

إن النص المقترح للصيغة الثانية هو نص طبعتنا المحققة والتي هي قيد التحضير. انظر: Al-Khuwārizmī, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, p. 76.

ويعكس كاربنسكي (Karpinski)، نعتبر أن المقاطع التي توجد بين أقواس مستقيمة ([. . . .]) كتدخلات لشويبل (Scheubel) متعددة المصادر. انظر: Barnabas B. Hughes, «Johann Scheubel's Revision of Jordanus de Nemore's *De numeris datis:* An Analysis of an Unpublished Manuscript,» *Isis*, vol. 63, no. 217 (June 1972), pp. 224-225.

وتستلفتنا في طريقنا نوعية ترجمة جيرار دو كريمون (Gérard de Crémone) (الصيغة الثالثة).

الصيغة الثانية: Una radix substantiae simul etiam medietas radicum [quae cum substantia sunt] pronunciatur, adiectione simul et diminutione abiectis («نصرح بجذر واحد للمربع، هو في الوقت عينه نصف الجذور [التي ترافق المربع]، نابذين في آن واحد الزيادة والنقصان»).

الصيغة الثالثة: Tum radix census est equalis medietati radicum absque augmento et diminutione («إذا ذاك، يعادل جذر المربع نصف الجذور، بعيداً عن كل زيادة ونقصان»).

الصيغة الثالثة المعدلة: Erit radix census equa dimidiis radicibus («جذر المربع سيعادل الجذور مقسومة على اثنين»). عن مثل ابن ترك، انظر: Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, vol. 5: *Mathematik*, p. 242.

(٢٣٣) Habebitur proradice census numerus medietatis radicum («سيكون لدينا جذر للمربع هو العدد المعادل لنصف الجذور»). انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 406.

(٢٣٤) انظر: Barnabas B. Hughes, *Jordanus de Nemore: De Numeris Datis* (Berkeley; Calif.; =

فيبوناتشي في كتابه *Liber abaci* (عام ١٢٠٢م) العرض الكامل للمعادلات الثلاث ثنائية الحدود، وللمعادلات الثلاث ثلاثية الحدود مصحوباً ببراهين عربية بواسطة تعادُل المساحات(٢٣٥) وبأمثلة عديدة أصيلة أحياناً. ويُدل التعبير نفسه للعنوان *secundum modum algebre et almuchabale* بوضوح على المصدر(٢٣٦). على أثر هذين المؤلفين اللذين يشكلان بدرجات متفاوتة ركيزة تعلُّم الجبر في الغرب، يعيد جميعُ مؤلفي القرون الوسطى وعصر النهضة، والذين لا مجال لذكرهم هنا، الفكرة نفسها، ولكن أحياناً مع تقسيمات تفصيلية دقيقة وصلت إلى أقصاها مع بييرو دلاّ فرنشيسكا (Piero della Francesca) (حوالى ١٤١٠ - ١٤٩٢م) حيث نجد واحداً وستين صنفاً من المعادلات(٢٣٧).

وقد نعجب لعدم الترجمة، في القرن الثاني عشر للميلاد، لكل من الجز الثاني من جبر الخوارزمي المكرس لحساب المساحات بغاية المسح، والجزء الثالث المكرس لمسائل تتعلق بالإرث أو بالوصايا وتعالج عرضاً بعض مسائل التحليل الديوفنطسي. ولربما لم يعكس النصُ العربي الذي كان بتصرف المترجمين اللاتين سوى الجبر؛ فلقد رأينا، بالإضافة إلى ذلك، أنه لم يكن ليوحنا الطليطلي سوى رؤية مشوهة عن مؤلف الخوارزمي. غير أنه في العام ١١٤٥م، وهي ربما السنة التي حقق فيها روبير دو شستر أول ترجمة لاتينية لـ الجبر، قام أفلاطون التيفولي (Platon de Tivoli) بترجمة مؤلف مكتوب بالعبرية العام ١١١٦م، وهو الـ *Liber embadorum* لأبراهام برحيا (Savasorda) والذي نعلمُ اليوم أن مصادره (على الأقل جزئياً) عربية، وهو شكل موسع للجزء الثاني من جبر الخوارزمي(٢٣٨). في الربع الثالث من القرن الثاني عشر للميلاد ترجم جيرار دو كريمون مؤلفاً من الطبيعة نفسها عائداً لمؤلف عربي غامض الهوية (أبي بكر) تحت اسم *Liber mensurationum*(٢٣٩). ولقد جاءت ترجمةُ مؤلف رابع وهو جبر أبي كامل (حوالى ٨٥٠ - ٩٣٠م) لعلوم القرون الوسطى، بتتمةٍ لمؤلف الخوارزمي، خاصة عند إعطائها دراسة أفضل عن الأعداد المنطّقة الإيجابية؛ ولا يمكننا تحديد واضع الترجمة، ولكن هذه الأخيرة نُفذت، في أقصى حد، في نهاية القرن الثاني عشر للميلاد(٢٤٠).

ولئن كانت أوائل الشهود اللاتينية عن الجبر في القرون الوسطى معروفة نسبياً، ولئن

= Los Angeles: [n. pb.], 1981), pp. 100-101.

طبق جوردانوس (Jordanus) مثلاً الصنف الثاني من المعادلات ثلاثية الحدود (للخوارزمي) عند حله للمعادلة: $x^2 + 8 = 6x$.

(٢٣٥) تتطابق في حالة مع برهان الخوارزمي وفي الحالات الأخرى مع براهين أبي كامل.

(٢٣٦) انظر: Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, pp. 406-409.

(٢٣٧) انظر: Gino Arrighi, *Trattato d'Aritmetica*, Testimonianze di storia della scienza; II (Pisa: Domus Galilaeana, 1964), pp. 85-91.

(٢٣٨) انظر: H. L. L. Busard, «L'Algèbre au moyen âge: Le *Liber mensurationum* d'Abū Bekr,» *Journal des savants* (1968), pp. 65-124.

(٢٣٩) المصدر نفسه، ص ٨٦ - ١٢٤.

(٢٤٠) Louis Charles Karpinski, «The Algebra of Abū Kāmil Shoja' ben Aslam,» =

كان تأويلها لا يطرح سوى مسائل قليلة الأهمية فيما يتعلق بالنصوص العربية، مصدر هذه الشهود، إلا أن الأمر يختلف بمجرد اقترابنا من بداية القرن الثالث عشر للميلاد، وذلك من بعد الترجمات المذكورة بما يقارب الأربعين أو الخمسين عاماً. وهناك عملان هيمنا، في تلك الحقبة مع تفاوت في الأهمية: الـ *De numeris datis* لجوردانوس نموراريوس والمجموعة الرياضية التي يشكلها كتاب *Liber abaci* لليوناردو فيبوناتشي (العام ١٢٠٢م، المراجع العام ١٢٢٨م). وتُطرح هنا مسألةُ المصادر العربية بشكل حاد؛ ولا يمكن لبعض العناصر التي سنعرض فيما يلي الادعاء بإيضاح كامل لمسألة قد تستحق أن تكون موضوع أبحاث عديدة.

لقد أوضحنا سابقاً أن النسخة العربية ـ اللاتينية عن إقليدس لكمبانوس دو نوڤارا قد استوحت جزئياً كتاب الحساب لجوردانوس نموراريوس وكتاب *Liber de triangulis* لنموراريوس المزعوم. وعلى العكس، فإننا لا نرى بمثل هذا الوضوح، الروابط التي قد تستطيع وصل مؤلفات نموراريوس وفيبوناتشي. فنلاحظ مثلاً أن المسألة:

$$x + y = 10 \quad ; \quad \frac{x}{y} = 4$$

تظهر في وقت واحد في الصيغتين اللاتينيتين الثانية والثالثة للخوارزمي[٢٤١]، وعند أبي كامل (نهاية ظهر الورقة ٢٢ وبداية وجه الورقة ٢٣ من النص العربي)، وفي الـ *De numeris datis* (المسألة I، ١٩)[٢٤٢]، بينما يعبر فيبوناتشي عن المسألة عينها على الشكل:

$$x + y = 10$$

$$xy = \frac{x^2}{4}$$ [٢٤٣]

وتوحي بعض الأمثلة بأن جوردانوس استلهم أبي كامل، على عكس ما أعلن ناشر *De*

= *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 12 (1911-1912), pp. 40-55.

عن محتوى مؤلف أبي كامل، انظر: M. A. Youschkevitch, *Les Mathématiques arabes* VIII^ème^ - XV^ème^ siècles, traduit par M. Cazenave et K. Jaouiche (Paris: Vrin, 1976), pp. 52 sq., and Martin Levey, *The Algebra of Abū Kāmil: Kitāb fī al-jabr wa'l-mūqābala* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966).

ولغاية الآن لم تبرهن فرضية جورج سارتون التي تنسب الترجمة لجيرار دو كريمون، انظر: George Sarton, *Introduction to the History of Science*, Carnegie Institution of Washington; Publication no. 376, 3 vols. in 5 (Baltimore, Mad.: Carnegie Institution of Washington, 1927-1931), vol. 2, p. 341.

(٢٤١) Al-Khuwārizmī, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, pp. 105-106, and Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, vol. 1, p. 276.

(٢٤٢) انظر: Hughes, *Jordanus de Nemore: De Numeris Datis*, p. 64.

(٢٤٣) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 410.

numeris datis[٢٤٤]. هكذا، تظهر المسألة:

$$x + y = 10$$

$$x^2 - y^2 = 80$$

عند جوردانوس (I، ٢٤)[٢٤٥] كما تظهر عند أبي كامل (الورقة ٢٥ من النص العربي)؛ ولكنها لا تظهر في الترجمات اللاتينية للخوارزمي، ولا في الـ *Liber abaci* حيث نجد:

$$x + y = 10$$

$$x^2 - y^2 = 40$$ [٢٤٦]

وانطلاقاً من المسألتين II، ٢٧ ـ ٢٨ فحسب، من جوردانوس، وهما مسألتان تقابلان مسألة ديوفنطسية (الحساب لديوفنطس، I، ٢٥)؛ أوحى ڤرتهايم (Wertheim) بتأثير للكرجي[٢٤٧]. وسنرى أن المسألة نفسها تُطرح بجدية أكثر فيما يتعلق بمؤلف *Liber abaci* الذي يحتوي، هو أيضاً، المسائل عينها التي عرضها جوردانوس[٢٤٨]؛ يبدو حرياً أنه يمكننا الاستناد مرة أخرى هنا إلى مؤلف أبي كامل. فمن الصعب الاقتناع بأن مؤلف الكرجي المهم (القرن العاشر ـ الحادي عشر للميلاد)، والذي خلافاً لمؤلف أسلافه يقدم نظرية من الحساب الجبري ويؤدي إلى أول عرضٍ لجبر الحدوديات، لم يُستوعب إلا من أجل الحصول منه على مثلين هما مستوحيين من ديوفنطس[٢٤٩]. إن كتاب *De numeris datis* يمثلُ مؤلفاً بسيطاً قياساً إلى المجموعة الرياضية لفيبوناتشي. غير أن يوهان شوبل في القرن السادس عشر للميلاد رأى من المفيد مراجعته في ضوء مؤلفات أفضل إعداداً، ربما كان من بينها كتاب *Ars Magna* لجيروم كاردان (Jérôme Cardan) (١٥٠١ ـ ١٥٧٦م) الذي وصف للمرة الأولى في الغرب، الحلول العامة للمعادلات التكعيبية[٢٥٠]. ولكي نحدد بدقة أكثر

---

(٢٤٤) Hughes, Ibid., p. 12.

(٢٤٥) المصدر نفسه، ص ٦٢.

(٢٤٦) Al-Khuwārizmī, *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, p. 111; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, vol. 1, p. 279, et Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, p. 411.

(٢٤٧) انظر: G. Wertheim, «Über die Lösung einiger Aufgaben im *Tractatus de numeris datis* des Jordanus Nemorarius,» *Bibliotheca Mathematica*, vol. 3, no. 1 (1900), p. 417.

(٢٤٨) Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, p. 410.

(٢٤٩) عن مؤلف الكرخي، انظر: Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, pp. 31-41.

(٢٥٠) انظر: Hughes, «Johann Scheubel's Revision of Jordanus de Nemore's *De numeris datis*: An Analysis of an Unpublished Manuscript,» pp. 224-225.

التأثير الذي مارسته أعمالُ أبي كامل على مؤلفات نموراريوس وفيبوناتشي، علينا انتظار معرفة أفضل ليس فقط لكتابه الجبري، وإنما أيضاً للترجمة اللاتينية لكتابه فن الحساب[٢٥١] ولكتابه الذي يعرض فيه المعادلات الديوفنطسية بشكل أوسع بكثير مما هي عليه في المؤلف السابق.

ونحن بذكرنا لـ *De numeris datis* ولـ *Liber abaci* نعطي، من دون شك، صورة لا تخلو من التشويه عن الطريقة التي تلقّى بها الغرب اللاتيني قبل القرن الثالث عشر للميلاد إرث الجبر العربي. ذلك أن هذين العملين يعتبران من الإنجازات الأكثر نجاحاً في سلسلة الأعمال المتواضعة التي بدأها مترجمو القرن الثاني عشر للميلاد. وحتى الآن، لم نبذل سوى القليل من الجهد، بحثاً في النصوص اللاتينية عن دلائل الفترات الأولى لهذا التلقي. ولقد لحظنا، بخصوص الحساب الهندي، أن المخطوطة ١٥٤٦١ من باريس، والمنسوخة عن نموذج طليطلي، تتيح تحديد تاريخ كتاب *Liber Alchorismi (LA)* ليوحنا الطليطلي حوالى ١١٤٣م. وتحتوي المخطوطة عينها على رسالة في علم الحساب مجهولة الكاتب ينسجم عنوانها مع التقليد المتبع في مؤلفات القرون الوسطى ويدل محتواها على مصادرها العربية[٢٥٢]. وهذه الرسالة موجودة أيضاً ضمن المخطوطة A ٧٣٧٧ من باريس التي تشكل إلى يومنا المصدر الوحيد للترجمة اللاتينية لجبر أبي كامل[٢٥٣]. وسنقدم فيما يلي، مثلاً مأخوذاً من هذه الرسالة للدلالة على نوعية الاستيعاب وعلى سوء فهم الدروس العربية في بدايات اكتشافها. فعند محاولة الكاتب أن يبرهن «قاعدة التبديل» في ضرب أعدادٍ أربعة a، b، g و d، يضع:

$$ab = h \text{ ؛ } gd = z \text{ ؛ } ag = k \text{ ؛ } bd = t$$

ويحاول أن يبرهن أن:

$$hz = kt$$

فيذكر أولاً الخاصيتين التاليتين:

$$(a + d)b = h + t$$

$$(a + d)g = k + z$$

ويحصل، مستعملاً القضية (VII، ١٨) من الصيغة العربية لإقليدس على:

$$\frac{t}{h} = \frac{d}{a} \quad \text{و} \quad \frac{z}{k} = \frac{d}{a}$$

---

(٢٥١) باشرنا بالطبعة المحققة للترجمة اللاتينية مجهولة الكاتب لـ كتاب الطرائف في الحساب.

(٢٥٢) Omnium que sunt alia sunt ex artificio hominis, alia non... («بعض من جميع الأشياء الموجودة عائد لعبقرية الإنسان أما البعض الآخر فلا...»).

(٢٥٣) طبعتنا المحققة لهذه الرسالة قيد النشر.

وتتيح له القضية (VII، ١٩) من صيغة إقليدس هذه برهان قضيته. ومن ثم يقترح المؤلف المجهول، مستشهداً، صراحة «بالقسم الثالث من جبر أبي كامل»[٢٥٤]، برهاناً ثانياً باستعماله الخاصية:

$$\frac{h.z}{t} = k$$

ويبرهن قضيته. بعد ذلك. متسلحاً بعلمه الجديد ومعتقداً إكمال مصدره «ببرهان أفضل»[٢٥٥]، يضع المؤلّف:

$$\frac{a}{b} = g \text{؛ و} \frac{d}{h} = z \text{؛ و} a.d = k \text{؛ و} b.h = t \text{؛ و} g.z = q$$

ويفضل برهان طويل «شبه علمي» يصل إلى أن $q = \frac{k}{t}$.

إن هذا المثل (وهو ليس الوحيد) يدل على أن الغرب الذي واجه تقلبات في القرون الوسطى، آثارها، في أوقات متقاربة، إسهامُ المؤلفات العربية في حقول الحساب الهندي والهندسة الإقليدسية والجبر، قد مر بفترة استيعاب صعبة.

ولا شك بأن كتاب *Liber abaci*، يتفوق كثيراً على المؤلفات الغربية المذكورة إلى الآن. ومن غير المفيد ذكر الدور الرئيس الذي لعبه فيبوناتشي في تطور العلوم في الغرب؛ فمنذ كوسالي (Cossali) (العام ١٧٩٧م)، وبعد فترة طويلة من النسيان، لم يتوقف تكرار التذكير بهذا الدور. وقد أشارت مؤلفات كثيرة إلى استعارات فيبوناتشي العديدة من المصادر العربية[٢٥٦]. وبين هذه الأخيرة يظهر بانتظام الخوارزمي وأبو كامل والكرجي. وطالما أن المؤلف نفسه قد صرح عن وجوده في أماكن عديدة، كمصر وسوريا وبيزنطية وصقلية والبروفانس (Provence) وإيطاليا[٢٥٧]، نستطيع الافتراض أن مصادر معلوماته، بصرف النظر عن النصوص اللاتينية التي سبقتها، كانت عديدة ومتنوعة. ولكن، يبقى عالقاً الردُّ على التساؤل المتعلق بمعرفة ما إذا كانت هذه المعلومات قد صيغت انطلاقاً من النصوص العربية الأصيلة أو من الترجمات اللاتينية. وقد كان بحوزة فيبوناتشي ترجمة لاتينية لـ جبر

---

(٢٥٤) Hoc etiam monstrabitur ex eo quod dixit Auoquamel in tercia parte libri gebleamugabala («وبرهان هذا أيضاً سيكون حسب ما قال أبو كامل في الجزء الثالث من كتابه الجبر والمقابلة»). وهذا، على ما يبدو، هو أول ذكر صريح في الغرب لمؤلف أبي كامل.

(٢٥٥) Inducam probationem de eo quod dixit Auoquamel multo faciliorem ea quam ipse posuit («سأدخل برهاناً لما قال أبو كامل، أسهل بكثير من البرهان الذي عرض»).

(٢٥٦) انظر: Kurt Vogel, *Ein Italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A 13)* (Munich: [n. pb.], 1977), p. 613.

(٢٥٧) انظر: Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 1.

الخوارزمي حيث تدل المفردات المستعملة على أن هذه الترجمة هي لجيرار دو كريمون. فالكلمتان اللاتينيتان «regula» و«consideratio» اللتان تترجمان نفس العبارة العربية «قياس»، عند المؤلفين تظهران في الظروف ذاتها(٢٥٨). ولا نجد في كتاب *Liber abaci* أي انعكاس لـ جبر الخوارزمي لم تدركه ترجمة جيرار دو كريمون الشديدة الأمانة. ودلت أيضاً دراسات ظرفية على تأثير جبر أبي كامل في مؤلف فيبوناتشي. فقد ذكر م. ليفي (M. Levey) تطابق تسع وعشرين مسألة في المؤلفين(٢٥٩)، ولكن لا توجد دراسة وافية حول هذا الموضوع. فإننا نجد، مثلاً، سلسلة أخرى من المسائل، يعطي فيها فيبوناتشي للكلمة العربية «مال» الترجمتين auere (امتلاك، مال) و *census* (مربع)، وهذا المعنى المزدوج صادر بما لا يقبل الجدل عن أبي كامل(٢٦٠). ويصح القول نفسه في المسألة $(2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{x}{3}} = x)$(٢٦١). فإذا قارنا نص كتاب *Liber abaci* بالنصين العربي واللاتيني لأبي كامل، نرى، على حدٍ سواء، الظهور الواضح للمصدر ولطريقة استخدامه:

«وإذا قلنا إن جذري شيء مع جذر نصفه مع جذر ثلثه تعادل الشيء، فكم يكون هذا الشيء؟ اجعل هذا الشيء مالاً، وقل إن شيئين مع جذر نصف المال مع جذر ثلث المال تعادل المال. إذاً، شيء يعادل اثنين مع جذر النصف مع جذر الثلث. وهذا هو جذر الشيء، والشيء هو أربعة ونصف وثلث، وجذر ثمانية، وجذر خمسة وثلث، وجذر الثلثين»(٢٦٢). (تُرجم بتصرف عن الفرنسية (المترجم))، انظر الشكل رقم (١٦ ـ ٥).

«هناك شيء ما يعادله اثنان من جذوره وجذر نصفه وجذر ثلثه. ضع مربعاً مكان الشيء. وبما أن شيئين مع جذر نصف المربع مع جذر ثلث المربع تعادل مربعاً، ارسم المربع المذكور آنفاً *ac* وهو مربع، وجذرين من هذا المربع أي المساحة *dg*، وجذر نصف المربع أي المساحة *eh*، وجذر ثلث المربع أي المساحة *bf*. هكذا، تصبح *cg* اثنين، وتصير *eg* جذر نصف درهم (دراخم) و *be* جذر ثلث درهم. لذا فإن *bc* كاملة، وهو شيء، يُصبح اثنين مع جذر النصف مع جذر الثلث. اضرُب هذا الشيء بنفسه فتحصل على أربعة وخمسة

---

(٢٥٨) انظر بهذا الصدد: N. Miura, «The Algebra in the *Liber Abaci* of Leonardo Pisano,» *Historia Scientiarum*, vol. 21 (1981), p. 60.

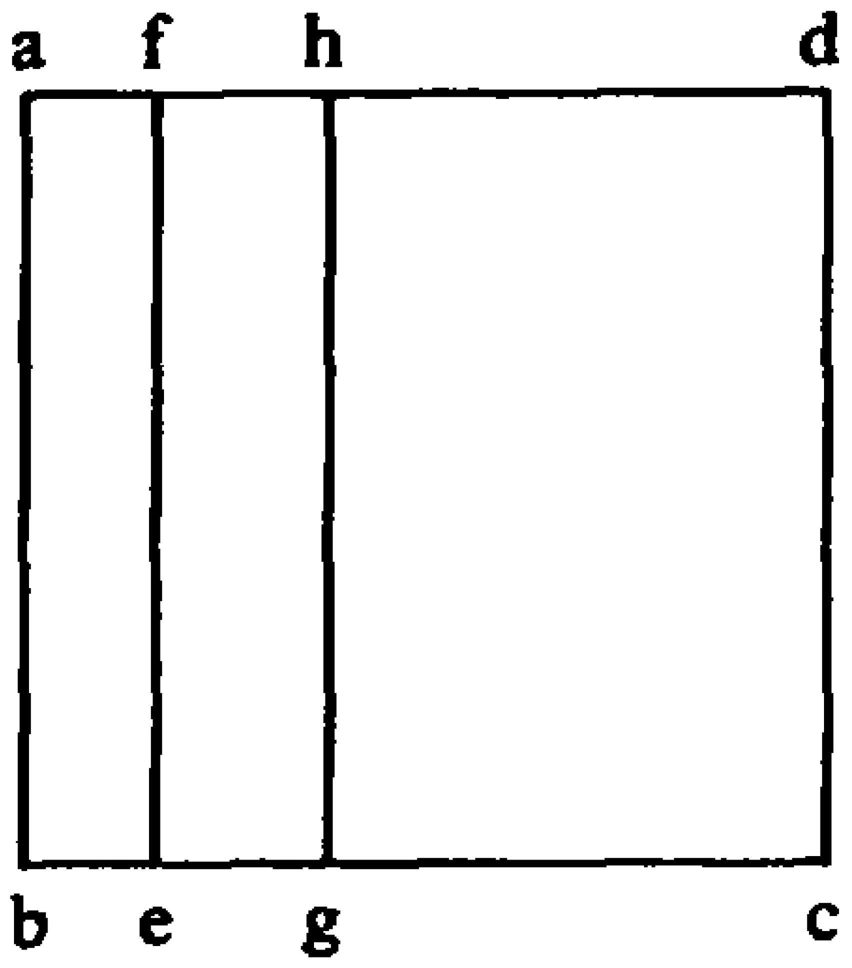
(٢٥٩) انظر: Levey, *The Algebra of Abū Kāmil: Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala*, pp. 217-220.

(٢٦٠) Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, pp. 442-445.

(٢٦١) Est quoddam auere cui due radices et radix medietatis eius et radix tercie eius sunt equales. Pone pro ipso auere censum...

انظر: المصدر نفسه، ص ٤٤٣، حيث النص الذي قام بنقله بونكومباني (Boncompagni) فيه الكثير من الغلط ولا يتيح لنا فهم المسألة المطروحة. لقد أنجزنا طبعة محققة لمؤلف *Liber abaci* انطلاقاً من دزينة المخطوطات المعروفة اليوم؛ ولكن، لنشر هذه الطبعة نحن بانتظار معرفةٍ أفضل بمصادر فيبوناتشي العربية وبالأخص بالأعمال الكاملة لأبي كامل.

(٢٦٢) انظر: أبو كامل، جبر، النص العربي، الورقة ٤٧ظ والنص اللاتيني، الورقة ٨٨ظ.



الشكل رقم (١٦ ـ ٥)

أسداس، وعلى جذر ثمانية وعلى جذر خمسة وثلث، وعلى جذر ثلثي درهم فيما يعود إلى كمية المربع، أي إلى الشيء المطلوب»[٢٦٣].

استعمل فيبوناتشي، ولو أنه لم يشر إلى ذلك، لحل المسألة المطروحة، المعرفة التي يمتلك عن صيغة إقليدس العربية (الأصول، II، ١). وهذا ما يميزه عن أبي كامل الذي مع ذلك، لا يمكن إنكار تأثيره فيما يتعلق بهذه المسألة كما بغيرها والذي لم تشكل إطلاقاً البراهين بالمساحات عنده سوى براهين إضافية. طريقة الحل هذه في كتاب *Liber abaci* على الرغم من كونها لم تطبق منهجياً، تُضعف جبر فيبوناتشي ذا التأثير الواضح في مؤلف *Quadripartitum numerorum* لجان دو مور (Jean de Murs) (النصف الأول من القرن الرابع عشر للميلاد)، الواسع الاستعمال من قبل ريجيومونتانوس (Regiomontanus)[٢٦٤]. وفي الوضع الراهن للمعارف، غالباً ما تبدو صعبة معرفة ما هو عائد خاصة لعمل فيبوناتشي ولإسهام مصادره العربية. فلقد كان حل المعادلات العددية يفترضُ الإمساك بناصية الخوارزميات التي تتيح استخراج الجذور العددية. فقبل الدلالة بأمثلة عديدة عن كيفية استخراج جذر تكعيبي بطريقة تقابل الصيغة:

$$\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$$

يدعي فيبوناتشي اكتشافها[٢٦٥]. ولكن هذه الصيغة ليست سوى «تقريب اصطلاحي» حسب تعبير الطوسي (النصف الثاني من القرن الثاني عشر للميلاد)؛ وهذه الصيغة معروفة على الأقل منذ أيام أبي منصور (ت ١٠٣٧م) وتختلف عن التقريب:

$$\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a^2+1} .$$

والتقريب الأخير هذا، استخدمه كوشيار بن لبّان (العام ١٠٠٠م) وكذلك تلميذه النسوي (القرن الحادي عشر للميلاد)[٢٦٦]. فهل أعاد فيبوناتشي فعلاً اكتشاف تقريب

(٢٦٣) انظر: فيبوناتشي، طبعة جديدة مفسرة لكتاب *Liber abaci*.

(٢٦٤) انظر: G. l'Huillier, «Regiomontanus et le *Quadripartitum Numerorum* de Jean de Murs,» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 33, no. 3 (1980), pp. 201-206.

(٢٦٥) Inueni hunc modum reperiendi radices secundum quod inferius explicabo («لقد اكتشفت هذه الطريقة لإيجاد الجذور حسب ما سأشرح فيما بعد»). انظر: Boncompagni-Ludovisi, Ibid., vol. 1, p. 378.

(٢٦٦) عكس تأكيد يوشكفيتش (Youschkevitch)، انظر: Youschkevitch, *Geschichte der* =

استعمل قبله أم أنه عكس فقط أحد مصادره العربية التي على كل حال لم يذكر أحدها صراحة في مؤلفه؟ قد لا نستطيع حالياً الإجابة عن هذا السؤال. ولكن، لنلحظ أن دراسات عرضية دلت على تشابه بين قضايا فيبوناتشي وقضايا المؤلفين العرب الذين سبقوه: وهذا ما ينطبق على مسألة «التطابقات الخطية» حيث إن حل فيبوناتشي ليس إلا اختصاراً للحل الموجود في إحدى الرسائل لابن الهيثم(٢٦٧). ولكن الأمر المتفق عليه منذ وبكيه (Woepcke)(٢٦٨) والذي يؤكد أن فيبوناتشي استعمل بتوسُّع كتاب الفخري للكرجي، يستحق الدراسة مجدداً في ضوء جبر أبي كامل، فيما يخص الـ *Liber abaci*. ولنسجل أن تحليل مؤلفات فيبوناتشي الأخرى والتي تحتوي على مسائل جبرية(٢٦٩) قد سجل تشابهات مع مؤلفات الكرجي والخيام(٢٧٠).

ولا يمكننا التفكير في أن نفصّل هنا تاريخاً من المعادلات الجبرية في الغرب في القرون الوسطى يمتد من أوائل الاكتشافات حيث يعود الفضل إلى جبر الخوارزمي، حتى الحلول العامة للمعادلات التربيعية والتكعيبية والتربيعية المضاعفة التي تظهر في الـ *Ars Magna* (العام ١٥٤٥م) لجيروم كاردان (Jérôme Cardan). فمؤلفات القرنين الثالث عشر والرابع عشر للميلاد التي قد تحتوي على معادلات تحتوي عبارات ذات قوة تفوق الاثنين، غير معروفة جيداً إلى الآن. ومعادلات من النوع:

$$ax^{n+2p} + bx^{n+p} = cx^n$$

عُرفت في مؤلفاتٍ من القرن الخامس عشر للميلاد مثل مؤلف *Triparty* لنيكولا شوكه (Nicolas Chuquet) (العام ١٤٨٤م)(٢٧١) أو كتاب *Summa* للوقا باشيولي (Luca Pacioli) (العام ١٤٩٤م)(٢٧٢)، ومن ثم، وبشكلٍ خاص في عدة مؤلفات من القرن السادس

Mathematik in Mittelalter, p. 246, et Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, pp. 153-154, note (3), et Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XIIᵉ siècle*, texte édité et traduit par Roshdi Rashed, 2 vols. (Paris: Les Belles lettres, 1986), pp. lxxx-lxxxiv.

(٢٦٧) انظر: Rashed, Ibid., p. 234, note (12).

(٢٦٨) انظر: Franz Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre* (Paris: [s. n.], 1853), p. 29.

(٢٦٩) Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 2, pp. 227-279.

(٢٧٠) خاصة كل معادلة تكعيبية للخيام ($x^3 + 2x^2 + 10x = 20$) في الـ «Flos». انظر أيضاً اعتبارات راشد بصدد مقدمة قيل إنها لفيبوناتشي (شرط لعدد طبيعي أولي)، قد حوّتها مؤلفات عربية سابقة).

(٢٧١) انظر: A. Marre, «Le Triparty en la science des nombres,» *Bulletino di bibliografica e di storia delle scienze matematiche e fisiche* (Roma), vol. 14 (1881), pp. 807-814.

المعادلة الأخيرة هي: $2x^{10} + 243 = 487x^5$.

(٢٧٢) انظر: L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria proportioni e proportionalita*, 2 vols. (Venice: [n .pb.], 1494), p. 149ʳ.

عشر[٢٧٣]. ولكن استخدام الغرب في القرون الوسطى للدروس الرياضية التي بدأت في القرن الثاني عشر للميلاد والفرصة المغتنمة بفضلها لتحقيق صلة مع إرث عائد غالباً إلى بيد الموقر (Bède le Vénérable) أو إلى ألكوين (Alcuin)، هما أمران لا نشعر بهما إلا من خلال الطريقة التي استعملها المؤلفون لمعالجة مسائل الحياة اليومية أو مسائل الرياضيات المسلية[٢٧٤]. فلقد أشرنا سابقاً إلى أن المعادلة الخطية ذات المجهولين:

$$x + y = 10$$

$$\frac{x}{y} = 4$$

المقابلة للمسألة I، ٢ من كتاب حساب ديوفنطس الإسكندري قد ظهرت عند الخوارزمي وأبي كامل كما ظهرت لاحقاً عند ليوناردو فيبوناتشي[٢٧٥] وجوردانوس نموراريوس. ويعرض فيبوناتشي صيغة أخرى للمسألة عينها حيث $\frac{2}{3} = \frac{x}{y}$، وهذه المسألة في الواقع تشبه المسألة نفسها التي وصفها الكرجي[٢٧٦]. وعلى الرغم من أننا لا نريد أن نجري هنا تحرياً وافياً عن هذه المسألة في مؤلفات القرون الوسطى، نذكر فقط أنها ظهرت بشكل أو بآخر في المؤلفات التالية:

ـ من القرن الرابع عشر، في: *Libro d'abaco* وهو مجهولُ المؤلف[٢٧٧]؛ و *Trattato d'aritmetica* لپاولو داغوماري (Paolo Dagomari)[٢٧٨]؛ ومقالة إيطالية مجهولةُ الكاتب في علم الحساب التجاري[٢٧٩]؛

---

(٢٧٣) انظر: Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-mathematik in Systematischer Darstellung*, revised by K. Vogel, K. Reich and H. Gericke, 4th ed., 3 vols. (Berlin: Guyter, 1980), vol. 1: *Arithmetik und Algebra*, p. 442.

يمكننا أن نقرأ في: المصدر نفسه، ص ٤٤٣ ـ ٤٤٤، تحليلاً مفيداً لمخطوطة من ريجيومونتانوس (Regiomontanus).

(٢٧٤) انظر التحليل المنهجي في: المصدر نفسه، ص ٥١٣ ـ ٦٦٠.

(٢٧٥) برغم ظهورها مع العبارة الخاصة $xy = \frac{x^2}{4}$.

(٢٧٦) انظر: Woepcke, *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre*, p. 92, et Boncompagni-Ludovisi, *Scritti di Leonardo Pisano. I: Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi*, vol. 1, p. 410.

ويمكن لأمثلة مكررة من هذا النوع أن تصبح برهاناً، مستقلاً عن المعادلات الديوفنطسية، على أن فيبوناتشي كان على علم بأعمال الكرخي.

(٢٧٧) انظر: Gino Arrighi, *Libro d'abaco. Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca St. di Lucca* (Lucca: [n. pb.], 1973), p. 112.

(٢٧٨) انظر: Arrighi, *Trattato d'aritmetica*, p. 58.

(٢٧٩) Vogel, *Ein Italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A 13)*, p. 24.

ـ من القرن الخامس عشر، في: *Algorismus Ratisbonensis*[(٢٨٠)] مع تنقيح له[(٢٨١)]؛ و *Trattato d'abaco* لبييرو دلا فرنشيسكا (Piero della Francesca)[(٢٨٢)]؛ و *Tractato d'abbacho* لبيير ماريا كالاندري (Pier Maria Calandri)[(٢٨٣)]؛ ومقالة مجهولة الكاتب في علم الحساب (حوالى ١٤٨٠م)[(٢٨٤)]؛ و *Triparty* لنيكولا شوكه[(٢٨٥)]؛ وعلم الحساب التجاري الألماني لجوهانس ويدمان (Johannes Widmann) (العام ١٤٨٩م)[(٢٨٦)]؛ وعلم الحساب الإيطالي لفرنشسكو بيللوس (Francesco Pellos) (العام ١٤٩٢م)[(٢٨٧)]؛

ـ من القرن السادس عشر، في: الـ *Summa* لفرنشسكو غاليغيه (Francesco Ghaligai) (العام ١٥٢١م)[(٢٨٨)]؛ والـ *Coss* لكريستوف رودولف (Christoff Rudolff) (العام ١٥٢٥م)[(٢٨٩)]؛ والـ *Coss* لآدم ريس (Adam Riese)[(٢٩٠)]؛ والـ *Practica arithmeticae* لجيروم كاردان (العام ١٥٣٩م)[(٢٩١)]؛ وعلم الحساب لنيكولو تارتاغليا (Niccolo Tartaglia) (العام ١٥٥٦م)[(٢٩٢)].

لم يستوعب مؤلفو القرون الوسطى على الإطلاق إلا ما شكّل، في التوسيعات والتطويرات المدهشة لخلفاء الخوارزمي، بداية الجبر. ولم يعتبر الغربُ هذا الجبر علماً

(٢٨٠) Kurt Vogel, *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis,* Schriftenreihe zur Bayerischen Landesgeschite; Bd. 50 (München: Beck, 1954), p. 72.

(٢٨١) انظر: Maximillian Curtze, «Ein Beiträge zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert,» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* Bd. 7 (1895), p. 52.

(٢٨٢) انظر: Pietro di Benedettodei Franceshi, *Trattato d'abaco. Dal Codice Ashburnhamiano (359 - 391) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze,* introduction by Gino Arrighi, Testimonianze di storia della scienza; VI (Pisa: Domus Galilaeana, 1970), p. 92.

(٢٨٣) انظر: Gino Arrighi, *Trattato d'abaco. Dal Codice Acq. e doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze,* Testimonianze di storia della scienza; VII (Pisa: Domus Galilaeana, 1974), p. 89.

(٢٨٤) انظر: H. E. Wappler, «Zur Geschichte der Deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,» *Progr. Gymn. Zwickau* (1886-1887), p. 16.

(٢٨٥) انظر: Marre, «Le Triparty en la science des nombres,» p. 635.

(٢٨٦) الورقة ٣٧و.

(٢٨٧) الورقة ٤٩ظ.

(٢٨٨) الورقة ٥٧ظ.

(٢٨٩) الورقة ٨ظ.

(٢٩٠) انظر: B. Berlet, *Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu Rechnen. Die Coss von Adam Riese* (Leipzig; Frankfurt: [n. pb.], 1892), p. 41.

(٢٩١) الفصل ٦٦، المسألة (٦٢).

(٢٩٢) الورقة ٢٦٦و.

مستقلاً إلا مؤخراً وبقي مُدرجاً في القرون الوسطى في حل المسائل المتعلقة بعلم الحساب التجاري، خاصة في إيطاليا وألمانيا حيث عرف الاستعمال الأوسع له. ويفلت فيبوناتشي من حكمنا المقتضب هذا، على الرغم من أن مؤلفه لا يظهر سوى انعكاس عرضي للكرجي والخيام أو ابن الهيثم. ومع فرانسوا فيات (François Viète) (العام ١٥٤٠ ـ ١٦٠٣م) سوف تُرسى أسس جديدة للجبر تدفع بالعلوم الغربية إلى عصرها الحديث.

- ١٧ -

علم الموسيقى

جان كلود شابربيه(*)

أولاً: مدخل إلى علم الموسيقى عند العرب

منذ ظهور الإسلام وفكرة مقارنة التجارب الموسيقية المحلية الموروثة بنظريات موسيقى الشعوب المجاورة مثل الإغريق، والبيزنطيين، واللخميين في مملكة الحيرة، والساسانيين في إيران، تراود الباحثين والعلماء العرب. وقد تمت هذه المقارنة ـ على وجه الخصوص ـ بنظريات موسيقى الإغريق. وإذا كان ما لاحظوه في التقاليد والممارسات الموسيقية قد جذبهم إلى تغليب الأنظمة النظرية. فإن الكتب والرسائل التي حرروها في هذا المجال جاءت على عكس ذلك، أي أنهم استنبطوا من النظرية أساليب التطبيق.

ونجد عادة في هذه الأعمال:

١ ـ السلم النظري الأساسي للأصوات المتوفرة

وقد عمدوا في المكانة الأولى إلى محاولة طرح هذه الأصوات (النغمات) على زند العود، وفي بعض الحالات على زند الطنبور (وهو من الأعواد الطويلة الزند)، وفي حالات أخرى نادرة جداً على الربابة، مُعددين مواضع كل الأصوات (النغمات) الممكنة المتوفرة بدءاً من الأرخم إلى الأرفع، ومحددين أيضاً الأبعاد أو الفسحات (Intervalles) التي تكونها تلك الأصوات. ونلاحظ أن الأنظمة المقامية الإغريقية القديمة وُلدت على آلة القيثارة (الليرا)؛ بينما تولدت الأنظمة الموسيقية المقامية في الحضارة العربية الإسلامية على آلة العود.

(*) باحث في المركز الوطني للبحث العلمي ـ فرنسا.

قام بترجمة هذا الفصل توفيق كرباج.

ويود الكاتب هنا أن يلفت أنظارنا إلى الفارق بين الآلتين، فإن كل نغمة تأتي على الآلة الأولى بحسب قوة شد الوتر، بينما تأتي النغمات على الآلة الثانية بحسب مقاييس الأوتار المختلفة. (وقياس طول الوتر أسهل وأدق من قياس شده).

ومن الضروري أن نفهم بوضوح أن السلم النظري للأصوات هو عبارة عن نظام مكون من النغمات الموجودة والمتسلسلة، مرتبة من الأرخم إلى الأرفع في ديوانٍ واحد أو ديوانات عدة، يأخذ منها الموسيقي المتعلم الأبعاد أو الدساتين ـ الدرجات التي تكوّن الأجناس والمقامات. وغالباً ما يتكون السلم النظري للأصوات من أربعة وعشرين (٢٤) دستاناً ـ درجة في الديوان الواحد، ويكفي أن يتم اختيار سبع دساتين ـ درجات من أصوات الديوان الواحد كي يتكون مقام موسيقي سباعي (Heptatonic).

وعلى ذلك،فإن ما يجب توفره هو تطويع وحساب نظام سمعي نظري، وكذلك نظام لشد الأوتار بما يناسب العزف.

٢ ـ الأجناس الثلاثية والرباعية والخماسية[١]

أما وقد تم تبني هذا النظام السمعي وحساباته وقياساته، فإن الرسائل البحثية المؤلفة في هذا المجال تتجه إلى دراسة الأجناس الرباعية على زند آلة العود (في أكثر الحالات)، وتحدد فيها مواضع اليد اليسرى والأصابع على الأوتار، والتي بدورها تحدد الأصوات بحسب اختيار الوتر والمسافة المستخدمة منه. ويحدد بذلك مواضع السبابة، والوسطى، والبنصر والخنصر. وفي مرحلة ثانية، لا تُحدد مواضع الأصوات المتوفرة على اختلافها وإنما اختيارات فقط من الأصوات التي تكون الأجناس الأساسية. على سبيل المثال، الجنس (الكبير) الماجور بثالثته الكبيرة، والجنس (الصغير) المينور بثالثته الصغيرة، أو الجنس المتوسط بثالثته المتوسطة. فالتحديد من خلال الدساتين ـ الدرجات هو أساسي لأنه يحدد استعمال الاصبعين الوسطى والبنصر بحسب استخدام ثالثة صغيرة أو كبيرة في الجنس الموسيقي.

٣ ـ المقامات الموسيقية (الطبوع)[٢]

ثم تنتقل الرسائل بشكل عام إلى ذكر المقامات الموسيقية المختلفة والتي تصفها بحسب الموسيقى المتصورة، وتفسر كيفية عزفها على زند الآلة الموسيقية المستخدمة لاستنباط

---

(١) عن الأجناس والمقامات، انظر: Jean-Claude Chabrier, «Makām,» dans: *Encyclopédie de l'Islam*, 6 vols. parus, 2ème éd. (Leiden: E. J. Brill, 1960-), vol. 6, pp. 94-102, حيث تجد جدولاً مرفقاً بالمقال عن الأجناس والمقامات، و *Encyclopédie de l'Islam* (Paris: Maisonneuve et Larose, 1986).

(٢) المصدر نفسه.

القياسات. إن الكم الأكبر من المقامات العربية والإيرانية والتركية وما يشابهها هو مكون من مقامات سباعية، أي تحتوي على سبع دساتين ـ درجات في الديوان، كما هي الحال في المقامات (الطبوع) الغربية. أما الاختلافات التي يمكن اكتشافها بين هذين النوعين من الموسيقى فهي بطبيعة الحال أحجام الأبعاد التي تفصل بين الدساتين ـ الدرجات.

إن بلورة مثل هذه الأنظمة الصوتية السمعية للتوفيق بين الممارسات الموسيقية المحلية والنظريات المتفرعة من قدماء الإغريق، ثم من أوروبا، قد غذت خيال العديد من العلماء والمفكرين من القرن الميلادي التاسع إلى أيامنا هذه. وهذا الهاجس قد أدى إلى تأليف العديد من الرسائل التي تعنى في جوهرها بالأنظمة الصوتية السمعية. ومن المثير أن معظم هذه الرسائل (والتي تُرجم عدد مهم منها إلى اللغات الغربية) يمكن الرجوع إليه ـ كمادة توثيقية لعلم الموسيقى عند العرب. ولدى القراءة المتأنية لهذه الرسائل، نجد أن أطروحات الأنظمة الصوتية السمعية، على الرغم من سيطرة النظام الفيثاغوري فيها، قد تطورت بشكل مثير للاهتمام منذ القرن التاسع وحتى القرن العشرين.

سنعتبر إذاً، أن من أهم المعايير الأساسية لتفهم العلم الموسيقي العربي (أو العربي الإسلامي بالمفهوم الواسع)، هي الدراسة المقارنة لتطور الأنظمة الصوتية السمعية المتالية من القرن التاسع إلى يومنا. لأن هذه المعايير تُطبق بخاصة على أكثر نماذج البنيان الموسيقي خصوصية، ولأنه كل ما يتعلق بالأنظمة الصوتية ـ السمعية من شد الأوتار، والسلالم الصوتية النظرية، وأبعاد الأجناس والمقامات، هو في نهاية المطاف واقع في ميدان اهتمام العلوم الصحيحة بحيث يمكن إخضاعه إلى الوصف العلمي الجدي والدراسات الحسابية الدقيقة.

ثانياً: معايير قياس الأصوات والأبعاد

١ ـ النسب العددية على الوتر

أ ـ قواعد عامة وتكوين الديوان: ١/ ٢

إن الرجوع إلى العلوم الصحيحة وإلى القيم القابلة للقياس، يؤدي إلى استخدام وحدات مقياسية دقيقة تقود إلى الموضوعية واعتماد أسلوب المقارنة في التعامل مع هذا العلم.

فمنذ العصور القديمة، استُخدم الوتر الهزاز المتخذ من آلة نظرية (المونوكورد) للتعبير عن الأصوات والأبعاد بين الأصوات، أو استخدم وتر آلة معروفة لطرح الأصوات (النغمات) بدقة علمية.

وكانت هذه هي الحال في الحضارة العربية الإسلامية، فاستخدموا آلة العود، وهي الآلة التي كانت تتطور بتطور هذه الحضارة. كما استخدموا في حالات نادرة الأعواد ذات الزنود الطويلة، الطنبور، الرباد (الرباب، الربابة، الكمانة)، أو آلات أخرى. ويُعبر بالنسب الحسابية عن الأصوات الصادرة من الوتر. ولنفترض وتراً مشدوداً من المفتاح الموجود على اليسار (في طرف الزند) حتى مكان ربط الوتر (Le cordier) على بطن الآلة وعلى يمينها، فإذا اهتز الوتر بكامله، فنفترض أنه يصدر نوتة الدو ٢، بالنسبة الوترية $\frac{١}{١}$، منطلقين من طرف الزند على اليسار (جهة المفاتيح)، إذا وضعنا إصبعاً من اليد اليسرى على وسط الوتر، وهذا في معظم الرسوم وضغطنا الوتر على الزند، وضربنا بالظفر على نصف الوتر الموجود على اليمين، فيهتز هذا النصف من الوتر الموجود بين الاصبع الكابس ومكان ربط الوتر على بطن الآلة، بينما يكون نصف الوتر الموجود بين الاصبع الكابس والمفتاح في طرف الزند، صامتاً. فإننا نصدر صوتاً إذاً في النسبة $\frac{٢}{١}$، «٢» هي طول الوتر و«١» هو جزء الوتر الذي يهتز، ونحصل بذلك على صوت في الديوان الأعلى هو، على سبيل المثال، الدو ٣. ويجب أن نعلم أنه في كل الأنظمة، إذا لم تتغير قوة شد الوتر، فالقسمة على «٢» لطول الوتر الهزاز تضاعف اهتزازات هذا الوتر، فترفع الصوت من ديوان إلى ديوان آخر. والعكس صحيح، فإن ضرب طول الوتر بالعدد «٢» تخفض الصوت بديوان.

ب ـ النظام الفيثاغوري

إذا وضعنا الاصبع الكابس على ثلث طول الوتر منطلقين من المفاتيح، يهتز تحت ضربة الظفر الثلثان الباقيان على اليمين، ونحصل بذلك على النسبة $\frac{٣}{٢}$، أي بعد الخامسة التامة، وعلى سبيل المثال هنا صول ٢. وإذا وضعنا الإصبع الكابس على ربع طول الوتر منطلقين من المفاتيح، فتهتز ثلاثة أرباع الوتر الباقية على اليمين، ونحصل بذلك على النسبة $\frac{٤}{٣}$، أي بعد الرابعة التامة، وعلى سبيل المثال هنا فا ٢. يستخلص بُعد الثانية الكبيرة أو الطنين، في النظام الفيثاغوري، من الفرق ما بين بعد الخامسة التامة $\frac{٣}{٢}$ وبعد الرابعة التامة $\frac{٤}{٣}$، أي $\frac{٩}{٨}$. فيصوت إذاً أول بعد طنيني بوضع الإصبع الكابس على تسع الوتر من المفاتيح، ويهتز بذلك الثمانية أتساع $\frac{٩}{٨}$ الباقية من الوتر، ويكون الصوت الناتج ره ٢. إن جمع ثانيتين كبيرتين أو الديتون يحدد الثالثة الكبرى الفيثاغورية، كما أنها تُحدد بجمع أربع أبعاد بالخامسة التامة (مثل: دو ـ صول ـ ره ـ لا ـ مي)، وتكون بالنسبة العددية $\frac{٨١}{٦٤}$، ونتصور هذه النسبة على الوتر وكأن الوتر مجزأ إلى ٨١ جزءاً منها ٦٤ جزءاً تهتز وتعطي بذلك نوطة أو درجة «المي ٢». وفي هذا النظام الفيثاغوري نفسه، تكون نتيجة طرح أو (إسقاط) بعد الثالثة الكبيرة $\frac{٨١}{٦٤}$ من بعد الرابعة التامة $\frac{٤}{٣}$، هي بُعد «الباقية» أو الفضلة (Limma) ويُسمى هذا البُعد أيضاً «بالنصف الصوت الصغير»، وهو محدد بالنسبة $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$، ويكون الصوت الناتج ره ٢ بيمول ناقص. ويكون البعد الناتج من طرح بُعد «الباقية» $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$ من بُعد الثانية الكبيرة $\frac{٩}{٨}$ هو بُعد «المتمم» (apotômé)، أو بُعد «النصف الصوت الكبير» والذي تحدد نسبة $\frac{٢١٨٧}{٢٠٤٨}$،

فيكون الصوت الناتج دو ٢ دييز زائد. أما البعد الناتج من طرح بُعد «الباقية» من بُعد «المتمم» هو بُعد «الفاصلة» الفيثاغورية (comma) المحدد بالنسبة $\frac{٥٣١٤٤١}{٥٢٤٢٨٨}$، (كما نُحدده طرح إثني عشر بعداً «بالخامسة» من سبعة أبعاد «ديوان»، ونجده في الفرق بين جمع ستة أبعاد «ثانية كبيرة» و«الديوان»). كما أن البعد الناتج من طرح بُعد «الفاصلة» الفيثاغورية من بُعد الثانية الكبيرة هو بعد «التتمة» وهو جمع «الباقيتين»، كما هو بُعد «الثانية المتوسطة» الفيثاغورية إذا أردنا تحديد مثل هذا البعد، وتكون نسبة هذا البُعد $\frac{٦٥٥٣٦}{٥٩٠٤٩}$، ويكون صوتها «ره» ناقصاً فاصلة. وسأرمز لهذه الدرجة ره. د.٢ في لائحة المختصرات «الأرابيسك». قيمة هذا البعد وهو الثالثة المنقوصة الفيثاغورية، أي «التتمة» أو ثانية متوسطة، قريبة من قيمة الطنيني الصغير الموجود في النظام الهارموني الطبيعي والذي نسبته $\frac{١٠}{٩}$.

وعلى الرغم من ضرورة عدم الخلط بين هذه الحسابات لدى علماء الصوت، فإن الموسيقي العادي غالباً ما يعزفها على الموضع نفسه تقريباً، فيكون الصوت نفسه.

ج ـ الأنظمة الهارمونية (أرسطوكسينوس، زارلينو، دوليزي. . . الخ)

لقد رأينا كيف يحسب النظام الفيثاغوري على المونوكورد (آلة نظرية وتر واحد) أو على العود، أو الكمان، متخذين كمرجع حسابي تسلسل أبعاد الخامسة التامة، ونرى مدى استكمالية مثل هذه العمليات. فهذا النظام الصوتي الفيثاغوري هو على العموم النظام الأهم بالنسبة للصوتية ـ السمعية الموسيقية، وأهميته ما زالت ملموسة في العالم العربي ـ الإسلامي وفي العالم الأوروبي. وهنالك أنظمة صوتية ـ سمعية أخرى، محددة بنسب حسابية أخرى ومنها أصوات (نغمات) وأبعاد ذات مسافات مختلفة ومغايرة.

ونجد في النظام الهارموني الأبعاد الخامسة نفسها $\frac{٣}{٢}$، الرابعة $\frac{٤}{٣}$، الثانية الكبيرة $\frac{٩}{٨}$، لكننا نجد أبعاداً جديدة: الثالثة الكبيرة الهارمونية $\frac{٥}{٤}$، الثالثة الصغيرة $\frac{٦}{٥}$، الثانية الكبيرة أي الطنين $\frac{٩}{٨}$ والطنيني الصغير $\frac{١٠}{٩}$، نوع من ثلثي الصوت $\frac{٢٧}{٢٥}$، نصف صوت كبير أو شبه متمم $\frac{١٦}{١٥}$، نصف صوت صغير أو شبه باقية $\frac{١٣٥}{١٢٨}$، النصف الصوت الأصغر $\frac{٢٥}{٢٤}$، دييز $\frac{١٢٨}{١٢٥}$، الفاصلة السينتونية $\frac{٨١}{٨٠}$، الدياسكيزما أو المفصول $\frac{٢٠٤٨}{٢٠٢٥}$ . . . الخ.

لدينا إذاً كم من الفوارق ما بين النظامين، الفيثاغوري والهارموني الطبيعي، في ما يخص الأصوات ودرجاتها. وهناك أماكن يلتحم فيها النظامان مثلاً: الليما أو الباقية $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$ و $\frac{١٣٥}{١٢٨}$، والمتمم $\frac{٢١٨٧}{٢٠٤٨}$ و $\frac{١٦}{١٥}$، التتمة $\frac{٦٥٥٣٦}{٥٩٠٤٩}$ و $\frac{١٠}{٩}$، والثالثة المتوسطة وهي في النظام الفيثاغوري رابعة منقوصة $\frac{٨١٩٢}{٦٥٦١}$ ونفس البعد في النظام الهارموني الطبيعي نسبته $\frac{٥}{٤}$.

تقسيم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً (إيراتوستين)

وهذا نظام صوتي ـ سمعي آخر منسوب لإيراتوستين استعمله العرب في الجاهلية، وهو كناية عن قسمة وهمية للوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً. وإذا انطلقنا من المفاتيح

استخدمنا الاصبع الكابس للتحديد على الوتر الحر المطلق الدساتين ـ الدرجات المتوفرة في الأربعين جزءاً.

لدينا نسبة $\frac{٤٠}{٤٠}$ للوتر الحر المطلق؛ عند توقيف أول جزء نحصل على النسبة $\frac{٤٠}{٣٩}$، أول جزأين نحصل على النسبة $\frac{٤٠}{٣٨} = \frac{٢٠}{١٩}$، ثلاثة أجزاء $\frac{٤٠}{٣٧}$، أربعة أجزاء يكونون العشر $\frac{٤٠}{٣٦} = \frac{٢٠}{١٨} = \frac{١٠}{٩}$ ما يساوي الطنيني الهارموني الصغير؛ ثم $\frac{٤٠}{٣٥} = \frac{٨}{٧}$ ما يعطي الطنيني الأكبر (Ton maxime)؛ $\frac{٤٠}{٣٤} = \frac{٢٠}{١٧}$ ، $\frac{٤٠}{٣٣}$؛ $\frac{٨٠}{٦٤} = \frac{٤٠}{٣٢} = \frac{٢٠}{١٦} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ ما يساوي ثالثة هارمونية كبيرة؛ $\frac{٤٠}{٣١}$ ؛ $\frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ ما يساوي الرابعة التامة؛ $\frac{٤٠}{٢٩}$ ؛ $\frac{٤٠}{٢٨} = \frac{٢٠}{١٤} = \frac{١٠}{٧}$ ما يساوي الرابعة المزيدة أو التريتون الهارموني؛ $\frac{٤٠}{٢٧}$ يساوي خامسة قصيرة أي ناقصة فاصلة تقريباً؛ $\frac{٤٠}{٢٦}$ يساوي خامسة زائدة فاصلتين تقريباً وقريبة من «خامسة الذئب» $\frac{١٩٢}{١٢٥}$ النشاز والتي أزعجت علماء الصوت الأوروبيين حتى ظهور دوزان أنصاف الصوف المتساوية في أول القرن الثامن عشر. نلاحظ أن هذا النظام لا يدخله بعد الخامسة التامة مع أنه يتفق في بعض الأصوات مع النظام الهارموني الطبيعي.

٢ ـ المقاييس الطولية على الوتر

أ ـ المبادىء العامة

من الممكن تحديد كل الأبعاد الممكن تصورها على آلة المونوكورد أو على آلة وترية ذات زند ناعم أي من دون دساتين جامدة، وذلك بالنسب العددية التي توضح علاقة طول الوتر المطلق (والمفترض أنه الصوت المرجع (Diapason)) وطول جزء الوتر الباقي بعدما وقفه الاصبع الكابس، علماً بأنه يمكن تحقيق هذه العملية ذهنياً. هذه الطريقة التي تستخدم النسب العددية هي من مزايا قدامى الإغريق، ولقد تواصلت إلى يومنا هذا من خلال أعمال العديد من الموسيقيين وعلماء الصوت من العالم العربي ـ الإسلامي وغيره من المدنيات، وبخاصة علماء القرون الوسطى. إن صعوبة هذه الطريقة تكمُنُ في حال نقص التخصص المتعمق، فإن وجود نسب عددية معقدة لا توحي فوراً بمكان الدستان أو الاصبع الكابس على الوتر، ولهذا يتوجب على الموسيقي حساب المسافة في أغلب الأحيان.

وبالعكس، إذا اخترنا طولاً معيناً لوتر مطلق أي وتر مرجعي ما بين مفاتيح آلة معينة ومكان ربط الأوتار على بطن هذه الآلة، فإن كل صوت محدد بنسبة عددية معينة يمكن تصور موضعه على الوتر بحسب مقياس خطي مستخلص من هذه النسبة.

ومن المفروض الأخذ بعين الاعتبار، سماكة الإصبع الكابس، وبعض العوامل غير المحسوسة والعفوية مثل الاختلافات الضئيلة بين الأوتار أو قوة وطريقة ضرب الأوتار، مما يخلق بعض الفوارق في الموضع الخطي النظري والموضع الحقيقي التطبيقي على الوتر

للحصول على صوت معين. أما على المونوكوردات، فوتران متوازيان مشدودان بالقوة نفسها، يقومان بوضع أثقال متساوية على أطراف الوترين. هذان الوتران لديهما المقياس المرجعي نفسه، أي أنهما مطلقان بين المفتاح ومكان ربطهما على بطن الآلة (أي ما بين المشط والجحش)، أو كما هو عادي، ما بين المفتاح والعربة الثابتة (الجحش). إذا كانت هاتان المسافتان متساويتين. ونبقي واحداً من الوترين على حاله - أي يصبح بمثابة صوت مرجعي ثابت - ونغير طول الوتر الثاني فيتحول صوته، نقصره إذاً كما شئنا، متحكمين بذلك بالتغير الصوتي الذي نحدثه، والذي نستطيع قياسه.

ب - المقاييس (الطولية) للنظام الفيثاغوري

فلنعتبر أن طول أوتار مونوكوردات المختبر هو متر أو ألف مليمتر، وذلك لتسهيل العمليات الحسابية. وبهذه الطريقة يصير من الأسهل تحديد مواضع الأبعاد المعروفة ومنها الأبعاد الفيثاغورية الأساسية.

وعلى سبيل المثال، الأوكتاف أو الديوان $\frac{٢}{١}$: ٥٠٠ ملم؛ الخامسة التامة $\frac{٣}{٢}$: ٣٣٣,٣ ملم؛ الرابعة التامة $\frac{٤}{٣}$: ٢٥٠ ملم؛ ذو الصوتين أو الثالثة الكبيرة $\frac{٨١}{٦٤}$: ٢٠٩,٩ ملم؛ الثانية المضاعفة $\frac{١٩٦٨٣}{١٦٣٨٤}$: ١٦٧,٦ ملم؛ الثالثة الصغيرة $\frac{٣٢}{٢٧}$: ١٥٦,٢٥ ملم؛ الثانية الكبيرة أو الطنيني $\frac{٩}{٨}$: ١١١,١١ ملم؛ المتمم $\frac{٢١٨٧}{٢٠٤٨}$: ٦٣,٥٥ ملم؛ الباقية $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$: ٥٠,٧٨ ملم؛ الفاصلة $\frac{٥٣١٤٤١}{٥٢٤٢٨٨}$: ١٣,٤٥ ملم؛ (وكل هذه المسافات محسوبة من المفتاح).

أما على الآلات التي يُعزفُ عليها، فالمعطيات العددية السابقة ليست بتلك السهولة. فعلى الأعواد ذات الأعناق الطويلة مثل **الطُنبور** - وهو آلة مستخدمة في القرون الوسطى - والأشكال الحديثة المطورة عنها مثل **الطُنبور التركي**، فإن طول الوتر هو متر واحد مما يدفع اليد اليسرى، أو اليد التي تكبس الأوتار على الزند، إلى تنقلات طولية كبيرة. أما على الكمانات، فتُرغم اليد الكابسة على العزف على مواضع شديدة التجاور نتيجة قصر أوتار تلك الآلات. وعلى الأعواد ذات الزند القصير، وهي الأعواد الأوروبية وأعواد الموسيقى العربية - الإيرانية - التركية وما استوعبته من مدنيات، فطريقة العزف هي التي أجبرت صانعي الأعواد على ألا يقصروا في الأوتار خشيةً تزاحم الأصابع على الزند القصير، كما أنهم تفادوا التطويل في الأوتار خشية إرغام العازف على القفز من موضع إلى آخر بيده على الزند. لذا أتى طول الوتر المطلق على هذه الآلات ٦٠٠ ملم، أو أطول بقليل في بعض الأعواد المغربية، أو أقصر بقليل وبطول ٥٨٥ ملم في الأعواد الشرقية الخارقة الصنع مثل أعواد مانول، وأونك في اسطنبول، وأعواد علي، وفاضل في بغداد.

ولتسهيل الحسابات، سنتخذ عوداً ذا أوتار طولها ٦٠٠ ملم، وسنحدد مواضع الأبعاد الفيثاغورية الأكثر استخداماً عليه، وكل هذه المسافات ننطلق بها من المفاتيح. الديوان (الأوكتاف) $\frac{٢}{١}$: ٣٠٠ ملم؛ الخامسة التامة $\frac{٣}{٢}$: ٢٠٠ ملم؛ الرابعة التامة

$\frac{٤}{٣}$: ١٥٠ ملم؛ الثالثة الكبرى ذات الصوتين $\frac{٨١}{٦٤}$: ١٢٥,٩٢ ملم؛ الثانية المزيدة $\frac{١٩٦٨٣}{١٦٣٨٤}$: ١٠٠,٥٦ ملم؛ الثالثة الصغرى $\frac{٣٢}{٢٧}$: ٩٣,٧٥ ملم؛ الثانية الكبرى الطنين $\frac{٩}{٨}$: ٦٦,٦٦ ملم؛ المتمم $\frac{٢١٨٧}{٢٠٤٨}$: ٣٨,١٣ ملم؛ الباقية $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$: ٣٠,٤٧ ملم؛ الفاصلة $\frac{٥٣١٤٤١}{٥٢٤٢٨٨}$: ٨,٠٧ ملم.

ج ـ مقارنة المقاييس الطولية الخطية بالأنظمة الأخرى

من الضروري ألا يخلط علماء الصوت بين الأنظمة الصوتية المختلفة. لذلك فإن معرفة الفوارق بين الأنظمة المختلفة ومراجعها المركزية هي من أهم متطلبات العمل، مباشرةً على وتر الآلة، والتي نفترض طول وترها ٦٠٠ ملم، وهو الطول الشائع لآلة العود.

كل الديوانات (الأوكتافات) هي متساوية، بنسبة $\frac{٢}{١}$ أي بموضع الاصبع الكابس على مسافة ٣٠٠ ملم من المفاتيح. الأبعاد بالخامسة أي خامسات الأوتار المطلقة تختلف بعض الشيء عن خامسة فيثاغورية إلى خامسة معدلة، الأولى $\frac{٣}{٢}$: ٢٠٠ ملم؛ الثانية لم يذكر الكاتب إذا ما كانت أصغر أو أكبر، وعلى الأرجح أن الخامسة المعدلة أصغر بفاصلة من الأولى بفارق $\frac{٣٢٨٠٥}{٣٢٧٦٨}$: ٠,٦٧٦ ملم؛ الرابعات، الرابعة التامة $\frac{٤}{٣}$: ١٥٠ ملم؛ الرابعة المعدلة أطول من الفيثاغورية ونادرة $\frac{٣٠٣}{٢٢٧}$: ١٥٠,٤٩ ملم (والفرق هو من جديد فاصلة $\frac{٣٢٨٠٥}{٣٢٧٦٨}$). الأبعاد بالثالثة والثانية، من الكبيرة إلى الصغيرة هي، ثالثة كبيرة فيثاغورية $\frac{٨١}{٦٤}$: ١٢٥,٩٢ ملم؛ ثالثة كبيرة معدلة $\frac{٦٣}{٥٠}$: ١٢٣,٨٠ ملم؛ ثالثة كبيرة هارمونية طبيعية $\frac{٨٠}{٦٤} = \frac{٥}{٤}$: ١٢٠ ملم؛ الثانية المضعفة الفيثاغورية $\frac{١٩٦٨٣}{١٦٣٨٤}$: ١٠٠,٥٦ ملم؛ الثالثة الصغيرة الهارمونية الطبيعية $\frac{٦}{٥}$: ١٠٠ ملم؛ الثانية المضعفة أو الثالثة الصغيرة المعدلة $\frac{٤٤}{٣٧}$: ٩٣,٧٥ ملم؛ الثانية المضعفة الهارمونية الطبيعية $\frac{٧٥}{٦٤}$: ٨٨ ملم؛ الثانية الكبيرة الفيثاغورية أو بُعد الصوت الكبير $\frac{٩}{٨}$: ٦٦,٦٦ ملم؛ الثانية الكبيرة المعدلة $\frac{٤٤٩}{٤٠٠}$: ٦٥,٤٧ ملم؛ بُعد الصوت الهارموني الطبيعي الصغير $\frac{١٠}{٩}$: ٦٠ ملم؛ لا يُفرق عن التمة الفيثاغورية أو الثالثة المنقوصة الفيثاغورية أو عن الثانية المعتدلة الفيثاغورية $\frac{٦٥٥٣٦}{٥٩٠٤٩}$: ٥٩,٣٩ ملم؛ وبالنسبة لأنصاف الأصوات فنصف الصوت «المتمم» الفيثاغوري $\frac{٢١٨٧}{٢٠٤٨}$: ٣٨,١٣ ملم لا يفرق إلا بشيء ضئيل عن نصف الصوت الهارموني الطبيعي $\frac{١٦}{١٥}$: ٣٧,٥٠ ملم؛ النصف الصوت المعدل $\frac{٨٩}{٨٤}$: ٣٣,٧٠ ملم؛ النصف الصوت الملوّن الصغير $\frac{١٣٥}{١٢٨}$: ٣١,١١ ملم؛ يكبُر الباقية الفيثاغورية بشيء ضئيل $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$: ٣٠,٤٧ ملم.

أما بالنسبة للفواصل، الفاصلة الفيثاغورية $\frac{٥٣١٤٤١}{٥٢٤٢٨٨}$: ٨,٠٧ ملم؛ الفاصلة الهولدرية (Holdérien) $\sqrt[٥٣]{٢}$: ٧,٧٩ ملم، الفاصلة السيتونية أو الديديمية (نسبةً لديدموس) وهي فاصلة النظام الهارموني الطبيعي $\frac{٨١}{٨٠}$: ٧,٤١ ملم؛ المنفصل الهارموني $\frac{٣٢٨٠٥}{٣٢٧٦٨}$: ٠,٦٧٦ ملم. نلاحظ إذاً مناطق تتداخل فيها الأنظمة بعضها ببعض.

د ـ مقاييس رفع ورخم الصوت والأبعاد

(من دون الأخذ بعين الاعتبار طول الوتر أو الأنظمة الصوتية المختلفة: الهيرتز (Hertz)، ساڤارت (Savart) والسنت (Cent)).

لقد رأينا أنه منذ العصور القديمة مقاييس الصوت كلها (من رفع ورخم) قد أُجريت على الوتر الواحد المطلق المونوكورد. وتحددت هذه الأصوات بالنسب الحسابية كذلك. إذا عرفنا طول الوتر تتحدد تلك الأصوات بمقاييس طولية دقيقة. لكنه أصبح باستطاعتنا إحداث أصوات دون الاستعانة بالأوتار وحتى من دون آلة موسيقية، فقد ابتكر العلماء مقاييس جديدة واستخدموها. منها الهيرتز وهو مقياس للاهتزازات، كما ابتكروا السنت والساڤارت، وهي وحدات قياسية للصوت، والفاصلة الهولدرية و$\frac{١}{٥٣}$ من الديوان.

هـ ـ التعديلات الصوتية المختصة بالموسيقى المقامية (الطبوع) غير المعدلة، ومختصرات الأرابيسك(٣)

لقد تمت دراسة الوسائل المختلفة لقياس رفع أو رخم الصوت: كالنسب العددية والمقاييس الطولية، الهيرتز، الساڤارت، السنت، والفواصل الهولدرية... الخ. لكن ومنذ عصور تعود الإنسان أن يطلق التسميات مثل أسماء النوطة لدرجات مقام ما متصوراً أنها على سلم معين، ويكتبها على مدرج غربي بخمسة أسطر وأربع فراغات (وكما كانت الحال في الغرب فلم يكن هناك إلا ست تسميات في البدء ثم سبع للنوطة أي أوت، ره، مي، فا، صول، لا، سي لتحديد الديوان الذي يستوعب ١٢ درجة فعلية، فتم استخدام إشارات لتعديل أو تحويل الدرجات لرفعها أو خفضها، الدييز والبيمول، مما سمح على

(٣) لقد ابتكرت هذه اللائحة لاختصار تسميات الدرجة بعدما كتبت أطروحتي عن مدرسة العود البغدادية. إن التعديلات «العربية» و«الإيرانية» بالربع الصوت شبيهة بمعانيها للتعديلات الغربية بالنصف الصوت، لكنها لا تحدّد الأصوات في سلم عام. معظم الأصابع ـ الدرجات (المواضع) في الحضارة العربية ـ الإسلامية هي فيثاغورية الأصل (فاصلة، باقية، متمم، تتمة...). أما الأتراك فلديهم طريقة بالتعديلات تستطيع أن تذكر تلك الأصوات، لكنها لا تقبل التنقيل (التصوير). هذا التفاوت أرغمني انطلاقاً من الإشارات أو علامات التعديل المعروفة في الموسيقى العربية ـ الإيرانية ـ التركية على ابتكار لائحة اختصارات تحدد الأصوات بقيم لا تكبر عن تسع الصوت (١/٩ طنين) أي الفاصلة الهولدرية. هذا هو تعريفي لهذه اللائحة في مجموعة التسجيلات (الاسطوانات) لحفلات الموسيقى الشرقية، الأرابيسك: «إن لائحة اختصارات أرابيسك تواجه الأنظمة الصوتية العربية والإيرانية والتركية، بأرباع الصوت والفواصل، معتبرين أن ربع الصوت (٥٠ سنت) يساوي فاصلتان (٤٥,٢ سنت)، مستخدمين العديد من الإشارات المعروفة في الموسيقى الشرقية ومبتكرين إشارات أخرى لتحديد مواضع التعديلات التي تطرق على الطنين أو بعد الصوت وفواصله التسع. ومنذ ذلك الوقت طبقت هذه اللائحة على تحليل عزف الموسيقيين المتميزين بأسلوب تلاعبهم بالفواصل».

الأقل تفريق سلم الدو ماجور دو ـ ره ـ مي طبيعية ـ فا ـ صول ـ لا ـ سي ـ دو، وسلم الدو مينور دو ـ ره ـ مي بيمول ـ فا ـ صول ـ لا بيمول ـ سي بيمول ـ دو). لكن هذه الإشارات لا تكفي وينقصها الدقة حين نحاول كتابة موسيقى قديمة أو غير أوروبية.

بعض الكتاب وصف طرقاً في التدوين الموسيقي (نوع من النوطة) مستخدماً المدرج منذ القرن الثالث عشر (شيلوه) في الموسيقى العربية أو ما يشبهها، لكن التدوين الفعلي هو حديث يرجع إلى أيام اكتشاف الشرقيين للمدرج الموسيقي الغربي في القرن الثامن عشر وعلى وجه الخصوص في القرن التاسع عشر (فارمر). وبما أنه في هذه الحقبة من التاريخ كان التدوين وإشارات التحويل تخص الدوزان المعدل باثني عشر نصف صوت متساوين للديوان الواحد، اضطر العرب والإيرانيون إلى وضع إشارات تحويل إضافية مثل النصف دييز والنصف بيمول وبذلك توصلوا إلى مواضع الثلاثة أرباع الصوت والخمسة أرباع الصوت وسبعة أرباع الصوت. وهكذا وُلد للعرب النصف دييز والكار دييز (ربع دييز) والنصف بيمول والكار بيمول (ربع بيمول). ووُلد للإيرانيين الصوري والكورون. أما الأتراك الذين حافظوا على النظام الفيثاغوري بفواصله الذي ابتكره صفي الدين الأرموي في القرن الثالث عشر ـ والذي لاقى بعض التحسين في القرن الأخير ـ فلديهم رموز للتحويل شديدة الدقة لكنها لا تسمح بالتنقيل (التصوير) إلى كل الدرجات.

وبالنسبة للعرب والعجم، فقد أتاحت إشاراتهم إلى اعتقادهم أن موسيقاهم تتحدد من خلال الربع الصوت مع العلم إن هذا القياس ليس إلا تقريبياً وقد صار موجوداً عند تسوية الموسيقى العربية والإيرانية مع المدرج الموسيقي الغربي.

وسنرى فيما بعد أن المقامات العربية والفارسية والتركية مكونة من سبع درجات للديوان، فيكفي أن نحدد المواضع الأربعة والعشرين للأصابع ـ درجات، مفصولين باثني عشر نصف صوت متساويين ومأخوذين من القرن الثامن عشر الغربي، ما يمكن أن يكون لديه مرادف في الموسيقى الشرقية وهو السلم المعدل المتساوي ذو الأربعة وعشرين ربع صوت أي أربعة وعشرون موضعاً ـ إصبعاً ـ درجة.

لهذه الأسباب فإن رموز التحويلات الشرقية بأنصاف الدييز والدييز والبيمول ونصف البيمول ليست إلا تقديراً تقريبياً يستخدمه الموسيقيون المتمكنون بطريقة فنية تثريهم عندما يأخذون بعين الاعتبار الأبعاد الموجودة في نظام صوتي أكثر ثراء. وبعض الموسيقيين العلماء يتوصلون إلى مثل هذه النتيجة، وهم عزفة العود البغداديون والحلبيون.

أما الأتراك فإنهم يستعملون رموزهم الخاصة ويقسمون الطنين (بُعد الصوت الكامل) إلى فاصلة، وباقية، ومتمم وتتمة. وفي السبعينيات ومن الاجتماع لكلوكيوم علماء الموسيقى(٤) في بيروت، فقد حاولوا إثراء رموز التحويل المألوف، ولكنهم لم يحاولوا أن يفسروا تلك التغييرات، وبقيت هذه التحويلات غير مبررة.

---

(٤) والذي ذكره صلاح المهدي في عمله. انظر: صلاح المهدي، **الموسيقى العربية** (١٩٧٢).

ومن أجل تحديد كل التحويلات بمقياس «الفاصلة» التي تسمح «بالتنقيل» على كل الدرجات، أوجدت في عام ١٩٧٨ نظاماً لإشارات التحويل بالفواصل والتي أطلقت عليه اسم رموز «الأرابيسك». تلك الرموز (الأرابيسك) تستطيع أن تواجه الرموز العربية، والإيرانية والتركية بأرباع الصوت والفواصل. ويستوعب هذا النظام، الربع الصوت وكأنه فاصلتان هولدريتان، ويستخدم العديد من الرموز والإشارات المعروفة في المدرجات الشرقية، كما أنه يستخدم إشارات جديدة لتحديد تحويلات تصيب أياً من الفواصل التسع التي تكون بُعد الصوت الكامل (الطنين).

إن قسمة بُعد الصوت (الطنين) إلى تسعة أجزاء وهي الفواصل الهولدرية التسع، تسمح بتحديد التعديلات إلى حد أدنى هو تسع الصوت، كما تسهل فصل الثالثة الفيثاغورية من الثالثة الكبيرة الطبيعية (الهارمونية). ودراسة الدرجات الصغيرة التسع لكل فاصلة من بُعد الصوت، مهم للغاية لتفهم تطابق أو تجاوز الأبعاد الموجودة في الأنظمة الأخرى المعروفة عالمياً.

الجدول رقم (١٧ ـ ١)

ج.ك. شابربيه. لائحة رموز التعديلات «الأرابيسك»، قسمة الصوت إلى تسعة مراجع

- ٠ ـ الدرجة الدياتونية غير المعدلة، أول الوتر من المفتاح، بيكار.
- ١ ـ (صوت) مرفوع فاصلة هولدرية واحدة، أو فاصلة سينتونية أو فاصلة فيثاغورية. وهي أيضاً بعد الصوت المخفض ثماني فواصل هولدرية أو مخفض بعد تتمة أو صوت صغير.
- ٢ ـ مرفوع بفاصلتين هـ أو دييز ربع الصوت ١٢٨/١٢٥؛ مخفض بسبع فواصل هـ أو ثلاثه أرباع الصوت ١١٢٥/١٠٢٤ أو ١٢/١١.
- ٣ ـ مرفوع بنسبة أصغر نصف صوت، ثلاث فواصل ٢٥/٢٤؛ مخفض بنسبة النصف الصوت الأكبر، ست فواصل ٢٧/٢٥.
- ٤ ـ مرفوع بأربع فواصل هـ، باقية، أو نصف صوت صغير ١٣٥/١٢٨؛ مخفض بخمس فواصل هـ، متمم، أو نصف صوت كبير ١٦/١٥.
- ٤,٥ ـ مرفوع بنسبة النصف الصوت المعدل المتساوي، أو ربعي الصوت؛ مخفض بنسبة النصف الصوت المعدل المتساوي، أو ربعين الصوت.
- ٥ ـ مرفوع بخمس فواصل هـ، متمم، أو نصف صوت كبير ١٦/١٥؛ مخفض بأربع فواصل هـ، باقية، أو نصف صوت صغير ١٣٥/١٢٨.
- ٦ ـ مرفوع بست فواصل هـ، أو النصف الصوت الأكبر ٢٧/٢٥؛ مخفض بثلاث فواصل هـ، أو بنسبة أصغر نصف صوت ٢٥/٢٤.
- ٧ ـ مرفوع بسبع فواصل هـ، ثلاثة أرباع الصوت ١١٢٥/١٠٢٤، ١٢/١١؛ مخفض بفاصلتين

يتبع

هـ، دييز ربع الصوت ١٢٨/١٢٥.

- ٨ - مرفوع بثمان فواصل هـ، تتمة أو بعد الصوت الصغير؛ مخفض فاصلة هـ واحدة، فاصلة سينتونية، فاصلة فيثاغورية.

- ٩ - درجة دياتونية غير معدلة (أي غير معوّلة) تبعد عن الأولى بعد الصوت الكبير (الطنين)، بيكار.

لقد استخدمت هذه اللائحة للتعديلات أو التحويلات في كل التحاليل الموسيقية منذ سنة ١٩٧٨، ولقد برهنت فعاليتها الدقيقة والتي تخدم مصلحة هذه التحاليل.

و - السلم النظري للأصوات الواقعية، لائحة الرموز (ج.ك.ش.) والأربعة والعشرين إصبعاً - درجة الواقعين في الديوان

عند المرور من السلم إلى المقام في الدوزان المعتدل الغربي، يكفي أن نحدد سبع درجات من الإثني عشر إصبعاً - درجة في الديوان لتحديد مقام سباعي. وفي الموسيقى العربية وجميع أنواع الموسيقى المستوعبة فيها، يكفي اختيار سبع درجات من أربعة وعشرين إصبعاً - درجة في الديوان لتكوين مقام سباعي (عربي). ومن هنا أهمية وضع تسميات للأربعة والعشرين إصبعاً - درجة، وتكون هذه التسميات حروفاً وأرقاماً تغنينا عن الانشغال بالأسماء المعقدة أو النسب الحسابية التي تلازم رفع أو رخم الصوت، كما أنه من الضروري أن تستوعب التسميات الجديدة النغمات المجاورة لتلك الأصابع - الدرجات التي ترمز إليها وبذلك يوضح المقام. فلقد أثبتنا هنا «لائحة ج.ك.ش.» لتسهيل التنقيل (التصوير).

الجدول رقم (١٧ - ٢)

لائحة ج.ك.ش. للأربعة والعشرين إصبعاً - درجة في الديوان

١٧ إصبع درجة(*)	النوطة من الدو	رموز ج.ك.ش.	القيمة بالربع الصوت	القيمة بالفواصل	النظام الفيثاغوري
+(**)	دو	صفر أ صفر أ + ١ ب	صفر - ١	صفر فاصلة ٤	- فاصلة باقية

يتبع

(*) (إصبع - درجة): مصطلح جديد، أول من استخدمه هو جان كلود شابربيه، ويعني موضع الإصبع على زند الآلة وموضع الدرجة الموسيقية بالنسبة إلى السلم الموسيقي النغمي العام.

(**) في بعض الأنظمة لا يُذْكَرُ إلا سبعة عشر إصبع - درجة للديوان. نستطيع أن نميزهم بعلامة + الموجودة على هامش اليمين لهذه اللائحة.

تابع

+		٢ ج	٢	٥	متمم
+		٣ د	٣	٨	تتمة ثانية متوسطة. ثالثة مخفضة
+	ره	٤ هـ	٤	٩	ثانية كبيرة. صوت كبير
		٤هـ +	ـ	١٠	ثانية كبيرة زائدة فاصلة
		٥ و	٥	١٣	ثالثة صغيرة
+		٦ ز	٦	١٤	ثانية مزيدة
+		٧ح	٧	١٧	ثالثة متوسطة. رابعة منقوصة
+	مي	٨ ط	٨	١٨	ثالثة كبيرة ذو الصوتين
		٨ط +	ـ	١٩	ثالثة كبيرة، زائدة فاصلة
		٩ ي	٩	٢١	رابعة متوسطة
+	فا	١٠ ك	١٠	٢٢	رابعة تامة
		١٠ك +	ـ	٢٣	ثالثة مزيدة. رابعة تامة زائدة فاصلة
		١١ ل	١١	٢٦	خامسة منقوصة
+		١٢ م	١٢	٢٧	رابعة مزيدة. تريتون
+		١٣ن	١٣	٣٠	سادسة منقوصة. خامسة متوسطة
+	صول	١٤س	١٤	٣١	خامسة تامة
		١٤س+	ـ	٣٢	خامسة تامة زائدة فاصلة
		١٥ع	١٥	٣٥	سادسة صغيرة
+		١٦ف	١٦	٣٦	خامسة مزيدة
+		١٧ ص	١٧	٣٩	سابعة منقوصة. سادسة متوسطة
+	لا	١٨ ق	١٨	٤٠	سادسة كبيرة
		١٨ ق+	ـ	٤١	سادسة كبيرة زائدة فاصلة
		١٩ ر -	ـ	٤٣	سابعة صغيرة ناقصة فاصلة
		١٩ ر	١٩	٤٤	سابعة صغيرة
+		٢٠ ش	٢٠	٤٥	سادسة مزيدة
+		٢١ ت	٢١	٤٨	ثامنة منقوصة. سابعة متوسطة
+	سي	٢٢ خ	٢٢	٤٩	سابعة كبيرة
		٢٣ ذ	٢٣	٥٢	تاسعة منقوصة. ثامنة متوسطة
	دو	٢٤ ض	٢٤	٥٣	ثامنة تامة

ز ـ وجهات التضارب بين معايير المقاييس والسلم

لقد عثرنا على عدد من العناصر أو وحدات لقياس الرفع والرخم في الصوت، وقياس الأبعاد بين صوتين أو أكثر، وكيفية ترتيب الأصوات في إطار نظام صوتي ـ سمعي. هذه العناصر، ومنها النسب الحسابية، والمقاييس الطولية المستخرجة من النسب، والوحدات القياسية مثل الهيرتز، والسافارت أو السنت (ولن نذكر إلا الأخير رامزين إليه بإشارة"ٰ)، والدرجات المكونة من فواصل والممثلة بالفاصلة الهولدرية (ومنها تسع للطنين وثلاث وخمسون للديوان)، ولائحة التحويلات «أرابيسك» (الذي يقسم الطنين إلى تسعة مراجع مثل الفاصلة الهولدرية)، لائحة التسميات ج. ك. شابربيه للأربعة وعشرين إصبعاً ـ درجة في الديوان؛ كل هذا سيسمح لنا، في المرحلة البائية، التقارب في اختبار الإمكانيات النظرية للسلم الواقعي للأصوات.

في البداية سنعرض السلم الملون الفيثاغوري(٥) كما يُعزف على عود أوتاره طولها ٦٠٠ ملم. للتسهيل، سنفترض أن الوتر المطلق صوته دو ٢، وسنرتب لائحة جديدة كما يلي:

العمود الأول: اسم النوتات من دو إلى دو مع التحويلات بحسب لائحة «الأرابيسك».

العمود الثاني: موضع الإصبع على الوتر منطلقين من اليسار أي المفاتيح، للحصول على صوت معين.

العمود الثالث: النسبة العددية مع طول الوتر.

العمود الرابع: البعد بالسنت للوتر المطلق.

العمود الخامس: البعد بالفواصل الهولدرية.

العمود السادس: لائحة ج.ك.ش.

العمود السابع: تلخيص لاسم البُعد.

العمود الثامن: الاسم الكامل للبُعد الفيثاغوري.

---

(٥) إن السلم الفيثاغوري المستخدم هو كما جاء في رسائل صفي الدين الأرموي البغدادي الذي عاش في القرن الثالث عشر، مع الأخذ بعين الاعتبار التطوير الذي طرأ على هذا السلم في تركيا. هذا السلم يتطابق مع السلم الذي يمكن أن يستنبطه في القرن العشرين عازف عود ذو مستوى موسيقي رفيع من العراق أو من تركيا.

الجدول رقم (١٧ ـ ٣)

جدول المقارنة، تحقيق سلم كروماتي (ملون) فيثاغوري على وتر ما جان كلود شابربيه. ١٩٨٧

النوطة من الدو		ملم ٦٠٠ ملم للوتر	النسبة الحسابية طول الوتر الذي يهتز	سنت	هولدر	لائحة ج. ك. ش.	اختصار	اسم البعد
دو	♮	مطلق	١/١	صفر	صفر	صفر أ	...	...
دو	+	٨,٠٧	٥٣١٤٤١/٥٢٤٢٨٨	٢٣,٥	١,٠٤	صفر أ +	+	فاصلة فيثاغورية
ره	♭	٣٠,٤٧	٢٥٦/٢٤٣	٩٠,٢	٤	١ ب	٢ ص	باقية. ثانية صغيرة
دو	♯	٣٨,١٣	٢١٨٧/٢٠٤٨	١١٣,٧	٥	٢ ج	-	متمم
ره	𝄳	٥٩,٣٩	٦٥٥٣٦/٥٩٠٤٩	١٨٠,٥	٨	٣ د	٢ م	تتمة. ثانية متوسطة ثالثة منقوصة
ره	♮	٦٦,٦٦	٩/٨	٢٠٣,٩	٩	٤ هـ	٢ ك	طنين. ثانية كبيرة
ره	+	٧٣,٨	٤٧٨٢٩٦٩/٤١٩٤٣٠٤	٢٢٨	١٠	٤ هـ +	٢ +	ثانية كبيرة زائدة فاصلة
مي	♭	٩٣,٧٥	٣٢/٢٧	٢٩٤,١	١٣	٥ و	٣ ص	ثالثة صغيرة
ره	♯	١٠٠,٥٦	١٩٦٨٣/١٦٣٨٤	٣١٧,٦	١٤	٦ ز	٢ ض	ثانية مزيدة
مي	𝄳	١١٩,٤٦	٨١٨٢/٦٥٦١	٣٨٤,٤	١٧	٧ ح	٣ م	ثالثة متوسطة. رابعة منقوصة
مي	♮	١٢٥,٩٢	٨١/٦٤	٤٠٧,٨	١٨	٨ ط	٣ ك	ثالثة كبيرة. ذو الصوتين
مي	+	١٣١,٩	٤٣٠٤٦٧٢١/٣٣٥٥٤٤٣٢	٤٣٢	١٩	٨ ط +	٣ +	ثالثة كبيرة زائدة فاصلة
فا	𝄳	١٤٣,٩	٢٠٩٧١٥٢/١٥٩٤٣٢٣	٤٧٤	٢١	٩ ي	٤ م	رابعة متوسطة
فا	♮	١٥٠	٤/٣	٤٩٨	٢٢	١٠ ك	٤ تا	رابعة تامة
فا	+	١٥٦	١٧٧١٤٧/١٣١٠٧٢	٥٢١,٥	٢٣	١٠ ك +	٣ ض	ثالثة مزيدة. رابعة زائدة فاصلة
صول	♭	١٧٢,٨٥	١٠٢٤/٧٢٩	٥٨٨,٣	٢٦	١١ ل	٥ ن	خامسة منقوصة
فا	♯	١٧٨,٦	٧٢٩/٥١٢	٦١١,٧	٢٧	١٢ م	٤ ض	رابعة مزيدة. تريتون
صول	♭	١٩٤,٥	٢٦٢١٤٤/١٧٧١٤٧	٦٧٨,٥	٣٠	١٣ ن	٥ م	سادسة منقوصة. خامسة متوسطة

يتبع

صول ♮	٢٠٠	٣/٢	٧٠٢	٣١	١٤ س	٥ تا	خامسة تامة
صول +	٢٠٥,٤	١٥٩٤٣٢٣/١٠٤٨٥٧٦	٧٢٦	٣٢	١٤ س +	٥ +	خامسة تامة زائدة فاصلة
لا ♭	٢٢٠,٤	١٢٨/٨١	٧٩٢,٢	٣٥	١٥ ع	٦ ص	سادسة صغيرة
صول ♯	٢٢٥,٤	٦٥٦١/٤٠٩٦	٨١٥,٦	٣٦	١٦ ف	٥ ض	خامسة مزيدة
لا 𝄳	٢٣٩,٥	٣٢٧٦٨/١٩٦٨٣	٨٨٢,٤	٣٩	١٧ ص	٦ م	سابعة منقوصة. سادسة متوسطة
لا ♮	٢٤٤,٤	٢٧/١٦	٩٠٥,٩	٤٠	١٨ ق	٦ ك	سادسة كبيرة
لا +	٢٤٩,١	١٤٣٤٨٩٠٧/٨٣٨٨٦٠٨	٩٣٠	٤١	١٨ ق +	٦ +	سادسة كبيرة زائدة
لا 𝄰	٢٥٧,٨	٨٣٨٨٦٠٨/٤٧٨٢٩٦٩	٩٧٢	٤٣	١٩ ر-	–	سابعة صغيرة ناقصة فاصلة
سي ♭	٢٦٢,٥	١٦/٩	٩٩٦,١	٤٤	١٩ ر	٧ ص	سابعة صغيرة
لا ♯	٢٦٧	٥٩٠٤٩/٣٢٧٦٨	١٠١٩,٦	٤٥	٢٠ ش	٦ ض	سادسة مزيدة
سي 𝄳	٢٧٩,٦	٤٠٩٦/٢١٨٧	١٠٨٦,٣	٤٨	٢١ ت	٧ م	ديوان منقوص. سابعة متوسطة
سي ♮	٢٨٤	٢٤٣/١٢٨	١١٠٩,٨	٤٩	٢٢ خ	٧ ك	سابعة كبيرة
دو 𝄳	٢٩٥,٩	١٠٤٨٥٧٦/٥٣١٤٤١	١١٧٦,٥	٥٢	٢٣ ذ	٨ م	تاسعة منقوصة. ثامنة متوسطة
دو ♮	٣٠٠	٢/١	١٢٠٠	٥٣	٢٤ ض	٨ تا	ديوان تام (أي ثامنة تامة)

ثالثاً: مراحل النظريات الموسيقية العربية

سنعتبر أن معطيات علم الصوت أصبحت معلومة. وهكذا، فإن نسيج الديوان لم يعد مجهولاً، وكل ما سيُطرح عن تطور النظريات الموسيقية كما وصفت في الثقافة العربية ـ الإسلامية يكون من ضمن حقل مدروس.

انكب العلماء على توضيح بعض الأبعاد الاختبارية مثل الثانية المتوسطة الموجودة بين بُعد النصف الصوت والصوت الكامل، هذا ومن أوائل عهود الإسلام. ونحدد هذا البُعد وكأنه ثلاثة أرباع الصوت. كما يُعتبرُ بُعد الثالثة المتوسطة، الموجود بين الثالثة الصغيرة والثالثة الكبيرة، وكأنه مكون من سبعة أرباع الصوت.

وعلينا التطرق إلى وصف الأنظمة التي تتابعت في الموسيقى العربية في هذا المجال.

١ ـ النظام الصوتي السمعي في الجاهلية الأولى

قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً.

الجدول رقم (١٧ ـ ٤)
النظام الصوتي السمعي في الجاهلية الأولى (قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً)

ملم الوتر طوله ٦٠٠ ملم	النسبة	السنت ١٢٠٠ في الديوان	هولدر ٣٥ في الديوان	لائحة ج.ك.ش.	معادلة أو تفسير (انظر جدول المقارنة، حرف «د»)
١٥	٣٩/ ٤٠	٤٤	٢ـ	١ ب	أقل من ربع الصوت، دييز إيراتوستيني
٣٠	٣٨/ ٤٠ = ١٩/ ٢٠	٨٩	٤ـ	٢ ج	أقل من باقية فيثاغورس، أقل من كروماتي دوليزين
٤٥	٣٧/ ٤٠	١٣٥	٦+	٣ د	أكبر من دياتوني زارلينو (٢٥/ ٢٧)، أقل من ثانية متوسطة ابن سينا، ١٢/ ١٣
٦٠	٣٦/ ٤٠ = ٩/ ١٠	١٨٢	٨	٤ هـ	بُعد الصوت الصغير
٧٥	٣٥/ ٤٠ = ٧/ ٨	٢٣١	١٠	٥ و	بُعد الصوت الأكبر، الطنين الكبير (انظر إيران القرن العشرين)
٩٠	٣٤/ ٤٠ = ١٧/ ٢٠	٢٨١	١٢,٤	٦ ز	ما بين الثانية المزيدة الطبيعية والثالثة الصغيرة الفيثاغورية
١٠٥	٣٣/ ٤٠	ـ	١٥ـ	٧ ح	ما بين الثانية المزيدة الفيثاغورية والثالثة المتوسطة السفلى (٣٢/ ٣٩)
١٢٠	٣٢/ ٤٠ = ٤/ ٥	٣٨٦	١٧	٨ ط	الثالثة الكبيرة الهارمونية الطبيعية

يتبع

تابع

١٣٥	٣١/٤٠	-	١٩,٥	٩ ي	رابعة منقوصة
١٥٠	٣٠/٤٠ = ٣/٤	٤٩٨	٢٢	١٠ ك	رابعة تامة
١٦٥	٢٩/٤٠	-	٢٤,٥	١١ ل	أقل من الرابعة المنقوصة زارلينو (١٨/ ٢٥)، ٥٧٠ سنت، ١٦٨ ملم، ٢٥ هولدر)
١٨٠	٢٨/٤٠ = ٧/ ١٠	٦١٧	٢٧ +	١٢ م	تريتون طبيعي (الرابعة الهارمونية الطبيعية المضعفة)
١٩٥	٢٧/٤٠	-	٣٠	١٣ ن	خامسة قصيرة من الدوزان الأوروبي غير المعتدل
٢١٠	٢٦/٤٠ = ١٣/ ٢٠	-	٣٣	١٤ س	أكبر من خامسة الذئب (١٢٥/ ١٩٢) دوزان غير معتدل
٢٢٥	٢٥/٤٠ = ٥/٨	٨١٤	٣٦	١٥ ع	سادسة صغيرة هارمونية طبيعية
٢٤٠	٢٤/٤٠ = ٣/ ٥	٨٨٤	٣٩	١٦ ف	سادسة كبيرة هارمونية طبيعية
٢٥٥	٢٣/٤٠	-	٤٢	١٧ ص	أكبر من سادسة مضعفة لزارلينو (٧٢/ ١٢٥)
٢٧٠	٢٢/٤٠ = ١١/ ٢٠	-	٤٦	١٨ ق	أكبر من سابعة صغيرة لزارلينو. أكبر من سابعة مضعفة فيثاغورية
٢٨٥	٢٠/٤٠	-	٤٩	١٩ ر	أكبر من سابعة كبيرة فيثاغورية (١٢٨/ ٢٤٣)
٣٠٠	٢٠/٤٠ = ١/٢	١٢٠٠	٥٣	٢٠ ش	الديوان (الأوكتاف)

ليس لدينا الكافي من الدلائل لتفهم نظريات موسيقى العرب في الجاهلية. لكنه باستطاعتنا استشارة **كتاب الموسيقى الكبير** للفارابي وهو من أشهر علماء الموسيقى في العالم العربي - الإسلامي. ويصف في الكتاب الثاني، الحديث الثاني، آلة الطنبور البغدادي بعبارات دقيقة(٦).

ويصف الفارابي(٧) نظاماً صوتياً سمعياً ينسبه إلى موسيقيي ما قبل الإسلام، والذين عزفوا على عود ذي زند طويل (طنبور) بوضعهم خمسة دساتين - منطلقين من المفاتيح - متساوين في المسافة، المسافة الواحدة تساوي جزءاً من أربعين من طول الوتر. وإذا افترضنا طول الوتر ٦٠٠ ملم فتكون مسافة الدساتين من المفاتيح كما يلي: الأول ١٥ ملم، الثاني ٣٠ ملم، الثالث ٤٥ ملم، الرابع ٦٠ ملم، الخامس ٧٥ ملم، هذه الدساتين تُسمى

---

(٦) انظر: Rodolphe d'Erlanger, *La Musique arabe*, 6 vols. (Paris: Geuthner, 1930-1959), vol. 1: *Tunbūr de Baghdad*, pp. 218-242.

(٧) الفارابي وهو العالم الأكثر تخصصاً من بين علماء الحضارة العربية الإسلامية في القرون الوسطى الأولى (القرن العاشر)، يضع نظاماً صوتياً لآلة العود يتبع فيه نمط الفيثاغوريين، ويضع نظاماً صوتياً لآلة =

«وثنية»؛ وتُستخدم ـ يقول الفارابي ـ لعزف ألحان وثنية؛ (وكلمة وثني هنا تأتي بمعناها الجاهلي). هذه الدساتين موزعة على ما بين موضع المفاتيح وثُمن الوتر (٧/٨؛ ٧٥ ملم لوتر طوله ٦٠٠ ملم)، وتتحكم بها أربعة أصابع. لا يُعزف إذاً إلا على جزء من الوتر لا يتعدى الثانية الأكبر، الطنين الأكبر؛ في حال تقبلنا مثل هذا التفسير، نستطيع أن نستخلص أنه مهما كان البُعد بين وترين متتاليين فإن العزف على هذه الآلة لا يكون إلا لألحان بدائية جداً.

وبما أن المسافة متساوية بين الدساتين، فإن الأبعاد الصوتية الناتجة غير متساوية. وهذا ما يدفع الفارابي إلى طرح وضع دساتين ذات مسافات تناقصية للحصول على أبعاد صوتية ثابتة.

ويكمل الفارابي عرضه ذاكراً وجود ثلاثة دساتين إضافية ما بين ثُمن طول الوتر أي بالنسبة الصوتية٧/٨(*) وخمس طول الوتر أي بالنسبة الصوتية ٤/٥(**)، بالمسافات الآتية ٩٠ ملم، ١٠٥ ملم، و١٢٠ ملم. كما أنه يستشرف زيادة دستانين على المواضع الآتية، ٣١/٤٠ : ١٣٥ ملم، و٣٠/٤٠ = ٣/٤ : ١٥٠ ملم (ربع طول الوتر) بما يسمح للوصول إلى بُعد الرابعة. ويُفسر أنه بزيادة هذين البعدين بطريقة تمكنهما من أن يتجانسا مع الدساتين ذات المسافات المتناقصة، نحصلُ على أبعاد صوتية متساوية بحسب نظام يسميه «أنثوياً» (Féminin).

ويذكر الفارابي الإمكانيات الواردة في دوزان الوترين أو الثلاثة للطنبور البغدادي. لذلك فباستطاعتنا دوزان أوتارهم بنفس الصوت ـ ما يضيق المنطقة الصوتية للآلة ـ كما نستطيع أن ندوزنهم مفصولين ببُعد الباقية ـ ما يُظن غير ملائم ـ أو أحسن من ذلك، وحسب الفارابي أن تدوزن أوتار تلك الآلات ببُعد الرابعة، (ما يعطي إمكانيات لحنية مقبولة)(٨).

وكرر الفارابي بأن هذا النظام الصوتي السمعي الجاهلي ما زال موجوداً في القرن العاشر ومستخدماً على الطنبور البغدادي لدى بعض الموسيقيين، كما أن التأكيد على قدرات تحسين مثل هذا النظام، قد أدى إلى شيوع الفكرة بأن هذا الدوزان هو فعلاً الدوزان العربي

= العود أيضاً يتبع فيه النظام الهارموني الطبيعي، كما أنه واضع النظام الصوتي الفيثاغوري الفاصلي لآلة الطنبور الخراساني، وأخيراً يدرس النظام الصوتي الذي يقسم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً على آلة الطنبور البغدادية. كل هذه الأنظمة الصوتية تتباين في: أبو نصر محمد بن محمد الفارابي، **كتاب الموسيقى الكبير** (القاهرة: دار الكتاب العربي، ١٩٣٧). انظر الترجمة الفرنسية له، في: Erlanger, Ibid., vols. 1 - 2.

(*) أو ما بين ثمن طول الوتر فيبقى منه ٧/٨ رنانة وتكون نسبة الذبذبات الصوتية ٨/٧ . (المترجم).

(**) أو ما بين خمس طول الوتر فيبقى منه ٤/٥ رنانة فتكون إذاً نسبة هذا الطول الصوتية ٥/٤ . (المترجم).

(٨) Erlanger, Ibid., vol. 1.

الجاهلي بالنسبة للباحثين كوسغارتن (Kosegarten)، وفارمر (Farmer) وباركشلي (Barkechli)[٩].

لكن مثل هذا التأكيد يؤدي إلى خطأ أكبر لأن طريقة قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً، أي الديوان الأول إلى عشرين جزءاً، هي طريقة قديمة نجدها على وجه الخصوص عند إيراتوستين[١٠]؛ فهذا الدوزان إذاً لا يخص العرب على وجه الخصوص.

وقسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً يستأهل بعض الاهتمام بغض النظر إن كان هذا النظام الصوتي عربياً أو غير عربي. وسنكمل نحن هذا النظام لنغطي الديوان (الأوكتاف) مع العلم أن الفارابي اقتصر في دراسته لهذا الموضوع على بُعد الخامسة.

سيتمثل لدينا على الجدول ومن اليسار إلى اليمين:

- عدد المليمترات من وتر طوله ٦٠٠ ملم منطلقين من المفاتيح.
- النسب الحسابية واختزالاتها.
- القيمة بالسنت مع العلم أن هنالك ١٢٠٠ سنت للديوان.
- القيمة بالفواصل الهولدرية معتمدين ٥٣ هولدراً للديوان.
- التحديد بحسب لائحة ج.ك. شابرييه (٢٤ دليلاً للديوان).
- معادلة أو تعليق.

علماً بأن الفقرات الثلاث الأخيرة ليست مذكورة دائماً.

مع أن بدائية مثل هذا النظام لم تسمح له بالاستمرارية، وبخاصة وأنه ينقصه العديد من الأبعاد والنغمات، لكنه من المثير ملاحظة دخول هذا النظام على مستوى الأصابع - الدرجات - بأبعادٍ موجودة في أنظمة أخرى وبخاصة في النظام الطبيعي الهارموني:

---

(٩) انظر: Henry George Farmer, «Mūsīkī,» dans: *Encyclopédie de l'Islam*, p. 801, et Mehdi Barkechli, «La Musique iranienne,» dans: Roland Manuel, ed., *Histoire de la musique*, encyclopédie de la plélade; 9, 16 (Paris: Gallimard, 1960), pp. 453-525.

(١٠) Farmer, Ibid., p. 801.

الجدول رقم (١٧ ـ ٥)

القاسم المشترك ما بين نظام تقسيم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً والنظام الهارموني الطبيعي

دستان ٣٠ ملم	٨٩°	٢٠/١٩ = ٤٠/٣٨	أقل من باقية، أقل من كروماتي دوليزين
٦٠ ملم	١٨٢°	١٠/٩ = ٤٠/٣٦	الطنين الصغير الطبيعي الهارموني
٧٥ ملم	٢٣١°	٨/٧ = ٤٠/٣٥	الطنين الأكبر، بعد الصوت الأكبر
١٢٠ ملم	٢٣١°	٥/٤ = ٤٠/٣٢	الثالثة الكبيرة الهارمونية الطبيعية
١٥٠ ملم	٤٩٨°	٤/٣ = ٤٠/٣٠	رابعة تامة
١٨٠ ملم	٦١٧°	١٠/٧ = ٤٠/٢٨	التريتون (بعد الثلاث أصوات) الهارموني الطبيعي
١٩٥ ملم	٦٨٠°	٤٠/٢٧	خامسة قصيرة
٢١٠ ملم		٢٠/١٣ = ٤٠/٢٦	أكبر من خامسة الذئب (١٢٥/ ١٩٢)
٢٢٥ ملم	٨١٤°	٨/٥ = ٤٠/٢٥	السادسة الصغيرة الهارمونية الطبيعية
٢٤٠ ملم	٨٨٤°	٥/٣ = ٤٠/٢٤	السادسة الكبيرة الهارمونية الطبيعية
٢٥٥ ملم		٤٠/٢٣	أكبر من السادسة المضعفة لزارلينو
٢٨٥ ملم		٤٠/٢١	أكبر من السابعة الكبيرة الفيثاغورية
٣٠٠ ملم		٢/١ = ٤٠/٢٠	الأوكتاف (الديوان)

نلاحظ أنه ينقص هذا النظام بُعد الصوت (الكبير) أو الطنين، وبُعد الخامسة التامة، لكنه يتضمن أصابع - درجات تستوعب ثانية وثالثة متوسطة والتي سنتطرق لها في كل الأنظمة الموسيقية التي ستأتي في ما بعد (لكن مع بعض التراوح في الاهتزازات).

٢ - الأنظمة الصوتية منذ فجر الثقافة العربية الإسلامية حتى انحدارها

أ - النظام الفيثاغوري في العالم الإسلامي

الموصلي (عود، القرن التاسع).

الكندي (عود، القرن التاسع).

ابن المنجم (عود، القرن العاشر).

الفارابي (الجنك، القرن العاشر).

الجدول رقم (١٧ - ٦)

النظام الفيثاغوري في القرون الأولى للإسلام (الموصلي، الكندي)

ملم الوتر ٦٠٠ ملم	النسبة	السنت حسب فارمر	الفواصل	أصابع - درجات	تعليق، معادلة (انظر جدول المقارنة، العمود الأول)
٣٠,٤٧	٢٥٦/٢٤٣	٩٠° ٢	٤	(مُجنب - السبابة)	باقية (ليست بالسبابة)
٣٨,١٣	٢١٨٧/٢٠٤٨	١١٣° ٧	٥	(مُجنب - السبابة)	مُتمم (ليست بالسبابة)
٦٦,٦٦	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	سبابة	طنين، صوت كبير
٩٣,٧٥	٣٢/٢٧	٢٩٤° ١	١٣	وسطى القدامى	ثالثة صغيرة
١٢٥,٩٢	٨١/٦٤	٤٠٧° ٨	١٨	بنصر	ثالثة كبيرة
١٥٠	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	خنصر	رابعة تامة
١٧٨,٦	٧٢٩/٥١٢	٦١١° ٧	٢٧	مخالف	تريتون، رابعة مزيدة
٢٠٠	٣١٢	٧٠٢°	٣١	الوتر المجاور المطلق	خامسة تامة

إن وجهات النظر والاتجاهات الموسيقية في القرون الأولى للإسلام معروفة من خلال كتابات الكندي (القرن التاسع) وابن المنجم (القرن العاشر)، وترجمات المستشرقين الكبار مثل روانيه (Rouanet) وديرلانجيه (D'Erlanger) وفارمر (Farmer)[11].

---

(١١) يذكر فارمر (Farmer) مخطوطات مختلفة ثلاث للكندي ويذكر تأثير إقليدس وبطلميوس في المخطوطة الثالثة. أما تفسير نظريات الكندي فهي ليست مطابقة ولا حتى بقلم فارمر. يعطينا فارمر تفسيرَيْن لنظرية الكندي، انظر: المصدر نفسه، و «Arabian Music,» in: Sir George Grove, *Grove's Dictionary of Music and Musicians*, edited by J. A. Fuller Maitland, 5 vols., (Philadelphia, PA.: T. Presser Co., 1916).

وبحسب ابن المنجم فإن إسحاق الموصلي، وهو عازف عود في بلاط الخلفاء العباسيين، وعالم بالقانون وإنسان مثقف متعصب للكلاسيكية الموسيقية، يطبق النظرية الفيثاغورية أي نظريات «القدامى» (الإغريق) مع أنه يعلن عن عدم معرفته بمثل هذه النظريات. وفي رسالة للكندي فإن دساتين (مواضع الأصابع) آلة العود تتطابق مع النظرية الفيثاغورية[١٢].

إن فصل النظريات الموسيقية عن الاختبارات الصوتية ومسافاتها الوترية على آلة المونوكورد، لهو مستحيل في هذا العهد. ويذكر أن آلة المونوكورد تستبدل عادة بزند آلة العود وبأوتاره المدوزنة بالرابعة التامة. بذلك نستطيع تحقيق سبعة مواضع للأصابع - درجات من مقام سباعي على وترين متتالين مستخدمين أصابع أربعة من اليد اليسرى.

وبما أن العازف لا يتخطى بُعد الرابعة في كل وتر فعزف البُعد الثامن (أي جواب الصوت الأول) لا يحصل على الوتر الثاني إلا «بمخالفة» العزف أي بتنقيل اليد اليسرى على الزند نحو «بطن» الآلة (ما يُسمى عادةً بالصندوق) - وفي بعض الحالات يصل الإصبع المخالف إلى ما بعد وسط الآلة ناحية مكان ربط الأوتار للوصول إلى الجوابات الرقيقة. إن الأصوات الناتجة هي «جواب» (مرادف موسيقي بصوت رفيع) للصوت الرخيم الموجود على الوتر الأول، وإذا كان الصوت الرخيم هو مطلق الوتر الأول فيكون الوضع المخالف على الوتر الثاني هو موضع بعد الخامسة منه.

هذه الطريقة المكونة من دراسة نظام صوتي - سمعي على زند آلة العود تسمى بنظرية «الأصابع»، وتحدد هذه الطريقة وفي ذاك الزمن ثمانية طبوع (مقامات) موسيقية وصفها الأصفهاني (من القرن العاشر) في كتاب **الأغاني** والذي حقّقه العديد من علماء الموسيقى والتاريخ والأدب في القرن العشرين[١٣].

---

(١٢) في ما يتعلق بالنظام الفيثاغوري في الثقافة الإسلامية (الموصلي، ابن المنجم، الكندي، الأصفهاني)، انظر: Jules Rouanet, «La Musique arabe,» dans: Albert Lavignac, ed., *Encyclopédie de la musique et dictionnaire du conservatoire* (Paris: C. Delagrave, 1913-1931), vol. 1, 5, pp. 2701-2704; Erlanger, *La Musique arabe*, vol. 3, p. 592; Farmer, Ibid., pp. 801-803; Henry George Farmer: «The Origin of Arabian Lute and Rebec,» (1930), and «The Lute Scale of Avicenna,» *Journal of the Royal Asiatic Society* (April 1937); Mahmoud Guettat, *La Musique classique du Maghreb*, la bibliothèque arabe, collection hommes et sociétés (Paris: Sindbad, 1980), pp. 60-81, et Jean Claude Chabrier, «Un mouvement de réhabilitation de la musique arabe et du luth oriental: L'Ecole de Bagdad de Cherif Muhieddin à Munīr Bachīr,» (Thèse dactylographiée, La Sorbonne, Paris, 1976), pp. 368-370.

نلاحظ أن بعض الكتاب العرب من المعاصرين ساءهم أن أصل هذا النظام هو فيثاغوري وكانوا يودون لو وجدوا له جذوراً سامية أو عربية.

(١٣) انظر: أبو الفرج علي بن الحسين الأصبهاني، **كتاب الأغاني**، تحقيق علي محمد البجاوي، ٢٤ج (القاهرة: دار الكتب المصرية، القسم الأدبي، ١٩٢٧ - ١٩٧٤)، ج ٥، ص ٢٧٠، أو الطبعة الأخرى له: =

والواقع أن هذا النظام ليس إلا نظاماً فيثاغورياً مبسّطاً، فلا يدخله أي أصبع - درجة من النوع الغريب، أي الذي يُحدد بُعداً من الأبعاد المتوسطة - بُعد ثانية متوسطة أو بُعد ثالثة متوسطة. أبعاد هذا النظام هي الباقية، المتمم، بُعد الصوت (الطنين)، الثالثة الصغيرة، الثالثة الكبيرة، الرابعة التامة، الرابعة المزيدة (تريتون)[١٤]، والخامسة التامة على الوتر التالي.

الجدول رقم (١٧ - ٧)

النظام الصوتي لزلزل المقابل للنظام الفيثاغوري (القرن الثامن)، قسمة الأوتار الطولية الاختبارية

ملم من وتر طوله ٦٠٠ ملم	النسبة	السنت (فارمر)	الفواصل (ج. ك. ش.)	إصبع - درجة على آلة العود	تعليق، معادلة (نظر جدول المقارنة، العمود الثاني)
٣٠,٤٧	٢٥٦/٢٤٣	٩٠° ٢	٤	مُجنب القديمة	باقية (وهي مستمرة في كل الأنظمة)
٤٨,١٥	١٦٢/١٤٩	١٥٤°	٦,٤	مُجنب الفرس	أقل من ثلاثة أرباع الصوت
٥٥,٥٥	٥٤/٤٩	١٦٨°	٧,٤	مجنب زلزل	أقل من بُعد الطنين الصغير
٦٦,٦٦	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	سبابة	بُعد الطنين الفيثاغوري
٩٣,٧٥	٣٢/٢٧	٩٤° ١	١٣	وسطى قديمة	ثالثة صغيرة فيثاغورية
٩٦,٣٠	٨١/٦٨	٣٠٣°	١٣,٤	وسطى الفرس	أكبر من ثالثة صغيرة
١١١,١١	٢٧/٢٢	٣٥٥°	١٥,٧	وسطى زلزل	ثالثة متوسطة
١٢٥,٩٢	٨١/٦٤	٢٠٧° ٨	١٨	بنصر	ثالثة كبيرة فيثاغورية
١٥٠	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	خنصر	رابعة تامة

وإذا أخذنا في الاعتبار أقوال العازفين كالموصلي، والرواة كالأصفهاني وابن المنجم، والنظريين كالكندي والفارابي، فتكون خصوصية هذا العصر هي تعدد الأنظمة الصوتية - السمعية وتعايشها. وهنالك على الأقل مجاورة نظام قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً، ونظام يشبه النظام الفيثاغوري محدداً أبعاداً مثل الباقية، المتمم، الطنين أو الثانية الكبيرة، الثالثة الصغيرة، بُعد الصوتين أو الثالثة الكبيرة، الرابعة، الرابعة المزيدة (التريتون) والخامسة. لقد رأينا وجوه التقابل الدقيقة (الرابعة التامة والديوان)، ووجوه التقابل التقريبي (الباقية، السابعة الكبيرة)، ما بين هذين النظامين.

ولا نستطيع الجزم على وجه الدقة بوجود نظريات صوتية أخرى مطبقة في ذلك العهد، لكننا نلاحظ أنه في أواخر القرن الثامن برز عوّاد بغدادي اسمه منصور زلزل - وهو صهر إبراهيم الموصلي أي زوج عمة إسحاق الموصلي - الذي استطاع إدخال مواضع جديدة، كزيادة للنظام الفيثاغوري، لأصابع - درجات حددها من خلال مواضع النظام الفيثاغوري العالمي. والمبدأ الأساسي الذي اعتمده زلزل لحساب المواضع هو قسمة المسافة

= ٢١ج في ١٠ (بولاق، مصر: المطبعة المصرية، ١٢٨٥هـ)، ج ٥، ص ٥٣، نقلاً عن: Erlanger, Ibid., vol. 4, p. 377.

(١٤) ذكر الفارابي بُعد الرابعة المزيدة (التريتون)، في: الفارابي، **كتاب الموسيقى الكبير**، انظر ترجمته، في: Erlanger, Ibid., vol. 1, livre 2: *Instruments, harpes*, pp. 286-304.

الموجودة بين إصبعين أو درجتين إلى مسافتين متساويتين واتخاذ الوسط الجديد كموضع لإصبع - درجة جديد. هذه الطريقة تشبه نوعاً ما طريقة قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً، أو لعلها مستوحاة منها.

وإذا أخذنا بعين الاعتبار ما يعتقده فارمر، فإن الوسطى القديمة أو بُعد الثالثة الصغيرة الفيثاغورية (٢٧/ ٣٢؛ ١ °٢٩٤؛ ١٣ هـ، ٩٣,٧٥ ملم) وموضعها عادةً قبل بُعد الرابعة بطنين[15]، لكنها في هذه الحالة أكبر أو هنالك خطأ في حسابها. فإن موسيقيي ذلك الزمن يقسمون المسافة الموجودة بين موضع السبابة أي بُعد الثانية الكبيرة الفيثاغورية (٨/ ٩؛ ٩ °٢٠٣؛ ٩ هـ؛ ٦٦,٦٦ ملم) وموضع البنصر، أي بُعد الصوتين أو الثالثة الكبيرة الفيثاغورية (٦٤/ ٨١، ٨ °٤٠٧، ١٨هـ، ١٢٥,٩٢ ملم)، كما أنهم يحددون موضعاً جديداً للوسطى - بُعد الثالثة الصغيرة عادةً - يعطي صوت ثالثة صغيرة أرفع أو أعلى من الثالثة الصغيرة الفيثاغورية ويطلقون عليها اسم «وسطى الفرس» (٦٨/ ٨١، °٣٠٣، ١٣,٤ هـ، ٩٦,٢٩ ملم). هذه الطريقة في تقسيم الوتر إلى أجزاء متساوية ترفع الثالثة الصغيرة تسعة سنتات أي ما يقارب نصف الفاصلة.

وينقُصُنا تحديد - بطريقة التقسيم المتساوي للوتر - بُعد الثالثة المتوسطة وموضعها بين ثالثة الفرس الصغيرة (٦٨/ ٨١ . . . الخ) وبُعد الصوتين أو الثالثة الكبيرة الفيثاغورية (٦٤/ ٨١ . . . الخ)، هذا الموضع بين الثالثتين يعطي «وسطى زلزل» أو ثالثة زلزل المتوسطة (٢٢/ ٢٧، °٣٥٥، ١٥,٧ هـ، ١١١,١١ملم).

ومن الموضعين الجديدين يتحدد لدينا مرجعان للحساب، وهذان المرجعان قد تم سابقاً حساب الأصابع - الدرجات الجديدة الناتجة منهما:

- **مجنب الفرس**، وموضعه في نصف مسافة ثالثة الفرس الصغيرة (٦٨/ ٨١.. . الخ). والمفاتيح، وهو مجنب للسبابة (١٤٩/ ١٦٢، °١٤٥، ٦,٤ هـ، ٤٨,١٥ ملم)، يقل هذا البعد بشيء قليل من بعد ثلاثة أرباع الصوت. (رمزنا لهذا البعد في جدول الخامسة، سهم مشطوب بثلاثة خطوط صغيرة).

- **ثانية زلزل المتوسطة**، وموضعها في نصف مسافة وسطى زلزل أو ثالثة زلزل المتوسطة (٢٢/ ٢٧ . . . الخ) والمفاتيح، وهي أيضاً مجنب للسبابة (٤٩/ ٥٤، °١٦٨، ٧,٤ هـ، ٥٥,٥٥ ملم) أكبر بقليل من بُعد ثلاثة أرباع الصوت، وأصغر بقليل من بعد الطنين الصغير أو التتمة.

والواقع أن الأصابع أو الدرجات المتوسطة دخلت نظريات الموسيقى في أيام منصور زلزل، وهذه الأصابع - الدرجات هي مأخوذة من الموسيقى المحلية على الأرجح، وأن لقب «متوسطة» ليس إلا لقباً حديثاً، فالثالثة المتوسطة هي «وسطى زلزل»، أما موضع مجاور السبابة أي الثانية المتوسطة فهو «مجنب زلزل»، وثانية متوسطة أخرى هي «مجنب الفرس».

---

(١٥) انظر السطر الرابع من الجدول رقم (١٧ - ٦).

٣ ـ أنظمة الصوت الفيثاغورية الفارابية (القرن العاشر)

الفارابي هو من أعظم علماء الحضارة الإسلامية (توفي في دمشق عام ٣٣٩ هـ/ ٩٥٠م) وما يهمنا من علمه هنا هو الناحية الموسيقية تحديداً، وهو من أهم العلماء في هذا المجال. له **كتاب الموسيقى الكبير**، وقد سمحت لنا الترجمات الوافرة له (من العربية إلى لغات أجنبية) بالتحليل الدقيق لهذا المخطوط[١٦].

ويذكر الفارابي «القدامى» أي الإغريق، من بداية رسالته الكلاسيكية الشكل. ويحدد الموسيقى على أنها قادرة على تحريك إحساسات عدة، منها الترفيه أو التسلية، الخيال والخلجات، لكنه يعتبرها أقل قدرة على التأثير في الأحاسيس من الشعر. ويُحلل الفارابي بعد ذلك مسألة الأبعاد، و«الأجناس» الثمانية ويصفُ منها ثلاثة: جنس أساسي (كبير)، جنس متوسط، وجنس ثانوي (صغير)[١٧].

والكتاب الأول مُخصص لـ «مبادىء العلم الموسيقي والتأليف»، ثم يرجع إلى الأبعاد، ونلحظ شيئاً من النقص عنده في هذا المجال، إلا أنه يجب الأخذ بعين الاعتبار أن حسابات الأبعاد ليست بالشيء العادي والسهل، وبخاصة في ذلك الزمن. كما أنه يستصعب قسمة بعد الطنين، ولا يصل إلا إلى مقاييس خطية على الوتر لا تفيد الغرض الموسيقي البحت. أما ربع الصوت أو «بُعد الإرخاء» فيأخذه من قسمة الطنين الفيثاغوري (٦٦,٦٦ ملم، ٩/٨، ٩ ٢٠٣°، ٩ هولدر) إلى نصفي الصوت (نصفي الطنين) متساويين خطياً (الأول = ٣٣,٣٣ ملم، ١٨/١٧، ٩٨°، ٤,٣٣ هولدر) ـ أو يأخذه من قسمة الطنين إلى أربعة أرباع متساوية المسافة الخطية على الوتر. وتكون نسب الأول منها: (١٦,٦٦ ملم، ٣٥/ ٣٦، ٤٩°، ٢,١٧ هولدر). ويطرح الفارابي نصفين للطنين أي بُعدي نصف الصوت ذي النسبتين من نوع نسب «الكل والجزء» أي ١٨/١٧ و١٦/١٧[١٨].

وفي ما يخص النوطة ووصف المقامات يعود الفارابي إلى التسميات الإغريقية. وليس في دراسته للإيقاعات أي الأوزان والضروب، أي تجديد. لكنه يصف طريقة في بناء آلة المونوكورد التي تتيح وضع الأصوات عليها، وقياس المسافات والأبعاد الصوتية[١٩].

والكتاب الثاني من **كتاب الموسيقى الكبير**، يخصصه الفارابي للآلات، ويعتبر الآلات الموسيقية وسيلة في تدقيق النظريات الموسيقية. ويعالج في بحثه الأول من **كتاب الموسيقى الكبير** مواضع الأصابع (أي الدساتين أو الأصابع ـ الدرجات) على آلة العود، ثم يدرس السلم العام وطرق «شد» أوتار هذه الآلة. ونجد في هذا البحث الأولي المكونات الأساسية

(١٦) Erlanger, Ibid., vol. 1 et vol. 2, pp. 1-101.

(١٧) المصدر نفسه، مج ١، المقدمة، ص ١ ـ ٧٧.

(١٨) المصدر نفسه، مج ١، الكتاب الأول، ص ٧٩ ـ ١١٤.

(١٩) المصدر نفسه، مج ١، الكتاب الأول، ص ١١٥ ـ ١٦٢.

الجدول رقم (١٧ ـ ٨)

لائحة الفارابي، نوطات، أبعاد على العود؛ مجرى بُعد الرابعة؛ عشرة أصابع - درجات نظرية

اختصار ج. ك. ش.(*)	ملم من وتر ٦٠٠ ملم	الدرجة من بُعد الرابعة	النسبة	سنت	هولدر ٥٣ الديوان	لائحة ج. ك. ش.	اسم البُعد وحسابه على المونوكورد أو العود
–	صفر	–	–	صفر	صفر	صفر أ	الوتر المطلق
١/٤ ط	١٦,٦٦	–	٣٦/٣٥	٤٩°	٢,١٧	١ ب	ربع الصوت ناتج عن قسمة الوتر إلى أربعة أجزاء متساوية
٢ ص ث	٣٠,٤٧	١	٢٥٦/٢٤٣	٩٠° ٢	٤ ـ	١ ب	باقية فيثاغورية، مجنب السبابة، تتمة مطروح من رابعة
١/٢ ط	٣٣,٣٣	٢	١٨/١٧	٩٨°	٤,٣٣	٢ ج	نصف صوت، مجنب السبابة، أول من جزأين متساويين من المفاتيح إلى الطنين
١ م ث	٣٨,١٣	–	٢١٨٧/٢٠٤٨	١١٣° ٧	+ ٥	٢ ج	متمم فيثاغوري، مجنب السبابة، باقية مطروحة من طنين
٢ و ف	٤٨,١٥	٣	١٦٢/١٤٩	١٤٥°	٦,٤١	٣ د	ثانية الفرس المتوسطة، مجنب السبابة، أول من جزأين متساويين من المفاتيح ووسطى الفرس
٣/٤ ط	٥٠	–	١٢/١١	١٥١°	٦,٦٨	٣ د	ثلاثة أرباع الصوت، مرادف وسطى زلزل على الوتر الأول

يتبع

(*) اختصار ج. ك. ش.: ص = صغيرة؛ و = متوسطة؛ ك = كبيرة؛ م = مزيدة؛ ث = فيثاغورس؛ ف = الفُرس؛ ز = زلزل؛ ط = طنين.

تابع

٢ وز	٥٥,٥٥	٤	٥٤/٤٩	١٦٨°	٧,٤٣	٣ د	ثانية زلزل المتوسطة، مجنب السبابة، أول من جزأين متساويين من المفاتيح إلى وسطى زلزل
٢ ك ث	٦٦,٦٦	٥	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	٤ هـ	ثانية كبيرة، طنين فيثاغوري، سبابة، ١/٩ الوتر، خامسة ناقص رابعة
٣ ص ث	٩٣,٧٥	٦	٣٢/٢٧	٢٩٤° ١	١٣	٥ و	ثالثة صغيرة فيثاغورية، مُجنب الوسطى، رابعة ناقص طنين
٣ ص ف	٩٦,٢٩	٧	٨١/٦٨	٣٠٣°	١٣,٤	٥ و	ثالثة زلزل الصغيرة، وسطى الفرس، (من سلسلة تساوي الأجزاء، طنين، تتمة...)
٢ م ث	١٠٠,٥٦	ـ	١٩٦٨٣/١٦٣٨٤	٣١٧° ٦	١٤ +	٦ ز	ثانية مزيدة فيثاغورية، وسطى زلزل، بُعد الصوتين ناقص تتمة
٣ وز	١١١,١١	٨	٢٧/٢٢	٣٥٥°	١٥,٧	٧ ح	ثالثة زلزل المتوسطة، وسطى زلزل، (من سلسلة تساوي الأجزاء، وسطى الفرس، صوتين...)
٣ ك ث	١٢٥,٩٢	٩	٨١/٦٤	٤٠٧° ٨	١٨	٨ ط	ثالثة كبيرة فيثاغورية، بُعد الصوتين الفيثاغوري، رابعة ناقص باقية، (بنصر)
٤ ث	١٥٠	١٠	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	١٠ ك	رابعة تامة، خنصر، ربع الوتر، ديوان ناقص خامسة

للبحث الموسيقي العلمي. ويستبعد الفارابي الاختراع والتزمّت العلمي، ويبتكر طريقة في المقاربة الموسوعية، يطرح فيها كل النظريات التي تطرق إليها، وكل العادات الموسيقية التي صادفها في العزف على هذه الآلة. فنجد في الدراسة لبُعد الرابعة على هذه الآلة هذه الأبعاد:

الجدول رقم (١٧ ـ ٩)

الفارابي، نوطة، أبعاد على العود، مجرى بعد الرابعة والأصابع ـ الدرجات التي تتخللها:

أرباع الصوت

ـ ربع الصوت، الربع الخطي للطنين: ١٦,٦٦ ملم، ٣٦/٣٥، °٤٩، ٢,١٧ هـ.

مُجنب السبابة، أنصاف الصوت

١ ـ باقية فيثاغورية، رابعة ناقصة صوتين: ٣٠,٤٧ ملم، ٢٥٦/٢٤٣، °٩٠، ٤ هـ.

٢ ـ نصف صوت، نصف المسافة من المفاتيح إلى دستان الطنين: ٣٣,٣٣ ملم، ١٨/١٧، °٩٨، ٤,٣٣ هـ.

ـ مُتمم فيثاغوري، طنين ناقص باقية: ٣٨,١٣ ملم، ٢١٨٧/٢٠٤٨، ٧ °١١٣، ٥ هـ.

مجنب السبابة، أبعاد الثانية المتوسطة

٣ ـ ثانية الفرس المتوسطة، نصف المسافة من المفاتيح إلى وسطى الفرس: ٤٨,١٥ ملم، ١٦٢/١٤٩، °١٤٥، ٦,٤١ هـ.

ـ ثلاثة أرباع الصوت، مرادف وسطى زلزل: ٥٠ ملم، °١٥١، ٦,٦٨ هـ.

٤ ـ ثانية زلزل المتوسطة، نصف المسافة من المفاتيح إلى وسطى زلزل: ٥٥,٥٥ ملم، ٥٤/٤٩، °١٦٨، ٧,٤٣ هـ.

السبابة، بعد الثانية الكبيرة أي الطنين

٥ ـ ثانية كبيرة فيثاغورية، خامسة ناقص رابعة: ٦٦,٦٦ ملم، ٩/٨، ٩ °٢٠٣، ٩ هـ.

وسطى، أبعاد الثالثة الصغيرة، الثانية المزيدة، الثالثة المتوسطة

٦ ـ ثالثة صغيرة فيثاغورية، مجنب الوسطى، رابعة ناقص طنين: ٩٣,٧٥ ملم، ٣٢/٢٧، ١ °٢٩٤، ١٣ هـ.

٧ ـ ثالثة الفُرس الصغيرة، وسطى الفُرس لزلزل: ٩٦,٢٩ ملم، ٨١/٦٨، °٣٠٣، ١٣,٤ هـ.

يتبع

تابع

- ثانية مزيدة فيثاغورية، وسطى زلزل العريضة، صوتين ناقص باقية: ١٠٠,٥٦ ملم، $\frac{١٩٦٨٣}{١٦٣٨٤}$، ٦ °٣١٧، ١٤ هـ.

٨ ـ ثالثة زلزل المتوسطة، وسطى زلزل، نصف المسافة بين وسطى الفُرس والصوتين: ١١١,١١ ملم، $\frac{٢٧}{٢٢}$، °٣٥٥، ١٥,٧ هـ.

البنصر، بعد الثالثة الكبيرة أي بُعد الصوتين

٩ ـ ثالثة كبيرة فيثاغورية أو بُعد الصوتين، رابعة ناقص باقية: ١٢٥,٩٢ ملم، ٦٤/ ٨١، ٨ °٤٠٧، ١٨ هـ.

الخنصر، بعد الرابعة

١٠ ـ رابعة تامة فيثاغورية، ربع الوتر، الديوان ناقص الخامسة: ١٥٠ ملم، ٣/ ٤، °٤٩٨، ٢٢ هـ.

كما ذكرنا آنفاً، فإن تفسير الفارابي للسلم الموسيقي للعود يظهر لنا مقدرة هذا المفكر العلمية وطريقته الموسوعية (Encyclopédique)، فهو يذكر مواضع كل الأصابع ـ الدرجات الواردة في السلم النظري الموسيقي، وهي: الربع الصوت، النصف الصوت بأنواعه الثلاثة، الثانيات المتوسطة بأنواعها الثلاثة، الطنين، الوسطى بأنواعها الأربعة (ثالثات صغيرة، ثانيات مزيدة، ثالثات متوسطة)، ثالثة كبيرة، ورابعة تامة. ما يعطي أربعة عشر أصبعاً ـ درجة للرابعة، أي عدة أنظمة صوتية[٢٠].

ويحدد الفارابي، ومنذ ذلك الزمن عدد الأصابع ـ درجات، إلى عشرة في بُعد الرابعة: «إذا عددنا النغمات التي تعطيها الدساتين المذكورة، وجمعناها مع النغمات التي تعطيها الأوتار في كل طولها، نجد أن كل وتر يعطي عشر مع النغمات (درجات، نوطات)[٢١].

ونستطيع أن نتصور أن قسمة بُعد الرابعة إلى عشرة أصوات هي من عمل الفارابي.

وبما أن أي مقام لا يستخدم إلا أربع درجات في بُعد الرابعة وسبع درجات للديوان (بُعد الثامنة)، فلا يدخله إلا نموذج واحد من كل بُعد: نموذج واحد لبُعد الثانية، الثالثة، الرابعة، . . . كما يتم اختيار واحد للدرجات ولا يتغير إلا بحسب التعديلات أو التحويرات.

إن الفارابي واضح جداً في تحديد الفرق الموجود بين درجات السلم النظرية، والدرجات (أو الأصابع ـ درجات) التي يتم اختيارها بالنسبة للعزف: «إن الدساتين التي

(٢٠) المصدر نفسه، «عود،» الرسالة الأولى، ص ١٦٣ وما بعدها.
(٢١) المصدر نفسه، ص ١٧١.

أعددناها هي كل ما يُستعمل عادةً على العود. لكننا لا نصادفها كلها على نفس الآلة. منها لا يستغنى عنه في العزف على العود ويستخدمه معظم الموسيقيين. وهي الدساتين الآتية، السبابة، البنصر، الخنصر، وهنالك موضع (دستان) ما بين السبابة والبنصر والكل يسميه «وسطى»، ولدى بعضهم (الموسيقيين) يكون اسم هذا الموضع أو الدستان، وسطى زُلزُل؛ ولبعضهم الآخر، وسطى الفُرس؛ ولغيرهم ما نسميه نحن مجنب الوسطى.

أما بالنسبة للدساتين (أو المواضع) المسماة «مجنب السبابة»، فبعض العازفين ينكرونها كلها؛ وغيرهم يستخدم دستان الوسطى ودستان مجنب الوسطى سوياً ويعتبرونها مجنب للسبابة، ولا يستخدمون أي دستان من نوع مجنب السبابة الفعلي؛ وآخرون منهم يستخدمون أحد المواضع للوسطى ومجنب الوسطى وأحد مواضع مجنب السبابة خاصة الموضع الذي يفرق عن موضع السبابة ببُعد الباقية»[٢٢].

يتبين لنا تأثير الإغريق في الفارابي في ما يلي من نصه حيث يذكر أن عزف «الجمع الكامل» (المجموعة الكاملة) أي الديوانين يتطلب وتراً خامساً للآلة، أو استخدام طريقة نقل اليد على الزند[٢٣].

وفي الرسالة الثانية من الكتاب الثاني من **كتاب الموسيقى الكبير** يعود الفارابي ويصف آلاتٍ أخرى ومنها:

الطنبور البغدادي: ولقد ذكرنا آنفاً نظام تقسيم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً، ما يقسم تلقائياً بُعد الرابعة إلى عشرة أجزاء موسيقية غير متساوية (العشرة أجزاء هي أول عشرة أجزاء متساوية خطياً على الوتر)[٢٤].

الطنبور الخُرساني: يفضل الفارابي ـ لهذه الآلة ـ نظاماً مع النوع الفيثاغوري مستخدماً الفواصل، فيقسم الديوان إلى بُعد خامسة، بُعد رابعة، طنين، بُعد الباقيتين، باقية، فاصلة فيثاغورية. إن قسمة بُعد الصوت أي الطنين إلى باقيتين وفاصلة هي قسمة فيثاغورية بحتة، كما أنها السباقة لنظام صفي الدين في القرن الثالث عشر والتي يستخدمها في رسالته عن العود. سندرس هذا النظام في ما بعد مع صفي الدين[٢٥].

النايات: يدرس الفارابي علاقة مواضع الأصابع على القصبات مع الأصوات الناتجة،

---

(٢٢) المصدر نفسه، ص ١٧٩.

(٢٣) المصدر نفسه، ص ٢٠٤ . إن الإصبع ـ الموضع الأخير الموصوف، بُعد الباقية ما قبل السبابة، وهو بُعد «المتمم» الفيثاغوري ٢١٨٧/٢٠٤٨. نرى بذلك أن عادة أو طريقة «نقل اليد على الزند»، المذكورة من قبل عند إسحاق الموصلي، هي من أقدم الأساليب التقنية في الموسيقى العربية. بهذا لا يستطيع العازفون العرب المتمسكون بالتقاليد أن يرفضوا طريقة نقل اليد على الزند التي يستخدمها عازفو مدرسة بغداد الحالية.

(٢٤) انظر: المصدر نفسه، الكتاب الثاني، الرسالة الثانية، ص ٢١٨ وما يليها.

(٢٥) المصدر نفسه، ص ٢٤٢ وما يليها.

وطريقة وضع الأصابع مع السلالم الصوتية على النايات (القصبات)[٢٦].

الربابة: هنا أيضاً ينصح الفارابي، وعلى نحو مفاجىء، باعتماد نظام مرادف للنظام الطبيعي الهارموني بأبعاده الآتية: الخامسة التامة ٢/٣، التريتون لـ «زارلينو» ٣٢/ ٤٥[٢٧]، الرابعة التامة ٣/ ٤، الثالثة الكبيرة الفيثاغورية ٦٤/ ٨١، الثالثة الكبيرة الهارمونية الطبيعية ٤/ ٥، الثالثة الصغيرة الهارمونية الطبيعية ٥/ ٦، الطنين الفيثاغوري ٨/ ٩، بعد الصوت الصغير الهارموني الطبيعي ٩/ ١٠، شبه المتمم ١٥/ ١٦، شبه الباقية ١٢٨/ ١٣٥، الباقية الفيثاغورية ٢٤٣/ ٢٥٦، وسندرس هذا النظام المميز في ما بعد[٢٨].

الجنك (Harp): يصف الفارابي الأبعاد الصوتية المختلفة على هذه الآلة. من هذه الأبعاد، الرابعة المزيدة أو التريتون الفيثاغوري ١٧٨,٦ ملم، ٥١٢/ ٧٢٩، ٧ °٦١١ سنتاً، ٢٧ هولدراً. فيقسم بعد الرابعة إلى جزأين مفترضين متآلفين، بنسبتين من نوع الكل والجزء وهما ٧/ ٨ و٦/ ٧. لقد رأينا سابقاً أن بُعد ٧/ ٨ يساوي ٣٥/ ٤٠ وهو بعد الصوت الأكبر أو الطنين الأكبر الموجود في تسلسل الأصوات الناتج من تقسيم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً[٢٩].

ويتهي كتاب **الموسيقى الكبير** للفارابي بالكتاب الثالث المخصص «للتأليف الموسيقي» كما يطبق على الآلات، وينفذ بواسطة صوت المطرب أو المغني، وعلى المادة التي يغنيها هذا المغني شعرية كانت أم نثرية، بطريقة تؤدي إلى إثارة الحواس، وإلى تنبيه الروح بشكل خاص، وهذا ـ عنده ـ هو غاية ما تطمح إليه الموسيقى. ونلاحظ أن الفارابي يعود إلى تأكيد ما كان قد ذكره في مقدمته من أن الغناء (موسيقى الصوت البشري)، هو أرقى عنده من الموسيقى الصادرة من الآلة، وأكثر منها سمواً.

إن مُؤلف الفارابي هو مؤلف أساسي في تاريخ الموسيقى العربية، لا لأنه قام بابتكار نظام صوتي جديد، وإنما لأنه قدم وصفاً موسوعياً لكل ما كان يتعلق بالموسيقى آنذاك في محيطه وعصره، وما قدمه الإغريق والساميون قبل الإسلام. وسنركز مرة أخرى على كتاباته عند دراسة موضوع مراحل تطور الموسيقى العربية وما استوعبته من أنماط موسيقية أخرى.

---

(٢٦) المصدر نفسه، ص ٢٦٢ وما يليها.
(٢٧) لا يجوز تسمية هذا البعد بـ «تريتون زارلينو» بالنسبة إلى الأبعاد المستخدمة في القرن العاشر، حتى لو كان ذلك يسهل التفسير.
(٢٨) المصدر نفسه، ص ٢٧٧ وما يليها.
(٢٩) المصدر نفسه، ص ٢٨٦ وما يليها.

الصورة رقم (١٧ ـ ١)
كشف الغموم والكرب في شرح آلات الطرب
(اسطنبول، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٦٥).
نرى في هذه الصورة قانون (جنك).

٤ ـ النظام الصوتي المستوحى من النظام الفيثاغوري لابن سينا (٣٧٠ ـ ٤٢٨/ ٩٨٠ ـ ١٠٣٧)(٣٠)

الجدول رقم (١٧ ـ ١٠)

ابن سينا (القرن الحادي عشر)، نوطات العود في مجرى بعد الرابعة، الأصابع ـ درجات النظرية

اختصار ج. ك. ش.	ملم من ٦٠٠ ملم	النسبة	سنت ١٢٠٠ للديوان	هولدر ٥٣ للديوان	لائحة ج. ك. ش.	اسم البُعد وحسابه على المونوكورد
ـ	صفر	ـ	صفر	صفر	صفر أ	الوتر المطلق (من المفاتيح إلى مكان ربط الأوتار)
٢ ص	٣٧,٣٦	٢٧٣/٢٥٦	١١٢°	٥	٢ ج	شبه نصف صوت كبير، شبه متمم ث، رأس، الطنين الأكبر ٨/٧، تحت الثالثة المتوسطة ٣٩/٣٢
٢ و	٤٦,١٥	١٣/١٢	١٣٩°	٦,١٥	٣ د	ثانية متوسطة سُفلى، مرادفة للوسطى، طنين ٩/٨ تحت الثالثة المتوسطة، ٣٩/٣٢
٢ ك ث	٦٦,٦٦	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	٤ هـ	ثانية كبيرة ث، طنين ث، سبابة، تسع الوتر، خامسة ناقص رابعة
٣ ص ث	٩٣,٧٥	٣٢/٢٧	٢٩٤° ١	١٣	٥ و	ثالثة صغيرة ث، وسطى قديمة طنين تحت الرابعة
٣ و ز	١٠٧,٦٩	٣٩/٣٢	٣٤٣°	١٥,١٧	٧ ح	ثالثة متوسطة زلزل (سفلى)، وسطى زلزل متساوي المسافة بين السبابة والبنصر
٣ ك ث	١٢٥,٩٢	٨١/٦٤	٤٠٧° ٨	١٨	٨ ط	ثالثة كبيرة ث، بُعد الصوتين الفيثاغوري رابعة ناقص باقية، بنصر
٣ ث	١٥٠	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	١٠ ك	رابعة تامة، ربع الوتر، خنصر ديوان ناقص خامسة

(٣٠) عن نظريات وطرق حسابات ابن سينا، انظر: المصدر نفسه، مج٢، ص ٢٣٤ ـ ٢٣٧، والشكل ص ٢٣٦؛ Farmer: «Mūsīkī,» pp. 801-807, and «The Lute scale of Avicenna,» and Chabrier, «Un mouvement de réhabilitation de la musique arabe et du luth oriental: L'Ecole de Bagdad de Cherif Muhieddin à Munīr Bachīr,» livre 2, pp. 382-383.

ويأتي ابن سينا - في القرن الحادي عشر - بمساهمة أساسية في علم الموسيقى، في الفصل الثاني عشر من عمله الأساسي كتاب **الشفاء**، وترجم هذا العمل أيضاً رودولف ديرلانجيه في كتابه **الموسيقى العربية** الجزء الثاني. التأويل على شكل جدول لطريقته المطبقة على العود:

الجدول رقم (١٧ - ١١)
ابن سينا (القرن الحادي عشر).
النظام الصوتي لابن سينا على آلة العود المقابل للنظام الفيثاغوري

أ - لتشكيل جنس دياتوني:

أ - ١ - في ربع الوتر، البنصر يحدد الرابعة: ١٥٠ ملم، ٣/٤ الاهتزازات، °٤٩٨ سنت، ٢٢ هولدر، ١٠ ك من لائحة ج.ك.ش.

أ - ٢ - على تسع الوتر، السبابة تحدد الطنين: ٦٦,٦٦ ملم، ٨/٩، °٢٠٣، ٩ هولدر، ٤ هـ.

أ - ٣ - على تسع ما تبقى من الوتر أي تسع المسافة بين السبابة وموضع ربط الأوتار على بطن الآلة، البنصر يحدد بُعد الصوتين: ثالثة كبيرة فيثاغورية ١٢٥,٩٢ ملم، ٦٤/٨١، °٤٠٧، ٨، ١٨ هـ، ٨ ط.

أ - ٤ - ما يتبقى بين دستانين البنصر والخنصر هو بُعد الباقية: ١٥٠ ملم - ١٢٥,٩٢ ملم = ٢٤,٠٨ ملم، ٢٤٣/٢٥٦، °٩٠، ٢، ٤ هـ.

ب - لتحديد الأصابع - درجات للأبعاد «المتوسطة» (السفلى حسب الفارابي)

ب - ٥ - ثمن مسافة البنصر ومكان ربط الأوتار على بطن الآلة ($\frac{٤٥٠}{٨}$ = ٥٦,٢٥ ملم) وهو مسجل تحت الخنصر (رابعة ناقص طنين) بالنسبة لدستان الوسطى القديمة أو وسطى الفُرس (ثالثة صغيرة فيثاغورية).

ب - ٦ - نصف المسافة ما بين السبابة والخنصر، بعض المحدثين يحددون فيه دستان للوسطى، (ثالثة وسطى لزلزل سُفلى) ١٠٧,٦٩ ملم، ٣٢/٣٩، °٣٤٣، ١٥,١٧ هـ، ٧ ح.

إن المسافة لدستان الوسطى الحديث والخنصر هي ١١٧/١٢٨، أي ٤٢,٣٠ ملم. هذه الوسطى رخيمة جداً ما يقارب ٣٣/٤٠ من الوتر.

ب - ٧ - على بُعد طنين أرخم من هذه الوسطى نحدد «مُجنب» هذا الدستان (الثانية الوسطى السفلى) ٤٦,١٥ ملم، ١٢/١٣، °١٣٩، ٦,١٥ هـ، ٣ د.

يتبع

تابع

ب ـ ٨ ـ هنالك «مجنب» آخر أرخم من المجنب السابق، وهو أرخم بطنين أكبر (٧/٨) من الوسطى الحديثة (٣٢/ ٣٩)، (ثانية كبيرة عالية) ٣٧,٣٦ ملم، ٢٥٦/ ٢٧٣، ٥ °١١١، ٥ هـ، ٢ ج. يسمى «دستان الرأس». هو شبه نصف صوت كبير (هارموني طبيعي (٣٧,٥ ملم، ١٥/ ١٦، ٧ °١١١، ٥ + هـ، ٢ ج)؛ كما أنه شبه متمم فيثاغوري (٣٨,١٣ ملم، ٢٠٤٨/ ٢١٨٧، ٧ °١١٣، ٢ ج). هذه الثانية المتوسطة هي في الواقع ثانية صغيرة عالية، على نفس موضع الإصبع ـ درجة ٣٧/ ٤٠ من النظام الصوتي الجاهلي الذي يقسم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً. إن الأصابع المتوسطة لابن سينا هي تقريباً بنفس رخامة مرادفاتها في النظام الجاهلي.

٥ ـ النظام الهارموني الطبيعي لآلة الربابة للفارابي (القرن العاشر)

(انظر تحت العمود الخامس من جدول مقارنة أجزاء الوتر في تقسيم بعد الخامسة حسب النظام الصوتي الأوروبي والنظام الصوتي للثقافة العربية الإسلامية). (المقاييس الوترية من وتر طوله ٦٠٠ ملم).

لقد رأينا نظرية الفارابي المطبقة على العود، لكنه يصف على آلة الربابة نظاماً صوتياً هارمونياً طبيعياً معقداً ذا أصابع ـ درجات وأبعاد صوتية تلي في هذا الجدول[٣١].

الجدول رقم (١٧ ـ ١٢)
النظام الهارموني الطبيعي لآلة الربابة للفارابي

المرجع صفر: من المفاتيح (أي ٦٠٠ ملم)، الوتر المطلق.

المرجع الأول: انطلاقاً من المفاتيح، ثانية كبيرة، طنين: ٦٦,٦٦ ملم، ٨/٩، ٩ °٢٠٣ سنت ٩ هولدر.

المرجع الثاني: انطلاقاً من المفاتيح، ثالثة صغيرة هارمونية طبيعية: ١٠٠ ملم، ٥/٦، ٦ °٣١٥، ١٤هـ.

ـ انطلاقاً من المرجع الأول، نصف صوت كبير هارموني طبيعي: ٤٥/٤٨ = ١٥/١٦، ٧ °١١١، ٤,٩٤ هـ.

يتبع

(٣١) إن المرجعَين (الموضعين للأصابع ـ درجات) الرابع والسادس (البُعْدَيْ الرابعة التامة والخامسة التامة) يحسبهما الفارابي اختياريين. لربما نتيجة استخدامه المنطق الملازم لِنظام تقسيم الوتر إلى أربعين جزءاً. لكن تعقيد مثل هذا النظام يدفعنا إلى التساؤل عن قدرة عازف الربابة في القرن العاشر على استيعاب مثل هذا النظام الصوتي. لربما هذا النظام الصوتي ليس إلا وليد المخيلة.

تابع

المرجع الثالث: انطلاقاً من المفاتيح، ثالثة كبيرة فيثاغورية بُعد الصوتين: ١٢٥,٩٢ ملم، ٨١/٦٤، ٨ °٤٠٧، ٨,١٨ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الأول، ثانية كبيرة، طنين: ٨/٩، ٩ °٢٠٣، ٩ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثاني، نصف صوت هارموني طبيعي صغير، شبه باقية: ١٢٨/١٣٥، ٢ °٩٢، ٤+ هـ.

المرجع الرابع: انطلاقاً من المفاتيح، رابعة تامة: ١٥٠ ملم، ٣/٤، °٤٩٨، ٢٢ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الأول، ثالثة صغيرة فيثاغورية: ٢٧/٣٢، ١ °٢٩٤، ١٣ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثاني، طنين صغير (هارموني طبيعي): ٩/١٠، ٤ °١٨٢، ٨+هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثالث، باقية فيثاغورية: ٢٤٣/٢٥٦، ٢ °٩٠، ٤ ـ هـ.

المرجع الخامس: انطلاقاً من المفاتيح، رابعة مزيدة، تريتون زارلينو: ١٧٣,٣٣ ملم، ٣٢/٤٥، ٢ °٥٩٠، ٢٦,١١ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الأول، ثالثة كبيرة طبيعية هارمونية: ٤/٥ = ٦٤/٨٠، ٣ °٣٨٦، ١٧ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثاني، ثانية مزيدة طبيعية هارمونية: ١١٥٢/١٣٥٠ = ٧٤/٧٥، ٦ °٢٧٤، ١٢,١٥هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثالث، طنين صغير (هارموني طبيعي): ٩/١٠، ٤ °١٨٢، ٨+ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الرابع، نصف صوت هارموني طبيعي صغير، شبه باقية: ١٢٨/١٣٥، ٢ °٩٢، ٤+ هـ.

المرجع السادس: انطلاقاً من المفاتيح، خامسة تامة فيثاغورية: ٢٠٠ ملم، ٢/٣، °٧٠٢، ٣١ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الأول، رابعة تامة فيثاغورية: ٣/٤، °٤٩٨، ٢٢ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثاني، ثالثة كبيرة هارمونية طبيعية: ٤/٥ = ٦٤/٨٠، ٣ °٣٨٦، ١٧ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الثالث، ثالثة صغيرة فيثاغورية: ٢٧/٣٢، ١ °٢٩٤، ١٣ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الرابع، ثانية كبيرة، طنين: ٨/٩، ٩ °٢٠٣، ٩ هـ.

- انطلاقاً من المرجع الخامس، نصف صوت كبير هارموني طبيعي، شبه متمم: ١٥/١٦، ٧ °١١١، ٤,٩٤ هـ.

٦ ـ النظـام الصوتي للفارابـي مستخدماً الفواصـل المقابـل للنظام الفيثاغوري، على الطنبور الخراساني (القرن العاشر)

(انظر تحت العمود السادس من جدول تقسيم الخامسة على وتر ما حسب الأنظمة الصوتية لأوروبا والثقافة العربية الإسلامية) (لتسهيل المقاربة بالمقارنة، يفترض طول أوتار الطنبور، وهو عود ذو زند طويل، ٦٠٠ ملم).

الجدول رقم (١٧ ـ ١٣)

الفارابي (القرن العاشر) النظام الصوتي الفيثاغوري الفاصلي للفارابي على الطنبور الخراساني

اختصارات ١٧ في الديوان	من وتر طوله ٦٠٠ ملم	النسبة	سنت ١٢٠٠ للديوان	هولدر ٥٣ للديوان	لاكحة ج. ك. ش.	اسم البُعد الفيثاغوري، النوطات من سُلم مفترض سلم الدو ماجور
صفر	صفر	ـ	صفر	صفر	صفر أ	من المفاتيح، الوتر المطلق، (دو)
١ ـ ٢ ص	٣٠,٤٧	٢٥٦/٢٤٣	٩٠° ٢	٤	١ ب	بالية. ثانية صغيرة
٢ ـ ٢ و	٥٩,٣٩	٦٥٥٣٦/٥٩٠٤٩	١٨٠° ٥	٨	٣ د	باقيتين. ثالثة منقوصة، ثانية متوسطة
٣ ـ ٢ ك	٦٦,٦٦	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	٤ هـ	ثانية كبيرة. طنين، (ره)
٤ ـ ٣ ص	٩٣,٧٥	٣٢/٢٧	٢٩٤° ١	١٣	٥ و	ثالثة صغيرة
٥ ـ ٣ و	١١٩,٥	٨١٩٢/٦٥٦١	٣٨٤° ٤	١٧	٧ ح	رابعة منقوصة، ثالثة متوسطة
٦ ـ ٣ ك	١٢٥,٩٢	٨١/٦٤	٤٠٧° ٨	١٨	٨ ط	ثالثة كبيرة، بعد الصوتين، (مي)
٧ ـ ٤	١٥٠	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	١٠ ك	رابعة تامة، (فا)
٨ ـ ٥ ص ص	١٧٢,٨٥	١٠٢٤/٧٢٩	٥٨٨° ٣	٢٦	١١ ل	خامسة منقوصة
٩ ـ ٤ م	١٧٨,٦	٧٢٩/٥١٢	٦١١° ٧	٢٧	١٢ م	رابعة مزيدة، تريتون
صفر ـ ٥	٢٠٠	٣/٢	٧٠٢°	٣١	١٤ س	خامسة تامة، (صول)
١ ـ ٦ ص	٢٢٠,٣	١٢٨/٨١	٧٩٢°	٣٥	١٥ ع	سادسة صغيرة
٢ ـ ٥ م	٢٢٥,٤	٦٥٦١/٤٠٩٦	٨١٦°	٣٦	١٦ ف	خامسة مزيدة
٣ ـ ٦ ك	٢٤٩,١	١٤٣٤٨٩٠٧/٨٣٨٨٦٠٨	٩٣٠°	٤٠	١٨ ق	سادسة كبيرة، (لا)
٤ ـ ٧ ص	٢٦٢,٥	١٦/٩	٩٩٦°	٤٤	١٩ ر	سابعة صغيرة
٥ ـ ٦ م	٢٦٧	٥٩٠٤٩/٣٢٧٦٨	١٠١٩° ٦	٤٥	٢٠ ش	سادسة مزيدة
٦ ـ ٧ ك	٢٨٤	٢٤٣/١٢٨	١١٠٩° ٨	٤٩	٢٢ خ	سابعة كبيرة، (سي)
٧ ـ ٨	٣٠٠	٢/١	١٢٠٠°	٥٣	٢٤ ض	ثامنة تامة، ديوان، (دو)
٨ ـ ٨+	٣٠٤	٥٢٤٢٨٨/٥٣١٤٤١	١٢٢٣° ٥	٥٤	١ ب	فاصلة فيثاغورية (+ ديوان)
٩ ـ ٨ م	٣١٩	٢١٨٧/٢٠٤٨	١٣١٣° ٧	٥٨	٢ ج	متمم فيثاغوري (+ ديوان)
صفر ٩ ك	٣٣٣,٣٣	٩/٨	١٤٠٣° ٩	٦٢	٤ هـ	ثانية كبيرة، طنين، (+ ديوان) (ره)

إن النظام الصوتي الذي درسه الفارابي على الطنبور الخراساني مشتق من الأنظمة الفيثاغورية البسيطة من عهود الإغريق القديمة ومن أول عصر الإسلام، وهو النظام السباق للنظام الفيثاغوري الفاصلي المحقق على العود لدى صفي الدين الأرموي في القرن الثالث عشر. لتسهيل المقارنات، سنفترض أن الأوتار طولها ٦٠٠ ملم.

ـ في النظام الصوتي الفيثاغوري الأبسط يكون الجزء الأصغر الفاصلة الفيثاغورية، وهي الباقي من طرح إثني عشر بعد خامسة من سبعة أبعاد ديوان، أي: ٨,٠٧ ملم،

٥٢٤٢٨٨/٥٣١٤٤١، ٢٣°٥ سنت، هولدر واحد + أكبر من هذا الجزء يأتي بُعد الباقية، وهو الباقي من طرح بُعد الصوتين من الرابعة أي: ٣٠,٤٧ ملم، ٢٥٦/٢٤٣، ٢°٩٠، ٤ ـ هـ. وأكبر منهما، بُعد المتمم، وهو متمم الباقية للحصول على الطنين أو بعد الصوت، ويساوي هذا البُعد باقية زائد فاصلة أي: ٣٨,١٣ ملم، ٢١٨٧/٢٠٤٨، ٧ °١١٣، ٥ هـ. الطنين إذاً يساوي باقية ومتمم، أي باقيتين وفاصلة، بهذا التسلسل باقية فاصلة باقية، أو باقية باقية فاصلة.

ـ في نظام سلم الصوت للطنبور الخراساني، الأبعاد (الصغيرة) ستتبع هذا التسلسل باقية باقية فاصلة (الكل يساوي الطنين)، وهذا من المفاتيح إلى بُعد التاسعة (أي ديوان زائد طنين). نجد في هذا التسلسل للأصوات خمسة دساتين «عادية» (أبعاد الثانية، الرابعة، الخامسة، الثامنة، التاسعة) وثلاثة عشر دستاناً «متحركاً». فيكون عندنا، مفترضين السلم الأساسي «دو»:

دو؛ باقية = ره ♭ ؛ باقية = ره ♭ ؛ فاصلة = ره؛ باقية = مي ♭ ؛ باقية = مي♭؛ فاصلة = مي؛ باقية = فا؛ باقية = صول ♭ ؛ فاصلة = فا ♯ ؛ باقية = صول؛ باقية = لا ♭ ؛ فاصلة = صول ♯ ؛ باقية = لا؛ باقية = سي ♭ ؛ فاصلة = لا ♯ ؛ باقية = سي؛ باقية = دو.

دو؛ فاصلة = دو+؛ باقية = دو ♯ ؛ باقية = ره.

لدينا إذاً سبعة عشر إصبعاً ـ درجة وسبعة عشر بُعداً للديوان، تكونهم فواصل وباقيات وأبعاد المتمم والتتمة والطنين... الخ. إن المجالات الصوتية لهذه الآلة هي من ضمن بُعد التاسعة للوتر الواحد. ويفضل الفارابي لبُعد «شد» الوترين لهذه الآلة (الدوزان)، الشد المتزاوج (أي وتران بنفس الصوت)، وبُعد الباقية بينهما، وبُعد الباقيتين، وباقيتي الجبليين، بُعد الصوت، الثالثة الصغيرة في مدينة بخارى، بُعد الرابعة مثل شد العود، وحتى الخامسة. إن الأبعاد المتوسطة تأتي عالية جداً (أو رفيعة جداً) في هذا النظام الصوتي، أعلى مما وصفها زلزل والفارابي وابن سينا في نظام الدساتين على آلة العود(٣٢).

٧ ـ النظام الصوتي الفيثاغوري الفاصلي لصفي الدين الأرموي محقق على آلة العود(٣٣) (القرن الثالث عشر)

(أنظر تحت العمود السابع من جدول المقارنات لتقسيم بُعد الخامسة على وتر ما،

---

(٣٢) حول طنبور خراسان، انظر: Erlanger, Ibid., vol. 1, pp. 242-262.
هذا النظام الصوتي بسبعة عشر مرجعاً لمواضع الأصابع مهد السبل لمواضع الدساتين على آلة الطنبور في القرن العشرين (وهي آلات من عائلة العود ذي الزند الطويل: الساز، الطار، السيه طار، البزق...).

(٣٣) عن النظريات وطريقة حسابات صفي الدين الأرموي على العود، انظر: Farmer, «Mūsīkī,» et =

بحسب الأنظمة الصوتية الأوروبية والثقافة العربية الإسلامية).

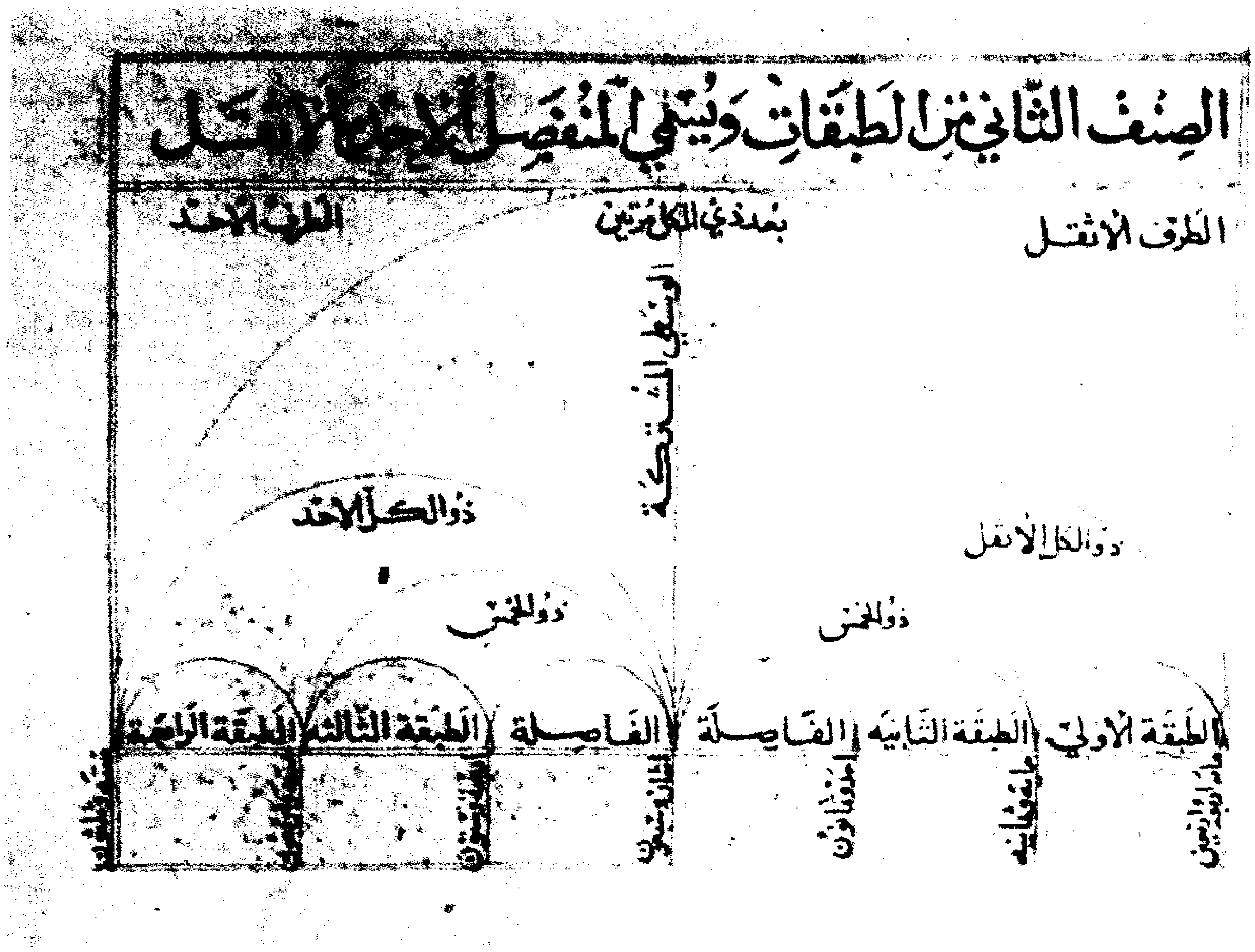
الجدول رقم (١٧ ـ ١٤)
النظام الصوتي المستخدم للفواصل المقابل للنظام الفيثاغوري في القرن الثالث عشر.
صفي الدين الأرموي

لائحة ج. ك. ش	النسبة	سنت من فارمر	فواصل هولدر	ملم من وتر ٦٠٠ ملم	إصبع ـ درجة على العود	تعليق، معادلة (أنظر جدول المقارنات، العمود السابع)
١ ب	٢٥٦/٢٤٣	٩٠° ٢	٤	٣٠,٤٧	زائدة (سبابة)	باقية (ما قبل الإسلام)
٣ د	٥٩٠٤٩/٦٥٥٣٦	١٨٠° ٥	٨	٥٩,٣٩	مجنب السبابة	طنين صغير فيثاغوري. باقيتين
٤ هـ	٩/٨	٢٠٣° ٩	٩	٦٦,٦٦	سبابة	طنين (فيثاغوري)
٥ و	٣٢/٢٧	٢٩٤° ١	١٣	٩٣,٧٥	وُسطى الفُرس	ثالثة صغيرة (فيثاغورية)
٧ ح	٨١٩٢/٦٥٦١	٣٨٤° ٤	١٧	١١٩,٤٦	وُسطى زلزل	رابعة منقوصة فيثاغورية، شبه ثالثة كبيرة هارمونية طبيعية
٨ ط	٨١/٦٤	٤٠٧° ٨	١٨	١٢٥,٩٢	بنصر	ثالثة كبيرة (فيثاغورية)
١٠ ك	٤/٣	٤٩٨°	٢٢	١٥٠	خنصر	رابعة تامة
١١ ل	١٠٢٤/٧٢٩	٥٨٨° ٣	٢٦	١٧٢,٨٥	ـ	خامسة منقوصة فيثاغورية
١٣ ن	٢٦٢١٤٤/١٧٧١٤٧	٦٧٨° ٥	٣٠	١٩٤,٥	ـ	خامسة ناقصة فاصلة (ما قبل الإسلام)
١٤ س	٢/٣	٧٠٢°	٣١	٢٠٠	ـ	خامسة تامة

مقارنة بالفواصل بين الأنظمة الصوتية لطنبور خراسان وعود القرن الثالث عشر

طنبور خراسان: ب ب ف (٢) ب ب ف (٣) ب (٤) ب ف ب (٥) ب + ف ب (٦) ب ف + ب (٧) ب

عود القرن ١٣: ب ب ف (٢) ب ب ف (٣) ب (٤) ب ب ف (٥) ب ب ف (٦) ب ب ف (٧) ب



الصورة رقم (١٧ ـ ٢)

الأرموي، الرسالة الشرفية

(اسطنبول، توبكابي سراي، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٦).

نرى في هذه الصورة صنف من السلالم الموسيقية محقق أبعادها على وتر ما.

= Erlanger, Ibid., vol. 3, préface, pp. v-vi et viii-ix.

انظر أيضاً: صفي الدين الأرموي، **الرسالة الشرفية**، في: Erlanger, Ibid., vol. 3, «ud,» pp. 111 et seq. (calcul essentiel).

انظر التعليق على: صفي الدين الأرموي، **كتاب الأدوار**، في: المصدر نفسه، مج ٣، ص ٤٨١ (دوزان accords)، ص ٣٠٨، ٥٨٠ و ٦٠٣ (تنقيل transpositions)، ص ٤١١ (خورس الأوتار choeurs de cordes)، ص ٥٥١ (طريقة استخدام الريشة technique du plectre)، وص ٥٩٥ (التلوين النغمي nuances).

صفي الدين الأرموي البغدادي (مولود بجوار بلدة أُرمية، تعلم في بغداد وتوفي سنة ١٢٨٤)، كان منقطعاً إلى آخر خليفة عباسي، وبعد سقوط بغداد سنة ١٢٥٨، عفا عنه المغول، فأصبح من علماء بلاطهم، وهو الذي أوصل النظام الصوتي الفيثاغوري - ذا البناء المكون من تسلسل أبعاد الخامسة - إلى ذروته.

يطرح صفي الدين في مؤلفيه، **كتاب الأدوار والرسالة الشرفية**، حلاً للأصابع - الدرجات المتوسطة، التراثية المحلية والتجريبية، باستخدام نظام الفواصل الموسيقية المقابل للنظام الفيثاغوري والمسمى بـ «المنهجي» لتحديد مواضع دساتين (الأصابع - درجات الأبعاد المتوسطة. وهو يؤكد أن قسمة بُعد الصوت على الطنبور الخراساني، هي باقيتان وفاصلة مثلما فعل الفارابي من قبله، كما يقسم بُعد الرابعة إلى صوتين (طنينين) وباقية، وقسمة الديوان إلى بُعدين بالرابعة وبُعد الصوت (طنين). بهذا يكون صفي الدين من الفيثاغوريين.

تفسير طريقة صفي الدين في مواضع الأصوات على العود

أ - تكوين الجنس الدياتوني من الأرخم إلى الأرفع

١ - نطرح تسع (١/٩) الوتر انطلاقاً من المفاتيح، فتحدد السبابة بُعد الطنين الكبير الأول: ٦٦,٦٦ ملم، ٨/٩، ٩ °٢٠٣ سنت، ٩ هولدر، ٤ هـ.

٢ - نطرح تسعاً مما تبقى من الوتر (سبابة إلى مكان ربط الأوتار)، فيُحدد البنصر وضع بُعد الصوتين أي الثالثة الكبيرة: ١٢٥,٩٢ ملم، ٦٤/ ٨١، ٨ °٤٠٧، ١٨ هولدر، ٨ ط.

٣ - المسافة بين موضع بُعد الصوتين وموضع الرابعة (١٥٠ ملم، ٣/ ٤، °٤٩٨، ٢٢ هولدر، ١٠ ك)، هي الباقية الموجودة على الموضع: ٢٤,٠٨ ملم، ٢٤٣/٢٥٦، ٢ °٩٠، ٤ هولدر.

ب - تكوين الجنس الدياتوني المقلوب أي من الأرفع إلى الأرخم

٤ - نحسب موضعاً جديداً على ما يتبقى من الوتر من موضع الرابعة - بنصر - ومكان ربط الأوتار، أي ٣/٤ الوتر أو ٤٥٠ ملم، وثمن (١/٨) هذا الباقي أي ٥٦,٢٥ ملم، ونحول هذه القيمة بقلبها من موضع الرابعة إلى جهة المفاتيح فنحصل بذلك على موضع «الوسطى القديمة» أي الثالثة الصغيرة: ٩٣,٧٥ ملم، ٢٧/ ٣٢، ١ °٢٩٤، ١٣ هولدر، ٥و. فلقد أخفضنا قيمة الرابعة بطنين.

٥ - نحسب موضعاً آخر على ما يتبقى من الوتر من موضع الثالثة الصغيرة ومكان ربط الأوتار أي ٥٠٦,٢٥ ملم،وثمن (١/٨) هذا الباقي أي ٦٣,٢٨ ملم، ونحول هذه القيمة بقلبها متجهين إلى المفاتيح؛ فنحصل بذلك موضع «الزائد» وهو مجنب للسبابة، ويحدد

الباقية أو بُعد الثانية الصغيرة: ٣٠,٤٧ ملم، ٢٥٦/٢٤٣، ٢ °٩٠، ٤ هولدر، ١ ب.

٦ - هذا الموضع هو بالفعل موضع أول باقية بما أننا طرحنا من بُعد الرابعة بُعد الصوتين. أي حسمنا طنينين.

ج - التحديد الفيثاغوري لمواضع الأصابع - الدرجات المتوسطة

٧ - نحسب موضعاً آخر على ما يتبقى من الوتر من موضع الباقية إلى مكان ربط الأوتار، أي ٥٦٩,٥٣ ملم، وربع (١/٤) الباقي أي رابعة تامة جديدة (١٤٢,٣٨ ملم) نزيده على موضع الباقية الأولى، فنحصل بذلك على بُعد يساوي رابعة زائد باقية أي خامسة منقوصة: ١٧٢,٨٥ ملم، ٧٢٩/١٠٢٤، ٣ °٥٨٨، ٢٦ هولدر، ١١ ل.

٨ - نحسب موضعاً آخر على ما يتبقى من الوتر من موضع الخامسة المنقوصة إلى مكان ربط الأوتار أي ٤٢٧,١٥ ملم، وثمن (١/٨) هذا الباقي أي ٥٣,٣٩ ملم، ونزيده على موضع دستان الخامسة المنقوصة. بهذا نكون قد خفضنا بعد الخامسة المنقوصة بطنين (٩/٨) ونحصل على هذا الموضع «وسطى زلزل» الذي يحدد الرابعة المنقوصة أو الثالثة المتوسطة: ١١٩,٤٥ ملم، ٦٥٦١/٨١٩٢، ٤ °٣٨٤، ١٧ هولدر، ٧ ح؛ أي ثالثة كبيرة ناقصة فاصلة.

٩ - نحسب موضعاً آخر على ما يتبقى من الوتر من موضع الرابعة المنقوصة إلى مكان ربط الأوتار، أي ٤٨٠,٥٥ ملم، وثمن (١/٨) هذا الباقي أي ٦٠,٠٦ ملم ونحول هذه القيمة بقلبها من موضع الرابعة المنقوصة إلى جهة المفاتيح، بهذا نكون قد خفضنا الرابعة المنقوصة بطنين (٩/٨)، ونحصل على هذا الموضع مجنب للسبابة بُعده الثالثة المنقوصة أي الثانية المتوسطة بُعد الباقيتين: ٥٩,٣٩ ملم، ٥٩٠٤٩/٦٥٥٣٦، ٥ °١٨٠، ٨ هولدر، ٣ د. أي ثانية ناقصة فاصلة.

١٠ - مجنب السبابة الاختباري وموضعه ما بين بُعد الباقية وبُعد الثانية الكبيرة (الطنين)، ٤٨,٥٦ ملم.

١١ - مجنب السبابة الاختباري وموضعه ما بين المفاتيح والثالثة الصغيرة: ٤٦,٨٧ ملم.

١٢ - مجنب السبابة الاختباري وموضعه ما بين المفاتيح والثالثة المتوسطة: ٥٩,٧٢ ملم.

الوسطى المتوسطة الاختبارية وموضعها ما بين الثانية الكبيرة (الطنين) والرابعة التامة: ١٠٧,٦٩ ملم، ٣٢/٣٩ .

علينا أن نلحظ أن إبداع صفي الدين لنظام صوتي يلتزم الحسابات الفيثاغورية المستخلصة من تسلسل الأبعاد الخامسة قد أوصله إلى رفع مستوى علمية أبعاد أساسها تجريبي، (فطري - اختباري).

وبهذا أصبح بعد الثانية المتوسطة، بُعد ثالثة منقوصة، أي باقيتان: ٥٩,٣٩ ملم، ٥٩٠٤٩/٦٥٥٣٦، ٥ °١٨٠، ٨ هولدر، ٣ د. وهذا النظام لا يسمح إذاً بالالتباس بين هذا البُعد وبُعد الصوت الصغير (الطنين الصغير) الهارموني الطبيعي: ٦٠ ملم، ٩/١٠، ٤ °١٨٢، ٨ هـ، ٣ د، أو الالتباس بالموضع ذي المرجع الآتي: ٦٠ ملم، ٣٦/٤٠، ٤ °١٨٢، ٨ هـ، ٣ د، المستخرج من قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً؛ ومع ذلك فإنه طالما يختلط هذان الموضعان في الأنظمة الصوتية الثلاثة، وهذا عند العديد من العازفين. وفي هذا النظام الصوتي الجديد تصبح الثالثة المتوسطة، رابعة منقوصة: ١١٩,٤٥ ملم، ٦٥٦١/٨١٩٢، ٤ °٣٩٨، ١٧ هـ، ٧ ح؛ ويجب عدم مزج هذا الدستان (الإصبع - درجة) مع البُعد القريب للثالثة الكبيرة الهارمونية الطبيعية: ١٢٠ ملم، ٤/٥، ٣ °٣٨٦، ١٧ هولدر، ٧ ح، ولا مع الدستان ذي المرجع الآتي: ١٢٠ ملم، ٣٢/٤٠، ٣ °٣٨٦، ١٧ هولدر، ٧ ح، المستخرج من قسمة الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً. كذلك الأمر فإن العديد من العازفين يخلطون ما بينهما.

وصف عالم موسيقي غربي كبير صفي الدين بأنه «زارلينو» الشرق[٣٤]، وهذه المقارنة، ولو كانت من باب المديح، فهي خاطئة. فإن صفي الدين هو الذي استخرج أحسن تطبيقات للنظام الصوتي الفيثاغوري باستخدامه طريقة قلب الأبعاد ومواضع الأصابع للأبعاد المتوسطة للجنس الدياتوني، منطلقاً من موضع الخامسة المنقوصة الفيثاغورية (١٧٢,٨٥ ملم، ٧٢٩/١٠٢٤، ٣ °٥٨٨، ٢٦ هولدر، ١١) ومتجهاً نحو المفاتيح (عكس المعتاد أي الاتجاه لمواضع الأصابع هو من المفاتيح إلى مكان ربط الأوتار على بطن الآلة). كما أنه نجح في مقارنة موضعين من المواضع المتوسطة مع موضعين من المراجع للنظام الصوتي القديم، والذي يقسم الوتر إلى أربعين جزءاً متساوياً، وربما ينحدر هذان الموضعان من هذا النظام الصوتي القديم.

إن هذا النظام الصوتي، المتميز جداً، قد تم تبنيه من قبل معاصري صفي الدين ومن جاء بعده مثل الشيرازي (القرن الثالث عشر)، والجرجاني، والعاملي (في القرن الرابع عشر)[٣٥]. ونسأل أنفسنا عند ذكر علماء الموسيقى ورسائلهم، ما هي العلاقة الفعلية بين موسيقيي العالم العربي - الإسلامي والرسائل الموسيقية العلمية، في العهود المختلفة؟ نتساءل أيضاً: ما هي طرق عزف الموسيقيين الشعبيين؟ هل كانوا يتفهمون النظام الصوتي الهارموني الطبيعي الذي استخدمه الفارابي على الربابة، والنظام الصوتي الفيثاغوري الفاصلي الذي استخدمه صفي الدين على آلة العود؟ أم أنهم توقفوا عند تقطيع الوتر (أي بالدساتين

---

(٣٤) انظر: Kiesewetter, in: Farmer, Ibid., p. 804.

(٣٥) انظر: الجرجاني، «تعليق على كتاب الأدوار،» في: Erlanger, Ibid., vol. 3, pp. 220 et seq.
انظر أيضاً: رسالة مجهولة المؤلف تقدمة إلى السلطان، مج ٤، ص ٢٧ وما يليها، واللاذقي، «الرسالة الفتحية،» مج ٤، ص ٢٩١ وما يليها، في: Erlanger, Ibid.

أو مواضع الأصابع) بالطرق التجريبية الاختبارية التي وصفها زلزل (في القرن الثامن)؟

خاتمة

إن كمالية النظام الصوتي المقابل للنظام الفيثاغوري، والذي يستخدم الفواصل، نظام تداركه الفارابي على الطنبور الخراساني في القرن العاشر، كما تداركه صفي الدين الأرموي على آلة العود في القرن الثالث عشر، والذي ثابر على استمراريته كل من الجرجاني (القرن الرابع عشر)، وابن غيبي مرقى وشُكرُ الله (القرن الخامس عشر)، واللاذقي (القرن السادس عشر)، ومن المؤسف أن هذا النظام قد بدأ يتراجع شيئاً فشيئاً في القرن الخامس عشر حتى أنه تلاشى من العالم العربي والفارسي ولم يعد متداولاً إلا في تركيا.

ومنذ القرن الثامن عشر، واجه العالم العربي - الفارسي عالماً جديداً أكثر منه قوة وهو العالم الغربي، وقد نتج من ذلك على الصعيد الموسيقي اقتباس الكتابة الموسيقية الغربية بمدرجها ونوطاتها، واستخدام علامات أو إشارات التعديل الإضافية للربع الصوت. لكن الأمل ما زال موجوداً فقد شهد القرن العشرون أول اجتماع لمجمع موسيقي عربي في القاهرة سنة ١٩٣٢، وإذا كنا قد فقدنا المصطلحات الموسيقية للعزف على آلة العود، فإننا في هذا المجمع قد دونا معظم المقامات والإيقاعات. إن فن الموسيقى وعلمها ما زالا يدرّسان، وهذا هو الأساس.

ـ ١٨ ـ

علم السكون (الستاتيكا)

ماري م. روزنسكايا(*)

تشكّل علم السكون، أو علم الوزنة، كمادة علمية مستقلة خلال العصور القديمة.

كان هدفه الرئيس، في البدء، حساب نمو القوة المبذولة بواسطة أجهزة ميكانيكية مختصة. فالكلمة اليونانية «méchané» كانت تعني في الأصل آلة أو مجموعة من الأجهزة البارعة. ونتيجة لذلك كان المصطلح «ميكانيك» يرتبط بعلم «الآلات البسيطة» التي تسمح بتحريك أحمال ثقيلة بواسطة قوة ضعيفة.

كان اليونانيون يضعون علم السكون على قدم المساواة مع علم الأعداد أو «علم الحساب»، وكانوا يميزون في كل منهما قسماً نظرياً وقسماً تطبيقياً. وقد ظهر في العصور القديمة اتجاهان في علم السكون: الأول مرتكز على الهندسة وهو ذو طبيعة نظرية، والثاني مرتكز على علم الحركة (كينماتيكا، Cinématique) وهو ذو طبيعة تطبيقية[١]. وفي الحالة الأولى كانت تُدرس قوانين التوازن على مثال رافعة في حالة توازن ثابت. كما تم إدخال مفهوم مركز الثقل في علم السكون في إطار قسمه الهندسي الذي يتميز بمستوى عالٍ من استخدام الرياضيات في نظريته.

أما فيما يتعلق بالمنحى الحركي (الكينماتي، Cinématique) لعلم السكون فإن قاعدته تقوم على التطبيق العملي لـ «الآلات البسيطة» المخصصة لرفع ونقل الأحمال الثقيلة. وفي

(*) أكاديمية العلوم الروسية ـ موسكو.

قام بترجمة هذا الفصل شكر الله الشالوحي.

(١) انظر: Pierre Maurice Marie Duhem, *Les Origines de la statique*, 2 vols. (Paris: Hermann, 1905-1906), vol. 1, p. 16.

هذه الحالة، كانت قوانين توازن الأجسام تُدرس على مثال رافعة عند اختلال توازنها. كما كانت الاستنتاجات، المستوحاة من المبرهنات الرئيسة لعلم السكون، ترتكز على فرضيات علم الديناميكا، وقد اعتمد بعض هذه الفرضيات بشكل صريح، في حين أهمل بعضها الآخر. إن هذا القسم من علم السكون يرجع إلى «مسائل الميكانيك» المنسوبة زعماً لأرسطوطاليس(٢).

لقد صنف اليونانيون جميع الحركات الميكانيكية إلى فئتين:

١ ـ الحركات «الطبيعية» التي تحصل من تلقاء نفسها من دون تدخل خارجي (كسقوط جسم ثقيل).

٢ ـ الحركات «القسرية» أو العنيفة التي تحدث بتأثير خارجي.

وكان اندفاع «الحركة الطبيعية» يعتبر بمثابة «مَيل» أو منحى ملازم للجسم. وقد كانت المسائل الأولية لعلم السكون اليوناني تتمثل أولاً في الوصول إلى تحديد هذا «الميل»، ومن ثم في إيجاد مركز الثقل للجسم موضوع الدراسة. فقد طرح أرخميدس هاتين المسألتين وحلّهما، كما أعطى صياغة رياضية دقيقة لمبدأ الرافعة وحدد مركز الثقل كنقطة من الجسم، بحيث إن هذا الجسم يبقى في حالة توازن عندما يتم وضعه في هذه النقطة. ولهذا السبب بالذات، يجب اعتبار أرخميدس كمؤسس حقيقي لعلم السكون كمادة نظرية.

ولم يحدد أرخميدس مركز الثقل لجسم واحد فحسب، بل حدده أيضاً لمجموعة من جسمين أو من ثلاثة أجسام. وبرهن بعد ذلك المبدأ العام للرافعة، الذي صاغه على الشكل التالي: «إن كميات متشاركة (commensurables) فيما بينها أو غير متشاركة تكون في حالة توازن على مسافات متناسبة عكسياً مع أوزانها» (يقال عن كميتين أنهما متشاركتان إذا كانت نسبة الواحدة إلى الأخرى منطّقة (المترجم)).

كما يرجع أصل الهيدروستاتيكا (علم توازن السوائل) إلى العصر القديم أيضاً. فقد كان أرخميدس، مرة أخرى، أول من اقترح نظرية توازن الأجسام المغطسة في السوائل، وأول من درس ثبات هذا التوازن.

أما فيما يتعلق بتشكل المنحى الحركي، فإنه يرجع إلى العصر الهلينستي المتأخر، حيث كانت الرافعة تُدرس آنذاك في لحظة اختلال توازنها.

وهكذا، فإن جوهر هذين المنحيين، اللذين ارتسما في علم السكون القديم، يمكن تلخيصه على الشكل التالي: في الحالة الأولى، كانت طرق الهندسة اليونانية تطبق على مسائل الرافعة في حالة التوازن الثابت؛ أما في الحالة الثانية، فكانت حركة طرفي رافعة في حالة التوازن المتقلقل تُرَدُّ، عند دراستها، إلى حركة نقطة على دائرة.

---

(٢) انـظـر: Ernest Addison Moody and Marshall Clagett, *The Medieval Science of Weights,* latin version and english translation (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1952).

أولاً: ما قبل تاريخ علم السكون العربي

إذا استعرضنا تاريخ علم الميكانيك في القرون الوسطى يظهر لنا أن علم السكون كان، على الأرجح، المادة الأكثر تأثراً بالتقليد القديم. حتى إنه باستطاعتنا أن نعرض بتسلسل تاريخي عملية الاستيعاب التي حصلت في علم السكون للإرث العلمي العائد للعصور القديمة. إن الخطوات الأولى لعلم السكون في القرون الوسطى، أكانت هندسية أم حركية (كينماتية)، ترجع إلى الشروحات والتطويرات المنجزة انطلاقاً من أعمال أرخميدس وأرسطوطاليس وهيرون الإسكندري وبابوس الإسكندري وفيتروف (Vitruve). وقد كانت لترجمات وشروحات أعمال أرسطو أهمية بالغة في هذا المجال.

إننا لا نعلم حتى الآن ما إذا كانت أعمال أرخميدس في علم الميكانيك ومؤلّف **مسائل الميكانيكا** لأرسطوطاليس المزعومة قد ترجمت إلى العربية. على أي حال، تبقى مثل هذه الترجمات مجهولة حتى الآن. وبالمقابل، فقد وصل إلينا عدد من المؤلفات المغفلة من العصر الإسكندري المتأخر، والمترجمة إما إلى العربية أو من العربية إلى اللاتينية (وبعضها منسوب إلى إقليدس وأرخميدس). ونتبين أن هذه المؤلفات قد ترجمت أولاً في أوروبا في القرون الوسطى، عندما ابتدأت هناك مرحلة استيعاب الإرث العلمي القديم والشرقي. وكما هو الأمر فيما يتعلق بالترجمات إلى السريانية وبالترجمات الأكثر قدماً إلى العربية لأعمال المؤلفين الكلاسيكيين، فقد أضحت هذه المؤلفات موضع اهتمام كبير وتم درسها في الشرق في القرون الوسطى وفي أوروبا الغربية لاحقاً. وهي تشكل، من ناحية التسلسل الزمني، بشكل أساسي، حلقة وسيطة بين ميكانيكا العصور القديمة وميكانيكا الشرق في القرون الوسطى. ومن بين هذه المؤلفات ثلاثة مغفلة من أصل يوناني وصلت إلينا في ترجمتها العربية، وهي تستحق اهتماماً خاصاً:

١ ـ المؤلف المنسوب لإقليدس وعنوانه **مقالة لإقليدس في الأثقال**(٣).

٢ ـ المؤلف **كتاب الميزان** *(Liber de canonio)*، المترجم إلى اللاتينية مباشرة عن اليونانية والمخصص لدراسة الميزان ذي الذراعين المختلفين (القبان)(٤).

(٣) Franz Woepcke, «Notice sur les traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide,» *Journal asiatique*, 4ème série, tome 18 (septembre-octobre 1851), pp. 217-232; traduction anglaise dans: Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 4 (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959), pp. 24-30.

(٤) انظر: Moody and Clagett, Ibid., pp. 55-76.

٣ ـ المؤلف المغفل *(Liber Euclidis de ponderoso et levi et comparatione corporum ad invicem)* الذي وصل إلينا في ترجمتين عربية ولاتينية[٥].

كما توجد، بالإضافة إلى ذلك، ترجمة عربية بعنوان **مقالة لأرخميدس في الثقل والخفة**[٦] تقدم عرضاً موجزاً للقسم الأول وللافتراض الأول من القسم الثاني لمؤلف أرخميدس (فيما يخص الأجسام العائمة). وهي لا تتضمن سوى صياغات لافتراضات أرخميدس (من دون براهين).

في **مسائل الميكانيكا** وفي مؤلفات هيرون وغيرها من أعمال المرحلة الإسكندرية، كان المبدأ العام للرافعة مثبتاً، سواء أكان ذلك بوضوح أم لا، بواسطة علم الحركة. في حين أن **مقالة إقليدس في الأثقال** قد كتبت، بخلاف هذه المؤلفات، وفق تقاليد علم السكون الهندسي الأرخميدسي.

إن الصيغ والبراهين المستخدمة في المقالة هي أحياناً قريبة جداً من الطرق المستعملة في كتاب **الأصول** لإقليدس. إلا أن المقالة المذكورة هي، من دون أدنى شك، أكثر التصاقاً بطرق وأسلوب أرخميدس، وبشكل خاص بمؤلفه **توازن المستويات** *(Equilibre des plans)*. إلا أن المؤلف المجهول، بخلاف أرخميدس، ينتقل من المنظور المستوي إلى منظور ثلاثي الأبعاد، فهو يعتبر الرافعة كذراع متجانس واقعي أكثر مما هي خط هندسي. غير أن المبدأ العام للرافعة لم يبرهَن في هذه المقالة إلا للأثقال المتشاركة في القياس فيما بينها.

أما المؤلف الثاني **كتاب الميزان** الذي وُضع بعد مقالة إقليدس المزعومة بوقت قصير، فإنه يقترب بشكل وثيق من هذه المقالة. وهو يمثل خطوة جديدة في تاريخ علم السكون الهندسي. فانطلاقاً من مبدأ الرافعة المطبق على قضيب لا وزن له ومزود بأحمال قابلة للقياس، يباشر المؤلف لاحقاً بتحليل شروط التوازن لقضيب قابل للوزن متجانس، يحمل طرفه الأقصر حملاً معلقاً. وهكذا، فإن الأساسي في هذا الكتاب يكمن في تطوير الفكرة الرئيسة العائدة المنسوبة زعماً لإقليدس والمتعلقة بوزن القضيب. إن البرهان الذي يستخدمه مؤلف **كتاب الميزان** يرتكز على الفرضية التي تعتبر أن وزن جزء من قضيب ـ رافعة، ذي سماكة ثابتة ومصنوع من مادة متجانسة، هو مساوٍ لوزن حمل معلق في وسطه. وهذا البرهان، في الواقع، هو نتيجة لتطبيق نظرية أرخميدس المتعلقة بمركز الثقل على رافعة حقيقية، أي ذات وزن.

نتيجة لذلك، يقترب **كتاب الميزان** من مقالة إقليدس المزعومة، وفي الوقت نفسه

---

(٥) المصدر نفسه، ص ٢٣ ـ ٣١.

(٦) H. Zotenberg, «Traduction arabe du *Traité des corps flottants* d'Archimède,» *Journal asiatique*, 7ème série, tome 13 (mai-juin 1879), pp. 509-515;

الترجمة الإنكليزية في: المصدر نفسه، ص ٥٢ ـ ٥٥.

يكملها من حيث المحتوى. كما أنه قريب أيضاً من أحد المؤلفات العربية الكلاسيكية كتاب **في قَرَسطون** لثابت بن قرة[٧]، وهو سابق له تاريخياً. وهذا ما يسمح لنا بربطه بالمرحلة الأولى من تطور علم السكون في الشرق في القرون الوسطى.

إلا أن كتّاب هذه المؤلفات، وبخلاف أرخميدس الذي اختزل الأجسام الحقيقية إلى تجريدات هندسية (خطوط مستقيمة ومستويات)، قد انكبّوا على تطبيق نظرية أرخميدس الكلاسيكية في الرافعة التي لا وزن لها على مسائل واقعية في التوازن والوزنة، على الرغم من أن طرقهم في عرضهم لها ومبادئ براهينهم بقيت أرخميدسية في مضمونها وشكلها.

أما المؤلف المغفل الثالث *Liber Euclidis de ponderoso* فيناقش بعض أعمال أرسطو، حيث نجد فيه تفسيراً للمفاهيم الأرسطية في المكان والكمية والجنس والقوة.

وفي الواقع، فقد تم استخدام هذا المؤلف أكثر من الأعمال الأصلية لأرسطو، لا سيما كقاعدة لتفسير مفاهيم القوة والوزن، وكذلك بصفته أيضاً قاعدة لنظرية الحركة في وسط غير الهواء (ممتلئ)، والتي توسعت لاحقاً في الشرق في القرون الوسطى.

إن هذا المؤلف *Liber Euclidis de ponderoso*، وكذلك مقدمة مؤلف منلاوس حول وسائل تحديد تركيب السبائك بواسطة استخدام ميزان هيدروستاتي[٨]، قد وضعا أسس العلم الهيدروستاتي لذلك العصر.

وهناك تيار آخر ثبت ركائزه أيضاً في علم السكون الإسكندري المتأخر، وذلك من خلال تقليد في الموجزات التطبيقية التي تقدم تعليمات من أجل صنع أجهزة ميكانيكية. وقد نشأ هذا التيار عن **المسائل الميكانيكية** وأعمال فيلون وهيرون الإسكندري وڤيتروف وغيرهم، والتحق بعلم السكون التطبيقي. وقد اشتملت هذه الأعمال على ترجمات لمؤلفات كتّاب من العصور القديمة، وعلى شروحات أكثر قدماً لهذه المؤلفات (نذكر على سبيل المثال

---

(٧) انظر: Thābit Ibn Qurra, *Kitāb al-qarasṭūn*, arabic text and french translation by Kh. Jaouiche; a critical analysis of this incorrect edition is given in: Wilbur R. Knorr, ***Ancient Sources of the Medieval Tradition of Mechanics: Greek, Arabic and Latin Studies of the Balance***, Istituto e Museo di Storia della scienza; Monografia no. 6 (Firenze: [n. pb.], 1982); german translation, in: «Die Schrift über den Qarasṭūn,» *Bibliotheca mathematica*, vol. 3, no. 12 (1912), pp. 21-39; english translation by: Moody and Clagett, Ibid., pp. 69-78.

(٨) Thābit Ibn Qurra, *Maqāla fī misāḥāt al-mujassamāt al-mukāfiya (Livre sur la mesure des paraboloïdes)*; traduction russe par Boris A. Rozenfeld, dans: *Nauchnoye nasledstvo* (Moskva: Nauka, 1984), vol. 8: *Matematicheskiye traktati*, pp. 157-196.

من أجل ترجمة جزئية بالألمانية لهذا الموضوع، انظر: Heinrich Suter, «Die Abhandlungen Thābit ben Qurras und Abū Sahl al-Kūhī über die Ausmessung der Paraboloïde,» *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät Erlangen*, Bd. 48-49, pp. 186-227.

مؤلّف هيرون الميكانيك الذي ترجمه إلى العربية قسطا بن لوقا البعلبكي في القرن التاسع الميلادي).

ثانياً: التيارات الرئيسة لعلم السكون العربي ـ المصادر

بإمكاننا أن نميز ثلاثة تيارات رئيسة في علم السكون العربي.

١ ـ علم السكون النظري الذي يمثل تقليد أرخميدس والمسائل الميكانيكية، ويضاف إليه المبدأ الدينامي لأرسطو وعلم الوزنة المقرون به؛

٢ ـ الهيدروستاتيكا وعلم الأوزان النوعية؛

٣ ـ علم الآليات البارعة (أي علم الحيل وهي الترجمة الحرفية لكلمة «méchané» اليونانية)، الذي يتضمن أيضاً «علم رفع الماء»، بالإضافة إلى علم صناعة «الآلات البسيطة» وتركيباتها المتنوعة. ونذكر في هذا المجال أن أغلبية الموسوعات الشرقية في القرون الوسطى كانت تعطي بالضبط هذا التعريف الحصري لعلم الميكانيك.

نملك في الوقت الحاضر أكثر من ستين مؤلفاً في علم السكون من الشرق في القرون الوسطى. وهذه المؤلفات مكتوبة بالعربية أو بالفارسية، ومن بينها توجد أعمال لا يرقى الشك إلى كتّابها، كما توجد أخرى مغفلة، في حين أن بعض الأعمال لم يصل إلينا إلا ضمن مؤلفات كتّاب آخرين.

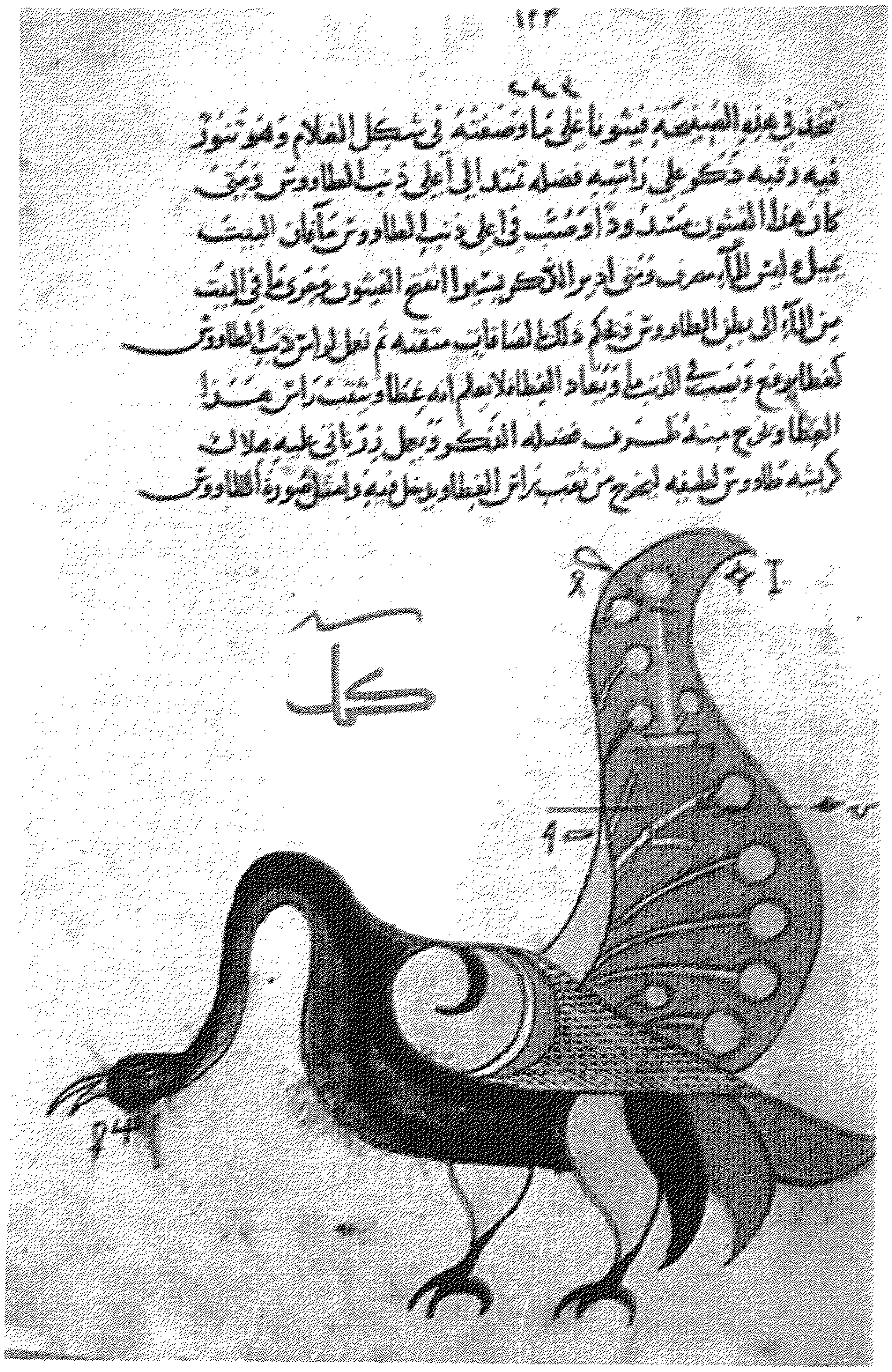
إن أغلبية هذه الأعمال تدور حول «علم السكون التطبيقي» (علم الحيل). فنجد من ضمنها **كتاب الحيل** لبني موسى(٩) (القرن التاسع الميلادي) والذي كتبت عنه شروحات ومؤلفات كثيرة، كما نجد **كتاب في معرفة الحيل الهندسية** للجزري(١٠) (القرن الثاني عشر

---

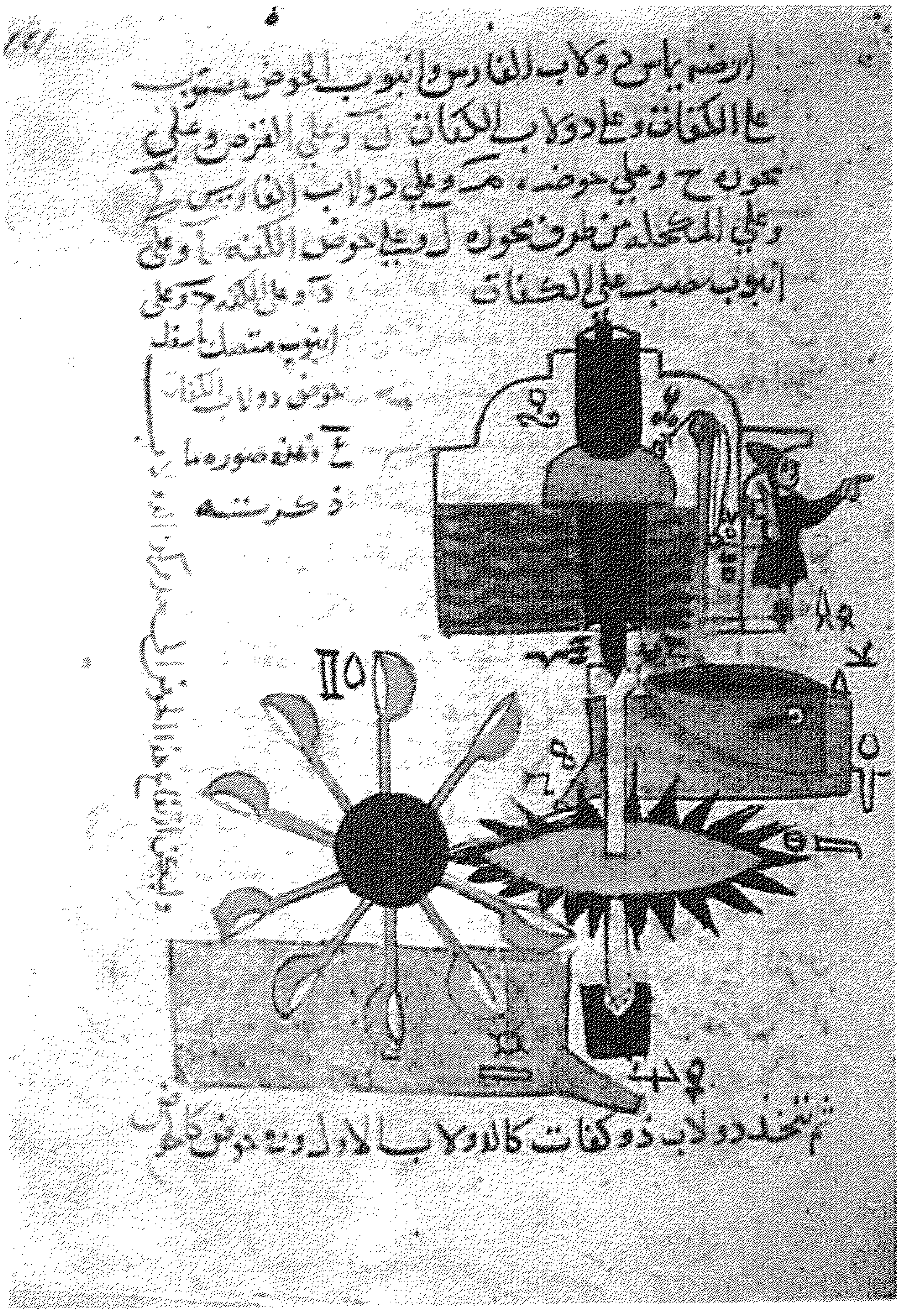
(٩) انظر: محمد بن موسى بن شاكر، كتاب الحيل، نشرة نقدية للنص العربي من قبل أحمد يوسف الحسن بالتعاون مع محمد علي خيّاطة ومصطفى تعمري، مصادر ودراسات في تاريخ العلوم العربية الإسلامية، سلسلة تاريخ التكنولوجية؛ ٣ (حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)؛ الترجمة الإنكليزية: Mohammed Ibn Musa Ibn Shākir, *Banū (Sons of) Mūsā Ibn Shākir: The Book of Ingenious Devices (Kitāb al-ḥiyal)*, translated by Donald Routledge Hill (Dordrecht; Boston; London: Reidel Publishing Company, 1979), reprinted (Islamabad: [n. pb.], 1989).

انظر أيضاً: F. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa* (London: [n. pb.], 1831).

(١٠) انظر: Abu al-Izz Ismail Ibn al-Razzaz al-Jazarī, *A Compendium on the Theory and Practice of the Mechanical Arts*, critical edition by Ahmad Y. al- Hasan (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1979); english translation: *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices*, translated with notes by Donald Routledge Hill (Dordrecht; Boston: Reidel Publishing Company, 1974).



الصورة رقم (١٨ ـ ١)
الجزري، **كتاب في معرفة الحيل الهندسية**
(اسطنبول، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٦١).
يصب هذا الطاووس الماء للوضوء.



الصورة رقم (١٨ ـ ٢)

الجزري، **كتاب في معرفة الحيل الهندسية**

(اسطنبول، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٦١).

يملأ الخزان الأعلى بشراب وعندما يصب الشراب بمقدار معين،

يتحرك الجهاز المائي ويخرج من الباب شخص صغير.

الميلادي) ومعيار العقل لابن سينا(١١) (القرن الحادي عشر الميلادي)، ولا نعدد في هذا الإطار الفصول التي كتبها هذا الأخير حول الميكانيك في أعماله الموسوعية، وهي فصول ارتكزت على كتاب المسائل الميكانيكية وعلى ميكانيك هيرون. وقد كانت الموسوعات العلمية في القرون الوسطى تحتوي، وفق العرف، على قسم مخصص للميكانيك. وأكثرها كمالاً كانت موسوعة أبي عبد الله الخوارزمي(١٢) مفاتيح العلوم، التي تضمنت فصلاً كاملاً مكرساً للميكانيك. وفي بعض الموسوعات كان «علم رفع الماء» يدرج تحت عنوان مختلف، فقد اعتبر آنذاك كقسم من الهندسة.

أما الأعمال ذات الطبيعة النظرية، فهي أقل عدداً. وبإمكاننا أن نشير أولاً إلى سلسلة من المؤلفات في «القَرَسطون» (ميزان بذراعين مختلفي الطول) منها كتاب في قرسطون لثابت بن قرة (القرن التاسع الميلادي). وهذا الكتاب هو الأكثر أهمية ودلالة ضمن هذه السلسلة من الناحيتين التاريخية والعلمية. ثم يأتي ثانياً كتاب ميزان الحكمة للخازني(١٣) (القرن الثاني

(١١) انظر: Avicenna, *Liber de anima seu sextus de naturalibus, I, II, III,* edited by S. Van Riet (Louvain: E. Peeters; Leiden: E. J. Brill, 1972); Abū'Ali Husain Ibn 'Abd Allah Ibn Sinā: *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology),* translated by F. Rahman (Oxford: [n. pb.], 1952); *Le Livre de science,* traduit par Mohammad Achena et Henri Massé (Paris: Société d'édition «Les Belles lettres», 1955-1958); *A Compendium on the Soul,* translated by Edward Abbott Van Dyck (Verona: Stamperia di N. Paderno, 1906);

انظر أيضاً: أبو علي الحسين بن عبد الله بن سينا: **معيار العقول** (النص الفارسي)، تصحيح جلال الدين همائي، سلسلة انتشارات أنجمن آثارملي؛ ٢٤ (طهران: [د. ن.]، ١٣٣١هـ/ ١٩٥٢م)؛ **كتاب الشفاء**، نشر ف. رحمن (لندن: مطبوعات جامعة أوكسفورد، ١٩٧٠)؛ **كتاب الشفاء ـ الطبيعيات**، نشر ج. قنواتي وس. زايد (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٧٠)، الفصل ٦: «كتاب النفس»، وجوامع علم الموسيقى، نشر زكريا يوسف (القاهرة: دار الكتب، ١٩٥٦)، «الشفاء، الرياضيات، ٣».

(١٢) انظر: Abū 'Abd Allāh Muhammad Ibn Ahmad al-Kuwārizmi, *Liber mafātih al-olūm, explicans vocabula technica scientiarum tam arabum quam peregrinorum, auctore Abū Abdallah Mohammed Ibn Ahmed Ibn Jusof al-Kātib al-Khowarezmi,* edidit et indices adjecit G. Van Vloten (Lugduni-Batavorum: E. J. Brill, 1895), réimprimé (Leiden: E. J. Brill, 1968).

(١٣) أبو منصور عبد الرحمن الخازني، **كتاب ميزان الحكمة** (حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف العثمانية، ١٩٤١)؛ انظر أيضاً الترجمة الإنكليزية، في: N. Khanikoff, «Analysis and Extracts of *Kitāb mizān al-hikma (Book on the Balance of Wisdom):* An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century,» *Journal of the American Oriental Society,* vol. 6 (1859), pp. 1-128; russian translation by: M. M. Rozhanskaya and I. S. Levinova, «Al-Khāzinī Kniga vesov mudrosti,» in: *Nauchnoye nasledstvo* (Moskva: Nauka, 1983), vol. 6, pp. 15-140.

انظر أيضاً: «Al-Khāzinī,» in: *Dictionary of Scientific Biography,* 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 7, pp. 335-351.

عشر الميلادي) والذي يمكن اعتباره بحق موسوعة لعلم السكون في الشرق في القرون الوسطى. فقد أدرج المؤلف في كتابه موجزات عديدة لأعمال أسلافه، ومن بينهم القوهي (القرن العاشر للميلاد) وابن الهيثم (القرنان العاشر والحادي عشر للميلاد) والرازي (القرن الحادي عشر للميلاد) وعمر الخيام (القرنان الحادي عشر والثاني عشر للميلاد) وغيرهم، ونذكر أن أعمال هؤلاء المؤلفين قد ضاعت.

وهناك سلسلة ثالثة من المؤلفات، على جانب من الأهمية من ناحية الكمية، وقد خصصت لمسألة تحديد الوزن النوعي للمعادن والمواد المعدنية، وكما احتوت على حلول نظرية لهذه المسائل فقد تضمنت أيضاً حلولاً تطبيقية. وقد كانت هذه المواضيع مركزية في مؤلف الخازني، كما أن البيروني خصص لها بعضاً من أعماله[١٤]، وكذلك النيريزي[١٥] وعمر الخيام، هذا من دون أن نحصي أعمال أسلافهم وتلاميذهم في هذا المجال.

ثالثاً: علم السكون النظري

إن مسائل علم السكون الرئيسة التي عولجت في الشرق في القرون الوسطى تتعلق، كما رأينا سابقاً، بنظام البديهيات، وكذلك بمفاهيم القوة، والوزن والثقل[١٦]، ونظريات الرافعة ومركز الثقل، والتوازن وثباته، وأخيراً بالهيدروستاتيكا.

غير أننا نشير إلى أن مسائل علم السكون النظري لا يمكن فصلها عن مسائل ديناميكا ذلك العصر إلا بشيء من الصعوبة. وهذا عائد ليس فقط لأن علم السكون كان يرتكز على تأليف التقاليد الهندسية والدينامية لعلم الميكانيك القديم، بل أيضاً لسبب بسيط هو أن رجال العلم، في الشرق في القرون الوسطى، قد عمموا بعض مبادئ علم السكون وطبقوها على أجسام في حالة الحركة. فتعليم العصور القديمة حول مسائل الحركة، والذي يرجع كلياً إلى التقليد الفلسفي، قد أعطي آنذاك منحى رياضياً وأعد ليوافق مضمون علم

---

(١٤) Abu al-Rayhan Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī, «Maqāla fī al-nisab allatī bayna al-filizzāt wa al-jawāhir fī al-ḥajm (Le Livre sur la relation existant entre les volumes des métaux et ceux des pierres précieuses),» traduction russe par M. M. Rozhanskaya et B. A. Rozenfeld, dans: *Nauchnoye nasledstvo,* vol. 6, pp. 141-160.

إنه لفرح وواجب علي أن أنوّه بأن البروفسور إدوارد س. كينيدي (E. S. Kennedy) قد أرسل، من بيروت، نسخة عن النسخة الوحيدة لهذه المخطوطة وذلك لترجمتها إلى الروسية.

(١٥) انظر: Eilhard E. Wiedemann, «Über Bestimmung der Spezifischen Gewichte: Traktat von Abū Manṣūr al-Nayrīzī über die Bestimmung der Zusammensetzung Gemischter Kōrper,» in: Eilhard E. Wiedemann, *Aufsätze zur Arabischen Wissenschaftsgeschichte,* Collectanea; VI, 2 vols. (Hildesheim; New York: G. Ilms, 1970), vol. 1, pp. 243-246.

(١٦) هذا التعبير الذي استخدمه العرب وهو مرادف لمصطلح «الجاذبية». (المترجم).

السكون الهندسي العائد لأرخميدس. ونتيجة لذلك يجب درس بعض مفاهيم الميكانيك، كالقوة والوزن ومركز الثقل ومركز الكون... الخ، من جانبين مختلفين، أحدهما سكوني (استاتي) والآخر دينامي.

١ ـ الوزن، الثقل، القوة

إن مفهومي القوة والوزن قد عولجا في علم الميكانيك في الشرق في القرون الوسطى من ثلاث زوايا مختلفة:

أ ـ بالجمع بين مفهومي «الموضع الطبيعي» و«مركز الكون» بالمعنى الأرسطي لهذين المصطلحين؛

ب ـ بواسطة المفاهيم الرئيسة لعلم السكون الهندسي بالمعنى الأرخميدسي؛

ج ـ بتطبيق النظرية الأرسطية لحركة الأجسام في وسط غير الهواء (ممتلئ).

إننا لن نتطرق هنا إلى الجانب الثالث، لأنه يرتبط بحركة الأجسام أكثر من ارتباطه بتوازنها. لذلك سنبحث في جانبين مختلفين لمفهومي القوة والثقل. ونستطيع أن نقوّم إنجازات تم تحقيقها في علم الميكانيك العربي، فيما يتعلق بهذين المفهومين، استناداً إلى مصدرين رئيسين هما **كتاب في قرسطون** لثابت بن قرة وكتاب **ميزان الحكمة** للخازني. وقد تضمن الكتاب الأخير موجزات لأعمال مؤلفين قدامى، وكذلك لبعض أعمال القوهي (القرن العاشر للميلاد) وابن الهيثم (القرنان العاشر والحادي عشر للميلاد) والإسفزاري (القرن الحادي عشر للميلاد) في علم السكون النظري، كما تضمن نتائج المؤلف الخاصة.

لقد كان هؤلاء المؤلفون يميزون بين وزن الجسم وثقله، فبالنسبة إليهم، كان وزن الجسم ثابتاً ويمكن قياسه بواسطة الوزنة. ووفقاً للتقليد القديم، كانوا يقرنون وزن الجسم بالضغط الذي يحدثه حِمل على الميزان خلال الوزنة. أما الثقل، فكانوا يعتبرونه كمية متغيرة تبعاً لموقع الجسم بالنسبة إلى نقطة خاصة يمكن أن تكون إما «مركز الكون» ـ فحسب رأي الأقدمين، يتطابق مركز الأرض مع «مركز الكون» ـ وإما محور دوران رافعة.

إذا كان الاعتبار أن ثقل الجسم يتعلق بموقعه بالنسبة إلى «مركز الكون»، فإن هذه الفكرة تكون قد أخذت من المفاهيم الأرسطية عن «الحركة الطبيعية» و«الموضع الطبيعي».

لكن إذا كان مفهوم الثقل مرتبطاً بموضع الحمل على ذراع الرافعة، فإنه في هذه الحال يكون قد انبثق من الرأي الذي عبر عنه مؤلف **المسائل الميكانيكية**، والذي يقول إن الوزن نفسه يضغط نحو الأسفل بشكل مختلف تبعاً لموضعه على ذراع الرافعة.

فيما بعد، قرن رجال العلم العرب مفهوم «الثقل» مع مفهوم «القوة». وقد حددوا

هذا الارتباط حسب ما عبر عنه الخازني (على خطى القوهي وابن الهيثم) بما معناه[17]: «إن جسماً ذا وزن هو جسم يتحرك باتجاه مركز الكون تحت تأثير القوة الموجودة في هذا الجسم، وهذه القوة تحرك الجسم فقط نحو مركز الكون وليس في أي وجهة أخرى وهي من الخواص الداخلية لهذا الجسم لا تتركه ما لم تبلغ مركز الكون هذا»[18].

إن هذا التحديد هو أرسطي صرف. والنقطة المهمة هي أن «الجسم» ينجز حركة «طبيعية» نحو «مكانه الطبيعي» الذي هو «مركز الكون». وقد اعتُمد مفهوم القوة كـ «مَيل» أي كنوع من القدرة للجسم على إنجاز عمل ما؛ والمصطلح، بهذا المعنى، مشابه للتعبير اليوناني «ropê». بعد ذلك، صاغ الخازني العلاقة بين هذه «القوة» والخصائص الفيزيائية للجسم الثقيل كالثقل النوعي (الكثافة) والحجم والشكل[19]:

١ ـ بإمكان الأجسام الثقيلة أن يكون لها قوى مختلفة. وذات الكثافة الأعظم يكون لها القوة الأعظم.

٢ ـ الأجسام التي لها قوة أدنى لها كثافة أدنى.

٣ ـ إذا كانت الكثافة أعظم تكون القوة أعظم.

٤ ـ الأجسام التي لها نفس القوة لها نفس الكثافة.

٥ ـ الأجسام ذات الأحجام عينها والوزن عينه والمتطابقة شكلاً لها نفس القوة[20].

هذه الافتراضات الخمسة التي أوردها الخازني في مؤلفه هي مطابقة للبديهيتين السابعة والتاسعة الواردتين في كتاب إقليدس المزعوم *Liber Euclidis de ponderoso* الذي تحدثنا عنه سابقاً. وقد أدرج بأكمله في **كتاب ميزان الحكمة**. ونستطيع التأكيد أن كتاب إقليدس هذا، بالإضافة إلى **طبيعيات** أرسطو، قد كان من دون شك من بين الأعمال الرئيسة التي ارتكز عليها القوهي وابن الهيثم.

وبما أن ثقل الجسم مقترن بقوته، وأن هذه الأخيرة تترك الجسم عندما يدرك «مركز الكون»، لذلك فإن «الثقل» يجب أن يكون معدوماً في هذا المركز. وانطلاقاً من هذا الواقع، كان الاعتقاد أن «الثقل» هو قيمة متغيرة. أما فيما يتعلق بالمسافة بين الجسم و«مركز الكون» فقد حددت كمقطع من خط مستقيم يصل مركز ثقل الجسم مع «مركز الكون».

وقد أظهر القوهي وابن الهيثم أن ثقل الجسم يتعلق من دون أدنى شك بهذه المسافة.

---

(١٧) بتصرف. (المترجم).

(١٨) انظر: Khanikoff, «Analysis and Extracts of *Kitāb mīzān al-hikma (Book on the Balance of Wisdom)*: An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century,» p. 16.

(١٩) بتصرف. (المترجم).

(٢٠) المصدر نفسه، ص ١٦.

فالأجسام التي تملك الثقل نفسه كانت محددة بأنها متساوية في القوة والحجم والشكل، وأخيراً موجودة على مسافة واحدة من «مركز الكون». وبالمقابل، إذا كانت أجسام تملك نفس القوة والحجم والشكل، ولكنها تقع على مسافات مختلفة من «مركز الكون»، فإنها تملك آنذاك «أثقالاً» مختلفة[٢١].

ويمكننا أن نلاحظ أن القوهي وابن الهيثم يستوحيان، في هذا المجال، كتاب إقليدس *Liber Euclidis de ponderoso* (في الثقيل والخفيف). ثم يطور الخازني هذا الافتراض أكثر فأكثر فيذكر ما معناه[٢٢]: «ان ثقل الجسم الوازن ذي الوزن المعلوم والموجود على مسافة ما من مركز الكون، متعلق ببعد هذا الجسم عن مركز الكون. وكلما زاد ابتعاد الجسم عن مركز الكون، ازداد ثقله؛ وكلما زاد اقترابه من المركز زادت خفته. ولهذا فإن أثقال الأجسام تتناسب مع مسافاتها عن مركز الكون»[٢٣].

ووفقاً للخازني، فإن واقع أن ثقل الجسم يتغير تبعاً لبعده عن مركز الكون، مرتبط بتغيرات كثافة «الفضاء»، أي الوسط المحيط بالأرض. فهذه الكثافة تكون قصوى على سطح الأرض وتصبح معدومة على محيط الفضاء. إن ثقل الجسم هنا يتخذ مفهوماً مشابهاً للمفهوم الحديث عن الطاقة الكامنة[٢٤].

وهكذا، كان مؤلِّف كتاب **ميزان الحكمة** أول من وضع، في تاريخ علم الميكانيك، الفرضية التي تقول إن أثقال الأجسام تتغير تبعاً لبعدها عن مركز الأرض. ولم يأخذ أي مؤلَّف من المؤلفات في القرون الوسطى التي نعرفها هذه المسألة بعين الاعتبار.

وهناك جانب آخر لمفهوم الثقل اقترن باستخدام آخر، وهو يشير هذه المرة إلى حمل معلق في طرف رافعة. وهنا أيضاً ينبغي أن نعود قبل كل شيء إلى **كتاب في قرسطون** لثابت بن قرة، حيث يقترح صياغتين مختلفتين لمبدأ الرافعة. ترجع الصياغة الأولى إلى مسلَّمة عبر عنها مؤلِّف **المسائل الميكانيكية**، وهي تقول إن حملاً واحداً يملك ثقلاً مختلفاً تبعاً لتغير موقعه على ذراع الرافعة. أما بالنسبة إلى الصياغة الثانية، فإن ثابت بن قرة يستخدم الطرق الدقيقة للرياضيات القديمة لكي يدرس تباعاً توازن حملين على رافعة لا وزن لها، وتوازن عدد معين من الأحمال، وأخيراً توازن حمل دائم. ويتوصل في النهاية إلى تحديد مركز الثقل لمجموعة وازنة. وفي الحالتين، يكون ثقل الجسم مرتبطاً بموضعه على الرافعة. ووفقاً لثابت ابن قرة، يمكن للثقل أن يتغير تبعاً لهذا الموضع. فعلى سبيل المثال، إن جسماً موضوعاً

---

(٢١) المصدر نفسه، ص ٢٠.

(٢٢) بتصرف. (المترجم).

(٢٣) المصدر نفسه، ص ٢٤.

(٢٤) انظر: M. M. Rozhanskaya, *Mechanica na Srednevokom Vostoke* (Moscow: Nauka, 1976), p. 146.

على ذراع الرافعة الطويل يملك ضغطاً أكثر قوة (أي أنه يملك ثقلاً أكبر) من نفس الحمل الموضوع على الذراع القصير. وفي هذه الحالة، فإن التعبير «ثقل» يعني أساساً عزم قوة بالنسبة إلى نقطة معينة.

لقد جمع القوهي وابن الهيثم، ومن بعدهما الخازني، هذين الجانبين لمفهوم الثقل، أي الجانب الذي يشير إلى الميل الطبيعي للجسم وإلى بعده بالنسبة إلى مركز الكون، والجانب الآخر الذي يعبّر عن الثقل بواسطة المسافة بين الجسم ومحور التعليق في الرافعة.

وفي كلتا الحالتين يرتبط وزن أو ثقل الجسم بموضعه بالنسبة إلى نقطة معينة.

إن الجانب الأول لمفهوم الثقل لم يسمح بأي تطور في علم الميكانيك في القرون الوسطى، سواء أكان ذلك في الشرق أم في الغرب. ولم يتم اكتشاف ظاهرة تغير ثقل الأجسام، تبعاً لتغير بعدها بالنسبة إلى مركز الأرض، إلا في القرن الثامن عشر الميلادي، بعد تحقيق بعض المنجزات في نظرية الجاذبية.

ويمكننا اعتبار الجانب الثاني كنموذج أولي لمفهوم أكثر حداثة (الثقل المتغير تبعاً للمكان). وقد استُخدم هذا المفهوم بشكل واسع في علم السكون الأوروبي في القرون الوسطى، ولا سيما في أعمال جوردانوس (Jordanus de Nemore)، وكذلك في أعمال تلامذته وأتباعه[٢٥].

فهذا الأخير، بالذات، هو الذي طرح كمسلّمة الفرق بين الوزن، المعتبر كقيمة ثابتة، والثقل، المعتبر ككمية متغيرة. وهذه المسلمة هي مميزة لعلم السكون العربي.

نشير أخيراً إلى احتمال كبير أن تكون الكلمتان اللاتينيتان «pondus» و«gravitas» ترجمتين حرفيتين للمصطلحين العربيين «وزن» و«ثقل».

٢ ـ مركز الثقل

لقد ظهر مفهوم مركز الثقل، كما رأينا سابقاً، للمرة الأولى في أعمال أرخميدس. فوفقاً له، إن مركز الثقل للجسم هو نقطة خاصة في داخله، بحيث إن الجسم إذا وُضع (عُلّق) في هذه النقطة، فإنه يبقى في حالة السكون ويحافظ على وضعه الأصلي، وذلك لأن جميع المستويات التي تمر بهذه النقطة تقسم الجسم إلى أجزاء تتوازن فيما بينها.

وقد أعد أرخميدس طرقاً لتحديد مركز الثقل للجسم، وكذلك لمجموعة أجسام. لكنه اختزل المسألة إلى الهندسة البحتة، حيث استبدل جسماً حقيقياً، أو مجموعة أجسام حقيقية، بأشكال مستوية.

---

(٢٥) انظر: المصدر نفسه، ص ١٤٧، و Moody and Clagett, *The Medieval Science of Weights*, pp. 69-112, 119-228 and 182-190.

وقد تم تطبيق نتائج أرخميدس الكلاسيكية، في بعض أعمال القوهي وابن الهيثم والإسفزاري، على أجسام ثلاثية الأبعاد، وكذلك على أنظمة أجسام ثلاثية الأبعاد. فقد عرض هؤلاء المؤلفون تقريباً مجمل بديهيات أرخميدس المتعلقة بمركز الثقل، لكنهم طبقوها على أجسام وازنة حقيقية.

وقد صاغ القوهي وابن الهيثم البديهيات التالية[٢٦]:

«١ ـ إذا كان جسمان مرتبطين فيما بينهما بحيث لا تتغير وضعية أي منهما بالنسبة إلى الآخر، فإن الجمع الذي يؤلفان، له مركز ثقل، مشترك بينهما، وهذا المركز تشكله نقطة وحيدة.

٢ ـ إذا ارتبط جسمان معاً بجسم ثالث مركز ثقله موجود على الخط المستقيم الذي يصل مركزي ثقلهما، يكون مركز ثقل النظام المؤلف من هذه الأجسام الثلاثة موجوداً على نفس الخط المستقيم.

٣ ـ إذا وازن جسم ثقيل جسماً ثقيلاً آخر، فإن أي جسم آخر له نفس ثقل الجسم الثاني، يوازن الجسم الأول على ألا تبدل مواقع أي من مراكز ثقل الأجسام الثلاثة.

٤ ـ لنأخذ جسمين متوازنين. فإذا انتزعنا أحدهما ووضعنا في مركز ثقله جسماً أثقل منه، فليس بإمكان الجسم الباقي موازنة الجسم الجديد. فيجب عندئذٍ استبدال الجسم الباقي بجسم أثقل لاستعادة التوازن.

٥ ـ إذا كان جسمان مرتبطين فيما بينهما، فإن نسبة ثقليهما هي عكس نسبة المسافتين بين مركزي ثقلهما ومركز ثقلهما المشترك أي مركز ثقل ما يشكله جمعهما»[٢٧].

نضيف إلى هذه المجموعة من البديهيات ثلاث صيغ لا تصلح إلا لأشكال ثلاثية الأبعاد، منها موشور قائم الزاوية وموشور متوازي السطوح (وهو جسم ذو أضلاع متوازية وأجزاء متشابهة):

«١ ـ مركز الثقل لجسم ذي أضلع متوازية وأجزاء متساوية هو مركزه [الهندسي] أي نقطة التقاء أقطاره.

٢ ـ إذا كان لدينا جسمان مختلفان متساويا القوة ولهما أضلع متوازية وعواميد متساوية، فإن نسبة ثقليهما هي كنسبة حجميهما.

٣ ـ إذا كان لجسم ما أضلع متوازية وقطع بسطح موازٍ لهذه الأضلع، فإنه ينقسم إلى

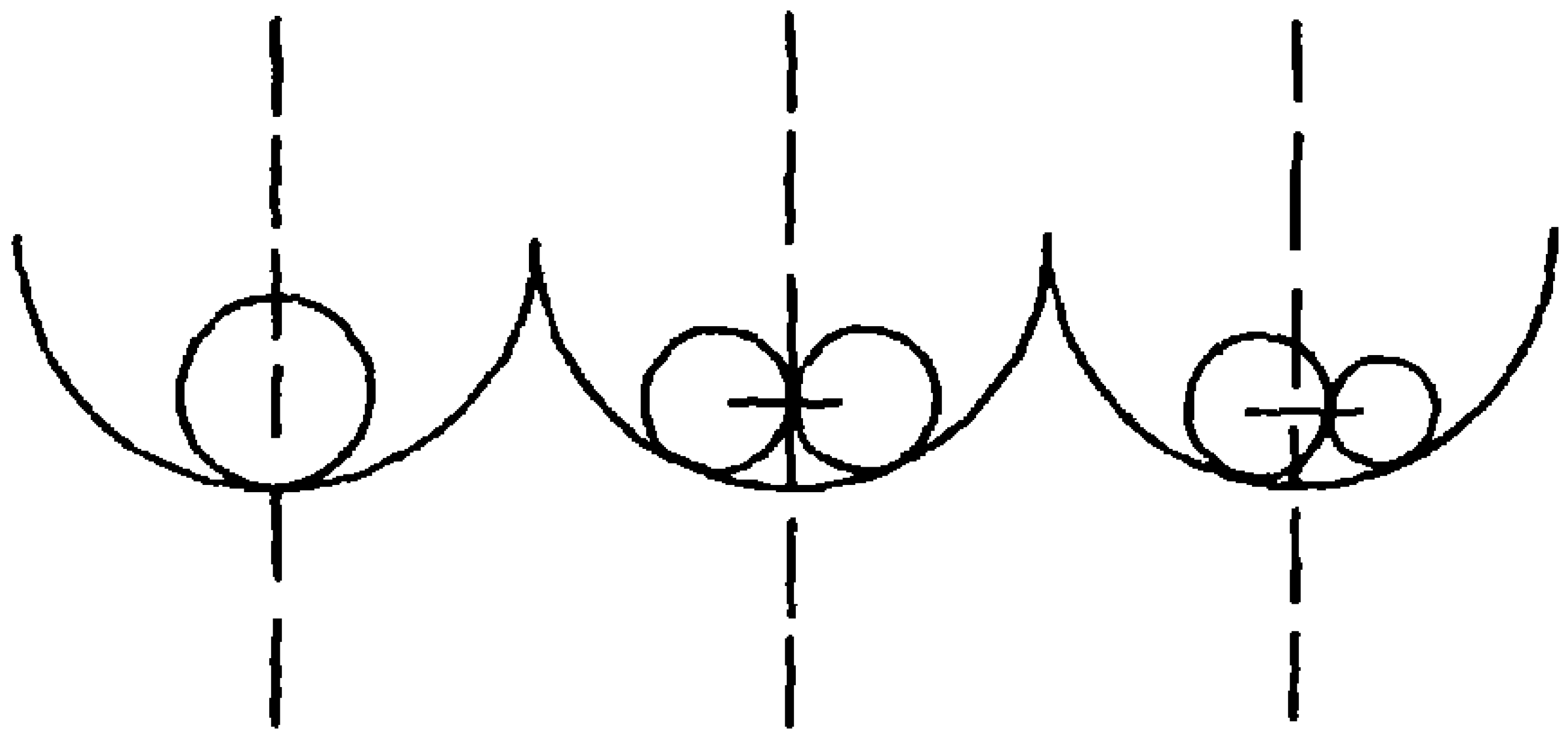
---

(٢٦) بتصرف. (المترجم).

(٢٧) انظر: Khanikoff, «Analysis and Extracts of *Kitāb mīzān al-ḥikma (Book on the Balance of Wisdom)*: An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century,» pp. 19-20.

جسمين لهما أيضاً أضلع متوازية ولكل منهما مركز ثقله الخاص به. ومركز ثقل الجسم الكامل يقع على الخط المستقيم الذي يجمع بين مركزي ثقل الجسمين الحاصلين. ونسبة ثقلي الجسمين هي عكس نسبة مقطعي هذا الخط المستقيم»[٢٨].

اقتصر بحث القوهي وابن الهيثم على تعديل وإكمال مجموعة البديهيات الأرخميدسية بهدف تطبيقها على أمثلة ثلاثية الأبعاد. في حين ذهب الإسفزاري إلى أبعد من ذلك وأنشأ نظرية مركز الثقل لنظام من أجسام ثلاثية الأبعاد، حيث تكون هذه الأجسام غير مرتبطة بصلابة فيما بينها. وقد ارتكز على نتائج التجربة التالية: ندع كرات تتدحرج في وعاء نصف كروي؛ نرمي أولاً كرة واحدة، ثم كرتين متساويتين في القطر والوزن، وأخيراً كرتين مختلفتين في القطر والوزن (انظر الشكل رقم (١٨ ـ ١)). وهكذا يمكننا دراسة مركز الثقل لجسم ثقيل واحد في الحالة الأولى، وكذلك لمجموعة من جسمين منفصلين بعضهما عن بعض في الحالتين الثانية والثالثة. ففي الحالة الأولى، يكون مركز ثقل الكرة موجوداً على السهم الذي يصل مركز ثقل الوعاء مع مركز الكون. وفي الحالة الثانية يكون مركز ثقل المجموعة في نقطة تقاطع هذا السهم مع الخط المستقيم الذي يصل مركزي ثقل الكرتين. وفي الحالة الثالثة، يكون مركز الثقل في نقطة من السهم تبعد عن مركزي ثقل الكرتين بمسافتين متناسبتين عكسياً مع وزنيهما[٢٩].



الشكل رقم (١٨ ـ ١)

يكشف الخازني أولاً في مؤلفه عن نتائج أعمال أسلافه، ثم يحدد فيما بعد مركز الثقل لمجموعة أجسام متصلة بصلابة فيما بينها، متخذاً كمثال لهذه المجموعة ميزاناً ذا كفتين (وهو مؤلف من رافعة ميزان وكفتين وأوزان). ويحسب أولاً مركز ثقل الكفتين وهما فارغتان، ثم مركز ثقل الكفتين وهما محملتان. فالخازني يختزل مسألة ثلاثية الأبعاد إلى مسألة مستويات (فهو ينتقل مباشرة من جسم إلى أشكال مستوية)، وأخيراً إلى مسألة مقارنة بين أسطح مستوية، وهذا الأمر هو سمة مميزة لأعمال الخازني.

---

(٢٨) المصدر نفسه، ص ٢٠.

(٢٩) المصدر نفسه، ص ٤٠.

إن تطور التقليد الأرخميدسي لم يكن، مع ذلك، يمثل في العلم العربي سوى جانب واحد من جوانب النظرية المتعلقة بتحديد مركز الثقل. فالكتّاب العرب الذين ورد ذكرهم سابقاً يرجعون جميعهم إلى نظام من البديهيات الهندسية، لكنهم في الوقت نفسه يصوغون مسلمات تمزج هذه البديهيات الأرخميدسية مع اعتبارات نابعة من الديناميكا. ففي استدلالاتهم، يقترن مفهوم مركز الثقل مع مفهوم الثقل بصفته قوة، ومع فكرة مركز الكون.

ويصوغ الخازني، بعد القوهي وابن الهيثم، عدداً من المسلمات، من بينها اثنتان تملكان أهمية خاصة[٣٠]:

«(١) إن النقطة من الجسم الثقيل التي تنطبق مع مركز الكون عند كون هذا الجسم في حالة السكون، تسمى مركز ثقل هذا الجسم»[٣١].

«(٢) إذا وصلت حركة الجسم إلى غايتها فإن ميول جميع أجزاء هذا الجسم نحو مركز الكون هي نفسها»[٣٢].

إن التحديد الأول هو مثال كلاسيكي لاندماج التقليدين الهندسي والدينامي. أما المسلمة الثانية فقد صيغت بروحية التقليد الدينامي. إلا أن ما يبدو، للوهلة الأولى، نابعاً من روحية دينامية بحتة، هو في الواقع مرتكز على أعمال أرخميدس. ومما لا شك فيه أن القوهي وابن الهيثم عندما يثيران مسألة الميل نفسه عند جميع أجزاء الجسم نحو مركز الكون، فإنهما يتعاملان في الواقع مع مفاهيم أرخميدس عن الميل (ropê) وعن تساوي عزوم القوة. فقد تم فعلاً تحديد مركز ثقل الجسم كنقطة يكون فيها مجموع عزوم قوى الجاذبية المؤثرة على الجسم معدوماً.

عرض القوهي وابن الهيثم نظام البديهيات هذا لجسم واحد ثقيل. ثم وسع الإسفزاري تطبيق هذا النظام على أنظمة أجسام ثقيلة. فأعلن أن كل جسم ثقيل يميل نحو مركز الكون. وخلال مساره نحو هذا المركز، قد يصادف هذا الجسم عائقاً، على سبيل المثال جسماً آخر ثقيلاً. آنذاك، يتحرك كل واحد منهما نحو مركز الكون، ويتلامس الجسمان في حركتهما بحيث «يمكن القول إنهما يصبحان جسماً ثقيلاً واحداً له مركز ثقل وحيد مشترك بين الجسمين»[٣٣] مقترباً من مركز الكون[٣٤]. ويتضح أن مركزي ثقل الجسمين يقعان على مسافتين من مركز الثقل المشترك، متناسبتين عكسياً مع ثقلي هذين

---

(٣٠) بتصرف. (المترجم).
(٣١) المصدر نفسه، ص ١٧.
(٣٢) المصدر نفسه، ص ١٨.
(٣٣) بتصرف. (المترجم).
(٣٤) المصدر نفسه، ص ٣٩.

الجسمين. ويذكر الإسفزاري[٣٥] «أن وجود مثل هذه العلاقة هو علة سكون هذين الجسمين لأن مركز ثقل كل منهما يميل نحو مركز الكون بتوافق مع هذه القوة»[٣٦].

٣ ـ مبدأ الرافعة: توازن نظام من عدة أجسام (ثبات التوازن)

إن علم السكون، بصفته علم الوزنة، قد ارتكز في العصور القديمة وكذلك في الشرق في القرون الوسطى على مبدأ الرافعة. وكان الأساس في نظرية الرافعة يُختزل في هذه الحالة إلى مسألة توازن نظام مؤلّف من جسمين. وأرخميدس نفسه لم يأخذ في الاعتبار إلا مثال رافعة غير وازنة وفي حالة توازن، فقد صوّرها كمقطع من خط مستقيم مثبت في نقطة معينة، وفي أطرافها تتدلى أحمال بواسطة خيطان غير وازنة. إن مبدأ أرخميدس ينتج مباشرة من نظريته الخاصة عن مركز الثقل.

وهناك مقاربة أخرى لنظرية الرافعة ترجع إلى تقليد علم الحركة (التقليد الكينماتي) العائد لكتاب **المسائل الميكانيكية**، والذي يرتكز على دراسة رافعة عند اختلال توازنها. وفي هذه الحالة، تستند برهنة مبدأ الرافعة على الفكرة التي مفادها أنه إذا اختل توازن رافعة، فإن ذراعها يرسم قوس دائرة يكون طوله متناسباً عكسياً مع قيمة الحمل المدلّى.

وقد استخدم الكتّاب العرب كلاً من هذين التقليدين، إذ إننا نجد الصيغتين لمبدأ الرافعة في مؤلف واحد، على سبيل المثال في **كتاب في قرسطون** أو أيضاً في **كتاب ميزان الحكمة**.

ففي **كتاب في قرسطون** نجد مبدأ الرافعة مبرهناً مرتين. وفي برهانه **الأول**، ينطلق ثابت بن قرة من **المسائل الميكانيكية**. ويختزله، من حيث الأساس، إلى مقارنة مساحتي قطاعين يرسمهما ذراعا الرافعة الوازنة عند اختلال توازنها. وهذا البرهان ليس دقيقاً. فثابت بن قرة يأخذ نموذجاً ميكانيكياً للظاهرة، ويعطي تفسيراً هندسياً لها. أما البرهان **الثاني**، الأكثر دقة، فيعود إلى التقليد الأرخميدسي. وهو نتاج لتطبيق رياضيات العصور القديمة على مسائل علم السكون: كنظرية النسب لأوذكسوس وإقليدس، وطريقة أرخميدس في الحسابات التكاملية العليا والدنيا. وفي هذا البرهان يستخدم ثابت بن قرة المفاهيم الرئيسة لكتاب إقليدس **حول الميزان** ولكتاب ***Liber de Canonio***.

في كتاب إقليدس **حول الميزان** لم يبرهن المؤلف المبدأ العام للرافعة إلا للأوزان المتشاركة في القياس فيما بينها، وللوهلة الأولى، لرافعة غير وازنة. إلا أنه، أثناء برهانه،

---

(٣٥) بتصرف. (المترجم).

(٣٦) المصدر نفسه، ص ٣٩.

يقسم ذراع الرافعة إلى عدد عشوائي من الأجزاء المتساوية، ويعلق أوزاناً متساوية في النقاط الفاصلة ما بين الأجزاء، ثم يبرهن أن هذه الأوزان جميعها يمكن استبدالها بوزن واحد، يعلق في وسط الذراع ويكون مساوياً لمجموع الأوزان، أي مساوياً لمحصلتها. وهكذا، ينتقل من خط هندسي إلى رافعة وازنة.

أما مؤلف *Liber de Canonio* فينطلق مما تم إثباته في كتاب إقليدس، ويستخدم مفهوم الرافعة الوازنة منذ بداية برهانه. فهو يعتبر الرافعة كقضيب[٣٧] وازن متجانس ذي سماكة ثابتة. وفي مجرى برهانه، يمثل وزن جزء من الذراع كحمل موزع بانتظام على طول هذا الجزء، مما يسمح باستبداله بحمل معادل معلق في هذا الجزء، على أن نفترض في هذه الحالة أن الجزء لا وزن له.

وقد استخدم ثابت بن قرة هذين المفهومين وطورهما. فقد درس تباعاً الرافعات المزودة بأوزان متشاركة فيما بينها وغير متشاركة، آخذاً أولاً رافعة غير وازنة ومن ثم رافعة وازنة. وفي هذه الحالة، يتم اختزال مسألة توازن رافعة وازنة إلى حساب محصلة حِملٍ متواصل موزع بانتظام على مقطع من الذراع، أو بعبارة أخرى، إلى حساب مركز ثقل مقطع وازن.

والمسألة، بمصطلحات رياضية، معادلة لحساب التكامل $\int_a^b x dx$، أي لحساب مقطع من جسم مكافئ. وقد حل ثابت بن قرة هذه المسألة في مؤلفه **مقالة في مساحة المجسمات المكافئة**[٣٨]. يبدأ ثابت بن قرة بتحديد محصلة قوتين متساويتين، ثم يعمم النتيجة التي حصل عليها على أي عدد عشوائي من القوى المتساوية وعلى عدد لانهائي من هذه القوى، ليخلص في النهاية إلى دراسة حمل ثابت موزع بانتظام على «قضيب». ويعطي برهاناً دقيقاً للنتيجة التي حصل عليها مستخدماً طريقة أرخميدس في الحسابات التكاملية العليا والدنيا[٣٩].

أما الخازني، فإنه يعطي في البداية الصياغة الأرخميدسية الكلاسيكية، ثم موجزات عن **كتاب في قرسطون** وعن مؤلف ثابت بن قرة **باب مفرد في صفات الوزن واختلافه**

---

(٣٧) القضيب هو مجموع ذراعي الرافعة.

(٣٨) انظر: Thābit Ibn Qurra, *Maqāla fi misāḥāt al-mujassamāt al-mukāfiya (Livre sur la mesure des paraboloïdes)*; traduction russe par Boris A. Rozenfeld, dans: *Nauchnoye masledstvo*, vol. 8: *Matematicheskiye traktati*, pp. 157-196.

وبالنسبة للترجمة الألمانية، انظر: Suter, «Die Abhandlungen Thābit ben Qurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloïde,» pp. 186-227.

انظر أيضاً الفصل الثالث عشر ضمن هذا الجزء من الموسوعة وهو بعنوان: «التحديدات اللامتناهية في الصغر وتربيع الهلاليات ومسائل تساوي المحيطات».

(٣٩) انظر: Rozhanskaya, *Mechanica na Srednevokom Vostoke*, pp. 91-93.

الذي لا نعرفه إلا من خلال هذا العرض[٤٠].

ثم يعرض الخازني بعد ذلك النظرية وفقاً للإسفزاري. فقد كان هذا الأخير أول من وضع، في تاريخ علم السكون، تحديداً واضحاً لرافعة وازنة، ويستأهل هذا التحديد أن نضعه بنصه الكامل[٤١]: «إن النتائج المنطقية التي توالت استناداً إلى علم الهندسة ترتكز على فرضية أن القضيب هو خط وهمي ما. ونعلم أن الخط الوهمي ليس له أي ثقل. فمن المستحيل موازنة أثقال عليه. ولا نستطيع أن نعلق على هذا الخط شيئاً نريد وزنه [لعدم كونه خطاً حقيقياً]. لكن قضيب الميزان [. . .] هو جسم ذو وزن ويمكن أن يكون وزنه سبباً في اختلال التوازن إذا لم يكن محور التعليق واقعاً في منتصف القضيب»[٤٢].

وكما فعل ثابت بن قرة، فقد جمع الإسفزاري صيغتي مبدأ الرافعة، أي الصيغة الأرخميدسية والأخرى العائدة لمؤلف **المسائل الميكانيكية**. وفي الأولى يقترب استدلاله من طريقة كتاب إقليدس **حول الميزان** وينضم في الواقع إلى برهان ثابت بن قرة. أما فيما يتعلق بالصيغة الثانية، فقد استوحى الإسفزاري كتاب **المسائل الميكانيكية**، ووضع مسلمة تقول: «إن حركات الميزان (ذي الرافعة) يمكن اعتبارها حركات دائرية، ذلك لأن جزءي قضيب الميزان في جانبي محور التعليق يشابهان خطين مستقيمين منطلقين من مركز الدائرة، وإن محور التعليق عينه هو مركز تلك الدائرة»[٤٣].

وقد ربط الإسفزاري حركة طرفي رافعة عند اختلال التوازن بالمفاهيم الأرسطية عن الحركة «الطبيعية» والحركة «العنيفة». فعندما يهبط الميزان، يقوم وزنه بحركة «طبيعية»، في حين أن وزناً صاعداً يكون في حركة «عنيفة». ووفقاً للإسفزاري، فإن سبب الحركة «العنيفة» لأحد وزني الميزان ليس «قوة» أو أي تأثير خارجي، بل هو الحركة «الطبيعية» للطرف الآخر. والحركة «الطبيعية» هذه تنتج بدورها عن ميل طبيعي للذراع الثقيل نحو «مركز الكون».

وهكذا يحول الإسفزاري شروط توازن العتلة إلى شروط تساوي الميول فيذكر[٤٤] «أن قضيب الميزان سوف يحافظ على توازنه [. . .] إذا لم تزد أو تنقص انحناءات الموزونات الموجودة عند طرفيه»[٤٥].

---

(٤٠) انظر: Khanikoff, «Analysis and Extracts of *Kitāb mīzān al-hikma (Book on the Balance of Wisdom):* An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century,» pp. 33-38.

(٤١) بتصرف. (المترجم).

(٤٢) المصدر نفسه، ص ٤٤ ـ ٤٥.

(٤٣) المصدر نفسه، ص ١٠٠.

(٤٤) بتصرف. (المترجم).

(٤٥) المصدر نفسه، ص ٤٢.

أما الجزء الثاني من برهان الإسفزاري فتنبع أصوله من مؤلف إقليدس المزعوم (وصولاً إلى إدراج مفهوم القوة والوزن)، وإلى **كتاب في قرسطون** (وصولاً إلى ذلك المدى حيث يستبدل الثقل بعدد كبير من الأثقال الأصغر منه، مثبتة في نقطة واحدة، وحيث يتم استخدام برهان التناقض).

لقد عرض الخازني براهين ثابت بن قرة والإسفزاري بطريقة شاملة، إلى درجة سمحت له بعدم التوقف عند مبدأ الرافعة، وبالانتقال مباشرة إلى تطبيقاته العملية. فقد عرض الميزان كنظام أجسام وازنة (القضيب واللسان والكفات المحملة بأوزان والتي يمكن أن يصل عددها إلى خمسة. والمقصود هنا هو «ميزان الحكمة»، أي ميزان رافعة بذراعين متساويين، ومزود بخمس كفات وبثقل موازن متنقل فوق ميناء الميزان). ثم درس شروط توازنها وثباتها مرتكزاً على نظرية مركز الثقل الذي عرضه سابقاً.

وقد أجرى الدراسة على عدة مراحل. ففي المرحلة الأولى، درس «قضيباً» أسطوانياً وازناً معلقاً بحرية على محور وفي حالة توازن بشكل متواز مع المحور الأفقي. وميز الخازني ثلاثة أوضاع ممكنة «للقضيب» عند اختلال توازنه، وذلك تبعاً لمرور محور الدوران فوق أو تحت أو في مركز ثقل القضيب. وقد سمى هذه الأوضاع الثلاثة، على التوالي، «محور الانقلاب» و«محور الالتزام» و«محور الاعتدال». وإذا استعملنا الاصطلاحات الحديثة، فإن هذه الأوضاع الثلاثة تمثل على التوالي حالات توازن متقلقل، وثابت، وكيفي. ويعطي الخازني لهذه الأوضاع السمات التالية(٤٦):

الحالة الأولى: «محور الاعتدال»

«إذا مر المحور بمركز ثقل قضيب الميزان (وكان هذا المركز يقع في منتصف القضيب) عمودياً على القضيب، يدور هذا الأخير بحرية بتأثير ثقله الخاص ويبقى في سكون في الوضعية التي يقف عندها في نهاية دورانه الذي يحدثه ثقله الخاص. ويبلغ القضيب الوضعية الأفقية تحت تأثير الثقل لأن سهمه الذي هو في حالة السكون والذي يمر في مركز الكون وفي مركز ثقل القضيب يقسم القضيب إلى قسمين متساويين».

الحالة الثانية: «محور الدوران»

«لنأخذ الآن محوراً يقع بين مركز الكون ومركز ثقل القضيب. فإذا حركنا القضيب فسينعكس لأن السهم المار في مركز الكون يقسمه إلى قسمين غير متساويين، وزن الأكبر منهما أعظم من وزن الأصغر، فينقلب القضيب».

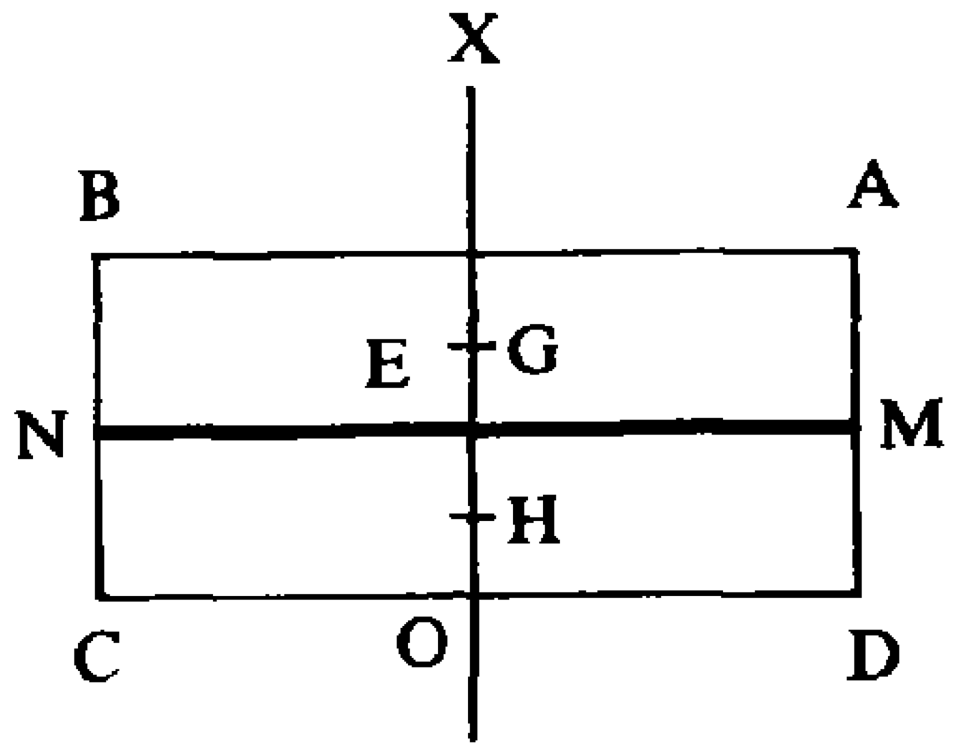
---

(٤٦) بتصرف. (المترجم).

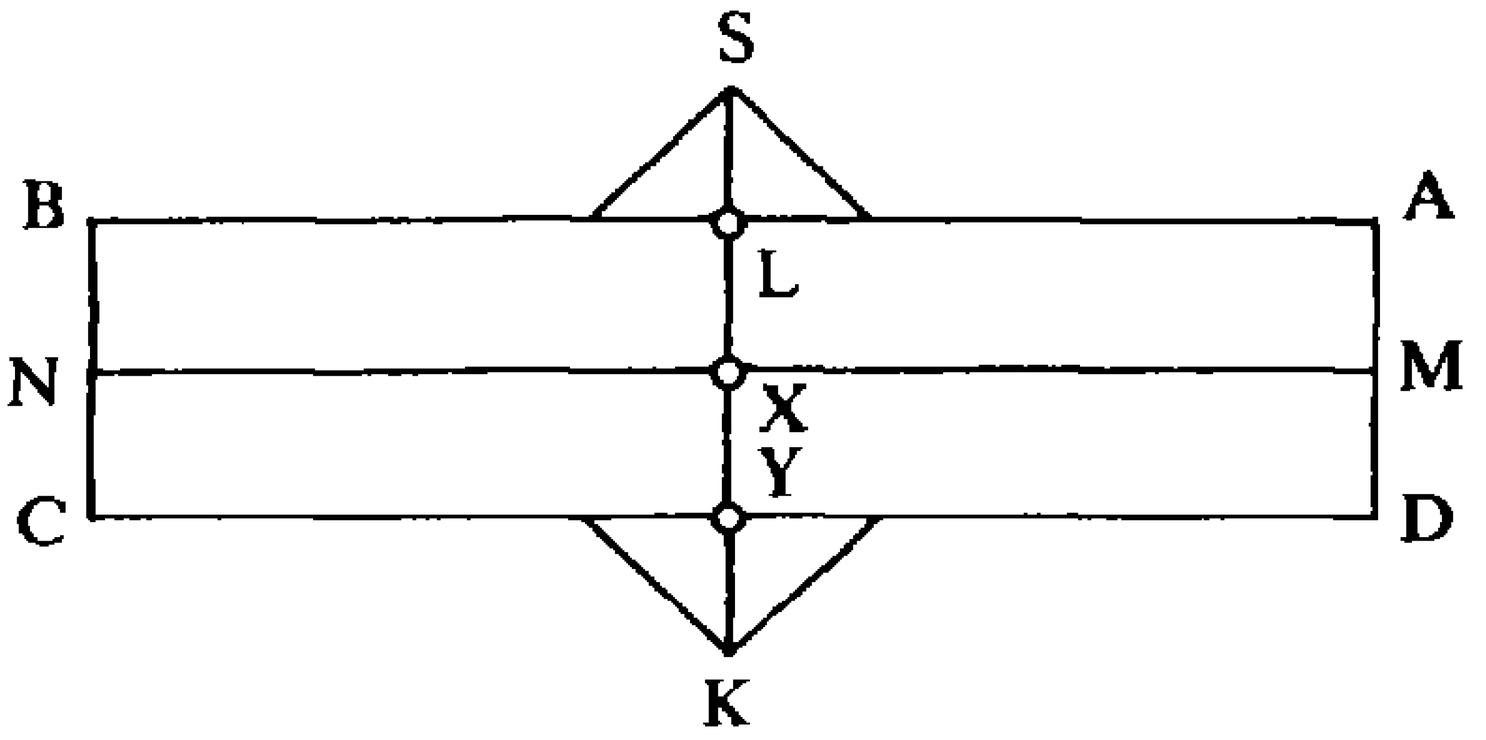
الحالة الثالثة: «محور الالتزام»[٤٧]

«لنفرض الآن أن محور دوران قضيب الميزان يقع فوق مركز ثقل القضيب. في هذه الحالة إذا أثرنا حركة للقضيب، فإن السهم المار في مركز الكون وفي مركز الثقل يقسم عندئذٍ القضيب إلى قسمين غير متساويين. والجزء الأكبر ينقلب نحو الأعلى، ومن ثم يتجاوز القسم الأصغر دائراً نحو الأسفل لكي يستقر في النهاية بموازاة الأفق لأن السهم سيقسم عندها القضيب إلى قسمين متساويين. وعند ذلك يصبح القضيب محكوماً بالبقاء موازياً للأفق»[٤٨].

أما في المرحلة الثانية من تحليله، فقد درس الخازني مجموعة مؤلفة من قضيب الميزان ومن اللسان مهملاً، بشكل مؤقت، تأثيرات الكفات والأوزان. إن شروط توازن مثل هذه المجموعة يمكن إرجاعها إلى شروط توازن رافعة ميزان حر، لكن مع مركز ثقل آخر. وهذه الاعتبارات، بالإضافة إلى ذلك، صحيحة شريطة أن تكون المجموعة متناظرة بالنسبة إلى محور التعليق، أي شرط أن يكون اللسان ذا شكل معيَّني ومثبتاً في مركز تناظر القضيب. وقد أوضح الخازني مراحل تحليله بواسطة أشكال هندسية (انظر الشكل رقم (١٨ ـ ٢) والشكل رقم (١٨ ـ ٣)). وإذا لم تكن هذه الشروط مستوفاة، أي إذا كان اللسان يملك شكلاً آخر وغير مثبت لا في مركز التناظر ولا على محور التناظر، فإن مركزي ثقل القضيب واللسان عند ذاك لا يتطابقان مع مركز التناظر ولا مع محور التناظر ولا مع النقطة التي يمر بها محور دوران القضيب. وتصبح الشروط في هذه الحالة أكثر تعقيداً، ويزداد التعقيد عندما تعلق كفات على القضيب.



الشكل رقم (١٨ ـ ٢)



الشكل رقم (١٨ ـ ٣)

ولم يعطِ الخازني برهاناً لهذه الصيغة، مكتفياً بالإشارة إلى أنه «شاسع جداً». إلا أن طريقته تسمح لنا بالافتراض بأن هذا البرهان الشاسع قد ارتكز على بعض مسلمات كتاب

(٤٧) بتصرف. (المترجم).

(٤٨) المصدر نفسه، ص ٩٧ ـ ٩٨.

الأجسام العائمة لأرخميدس، ولا سيما في ثبات توازن الأجسام ذات الأشكال المتنوعة والمغمورة في سائل. فإذا كان الأمر على هذا النحو، يكون الخازني بلا شك مطلعاً ليس فقط على الترجمة العربية لهذا المؤلف الذي ورد بنصه الكامل في كتاب **ميزان الحكمة** (لكنه لا يحتوي على أية مسلمة في ثبات وعدم ثبات الأجسام المغطسة في سائل)، بل يكون أيضاً مطلعاً على النص اليوناني الأصلي والذي لم يعرفه العلم الأوروبي إلا في بداية القرن العشرين.

٤ ـ الهيدروستاتيكا

انبثقت أيضاً الهيدروستاتيكا، في المشرق في القرون الوسطى، من التقليد الأرخميدسي. فقد كان رجال العلم في ذلك العصر يعرفون جيداً مؤلف أرخميدس **الأجسام العائمة** وكذلك الشروحات المتعلقة به، أمثال **مقالة لأرخميدس في الثقل والخفة** المذكورة سابقاً، ومؤلف منلاوس، ورسالة الكندي الكبرى حول الأجسام الغاطسة في الماء حيث تشكل هذه الأخيرة الشرح الأوفى لأعمال أرخميدس[٤٩].

وهذه المعلومات قدمها بشكل مقتضب جداً الخازني، الذي جمع الهيدروستاتيكا الأرخميدسية مع نظرية أرخميدس عن حركة الأجسام في وسط غير الهواء. والمبدأ الذي قاد الخازني في اختياره لمصادر الفصل الذي يبحث هذا الموضوع في كتاب **ميزان الحكمة** واضح. فقد عرض في مؤلفه صيغه الخاصة فيما يتعلق بأعمال أرخميدس ومنلاوس لكي يعطي المبادئ الأساسية للهيدروستاتيكا. كما أدرج كتاب إقليدس **الثقيل والخفيف** في مؤلفه، لكي يعرّف القارئ على نظرية حركة الأجسام في وسط غير الهواء. فهو يذكر أنه[٥٠] «إذا تنقّل جسم وازن في سائل ما فإن ثقل هذا الجسم ينقص كمية تتعلق بحجمه، بحيث يقل وزنه في السائل بما يعادل وزن حجم السائل المزاح»[٥١].

فبمقدار حجم الجسم المتحرك يكون رد الفعل ضد حركته (أي قيمة القوة الرافعة). ومن ناحية أخرى، فإن فرق السرعة في سائلٍ ما لحركة جسمين ثقيلين لهما نفس الحجم ونفس الثقل النوعي، يتحدد باختلاف شكليهما. لذلك تختلف قوة حركة الأجسام المختلفة في الهواء أو في الماء. ويعود سبب هذا الاختلاف إلى أشكالها المتنوعة[٥٢].

وهكذا، يميز الخازني نوعين من القوى الفاعلة على الأجسام المتحركة في وسط غير الهواء. فالقوة الأولى التي تقاوم الحركة، وفقاً لنظرية أرسطو، تتحدد بوزن وشكل الجسم.

(٤٩) المصدر نفسه، ص ١٦٠.
(٥٠) بتصرف. (المترجم).
(٥١) المصدر نفسه، ص ٢٤.
(٥٢) المصدر نفسه، ص ٢٤.

أما القوة الثانية، التي حددها أرخميدس هذه المرة، فهي تتعلق بحجم الجسم نفسه وبحجم السائل الذي يزيحه الجسم، وترتبط بالإضافة إلى ذلك بكثافة الوسط.

إذا كان جسمان يملكان نفس الحجم، لكن كثافتهما مختلفة، فإن الجسم ذا الكثافة الأكبر يملك في هذه الحالة ثقلاً أكبر وذلك في وسط معين. كما أن أجساماً مصنوعة من نفس المادة وتملك نفس الثقل في وسط معين، يمكن أن تكون أوزانها مختلفة في وسط آخر.

تعود هذه التأكيدات، من دون أدنى شك، إلى نظرية أرخميدس. فالخازني يطبق الافتراض السابع من الكتاب الأول من مؤلف **الأجسام العائمة** على أجسام مغطسة في أوساط مختلفة الكثافة، فهو يهتم بأوساط غير الماء.

وهكذا، بدمجه هيدروستاتيكا أرخميدس ونظرية أرسطو عن حركة الأجسام، يطور الخازني نظرية موحدة عن الحالة العامة لحركة جسم في سائل، وهذه النظرية تأخذ بعين الاعتبار وفي الوقت نفسه مقاومة الجسم والوسط والقوة الرافعة. كما أن آراءه حول تغيرات الوزن التي تنجم عن انتقال جسم من وسط إلى آخر (مثلاً، من السائل إلى الهواء وبالعكس) هي ذات أهمية خاصة. فقد استخدمها كتأكيد نظري لطريقته في تحديد الثقل النوعي، والتي تتمثل في وزن الجسم في الهواء والماء تباعاً.

وقد وسّع الخازني هيدروستاتيكا أرخميدس ـ أي نظرية الأجسام الممتلئة العائمة في سائل ـ لتشمل أجساماً فارغة عائمة. وبعبارة أخرى، فقد طور مبدأ السفينة، إذ أعطى نموذجاً لسفينة بواسطة جسم يتضمن تجويفاً مفتوحاً، وليحصل على سفينة محملة، فقد تصور حملاً موضوعاً في تجويف هذا الجسم.

وقد اتبع الخازني ثلاث مراحل في استدلاله. فأخذ أولاً جسماً ممتلئاً مغطساً في سائل، ثم جسماً مجوفاً بدون أي حمل، وأخيراً جسماً مجوفاً ومحملاً. وبعد أن استخدم عدداً من التحديدات، اختزل نموذج جسم مجوف محمل إلى نموذج جسم مجوف بدون حمل، ثم اختزل هذا الأخير إلى نموذج جسم ممتلىء بدون حمل، مما يعني اختصار نظرية العوم لسفينة محملة إلى نظرية أرخميدس عن الأجسام العائمة في سائل[٥٣].

رابعاً: علم السكون التطبيقي

كان علم السكون التطبيقي (العملي) في الشرق في القرون الوسطى، بالمعنى الحالي، موضوع مواد علمية عديدة. وقد كانت هذه المواد، وفق تصنيف علوم ذلك العصر،

(٥٣) المصدر نفسه، ص ٢٧ ـ ٢٨.

مرتبطة بـ «علوم» مختلفة وبـ «فروع» لهذه العلوم، وبالتالي لم يكن بالإمكان دائماً تحديد الصلات التي كانت تربط المواد بهذه العلوم. فقد كان علم السكون الهندسي يعتبر جزءاً من الهندسة، في حين كان «علم الأوزان» يوضع على حدة، وفي أيامنا هذه ننسب هذا الأخير إلى علم السكون النظري. وقد كان علم السكون التطبيقي (في حقيقة الأمر) يتضمن ما كان يسمى «علم الحيل»، أي نظرية الآلات البسيطة وتركيباتها المختلفة. ويتبين لنا أحياناً أن مؤلفي ذلك العصر، كمؤلفي العصور القديمة، قد قسموا علم الميكانيك إلى علم الآلات الحربية وعلم الآليات البارعة (الحيل) وأهمها كانت الأجهزة المستخدمة لرفع الأثقال وللري.

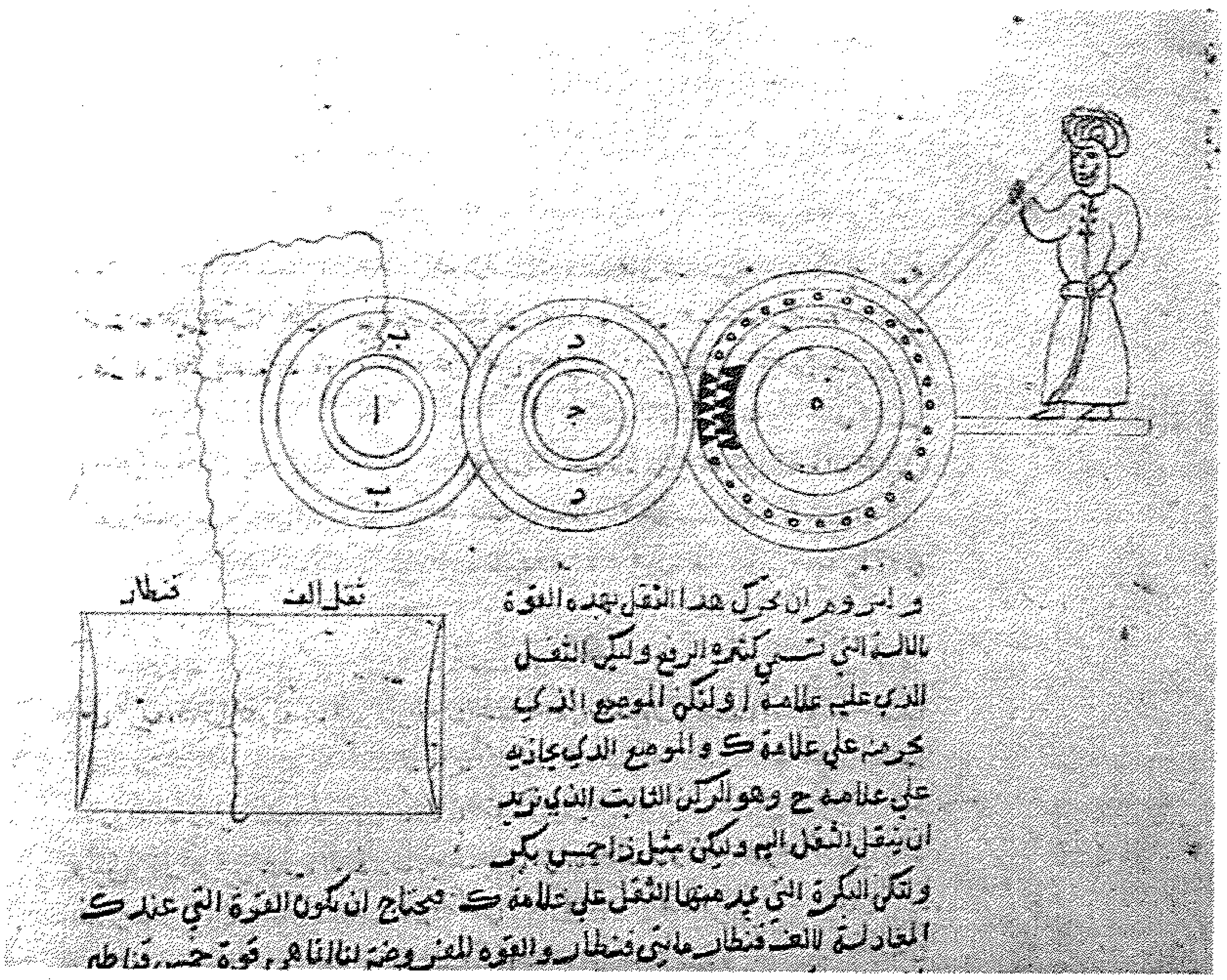
وفي الوقت الحاضر، يُعتبر علم السكون التطبيقي قبل كل شيء مجموعة مسائل مرتبطة بـ «علم الحيل»، أي بعلم الميكانيك بمعناه الضيق الأصلي. أما نظرية الميزان (بصفته شكلاً من أشكال الرافعة) ونظرية الوزنة، فهما مقسمتان إلى نظرية للآلات البسيطة، ونظرية لتركيباتها. كما أن نظرية الوزنة تقترب كثيراً من مسألة تحديد الثقل النوعي. وقد وُضعت هذه المسألة سريعاً على حدة، لتشكل فرعاً خاصاً وأساسياً في علم السكون التطبيقي، وقد أصبح هذا الفرع محور اهتمام عدد كبير من العلماء العرب المشهورين.

١ ـ نظرية الآلات البسيطة والآليات البارعة (علم الحيل)

نختار من بين المؤلفات العديدة المخصصة للآليات البارعة، تلك التي يبحث فيها المؤلفون طرقاً مرتكزة على تطبيق «القاعدة الذهبية لعلم الميكانيك». ومن بين هذه الآليات، كان الاهتمام منصباً بشكل خاص على تلك التي كانت مخصصة لرفع الأثقال. إذ نجد، من حيث المبدأ، وصفاً للعديد من أشكال الآلات البسيطة ولتعديلاتها في أية موسوعة كانت في ذلك العصر.

إن موسوعة أبي عبد الله الخوارزمي **مفاتيح العلوم** هي من أقدم المصادر العربية التي تبحث في «الآلات البسيطة»، وقد تعرفت عليها أوروبا في القرون الوسطى من خلال ترجمة لاتينية(٥٤). وتتضمن هذه الموسوعة وصفاً لآليات باستطاعتها تحريك أحمال ثقيلة بواسطة قوة صغيرة. ونذكر أن أغلبية هذه الآليات قد أشار إليها هيرون الإسكندري في مؤلفه عن **الميكانيك**.

(٥٤) انظر: Al-Kuwārizmī, *Liber mafātīh al-olūm, explicans vocabula technica scientiarum tam arabum quam peregrinorum, auctore Abū Abdallah Mohammed Ibn Ahmed Ibn Jūsof al-Kātib al-Khowarezmi.*



الصورة رقم (١٨ ــ ٣)

هيرون الاسكندري، **الميكانيك**، ترجمة قسطا بن لوقا

(اسطنبول، مخطوطة أحمد الثالث، ٣٤٦٦).

انتهى قسطا بن لوقا من ترجمة هذا الكتاب حوالى سنة ٢٥٠/ ٨٦٤، ولقد فُقد الأصل اليوناني لهذا الكتاب ولم يبق إلا ترجمته العربية. ولقد أثر هذا الكتاب تأثيراً كبيراً في تاريخ هذا العلم. فقد كان مرجعاً للمهندسين وجدوا فيه أسس آلات رفع الأشياء الثقيلة. وينقسم إلى ثلاث مقالات: الأولى نظرية صرفة يعالج فيها مسألة «مركز الثقل» لجسم ما أو مسألة عمل أشكال هندسية متشابهة، أما المقالة الثانية، فيعالج فيها مسألة الآلات اللازمة لرفع الأثقال، أما الثالثة فيصف أجهزة كاملة يربط فيها العناصر السابقة. ونرى في هذه الصورة التحريك بنظام مكون من ثلاث عجلات مسننة، وحركت الأولى باستعمال رافعة.

غير أن أعمال ابن سينا هي ذات أهمية أكبر، من وجهة النظر هذه، ولا سيما الفصول المخصصة لعلم الميكانيك في مؤلفاته الموسوعية، وكذلك في مقالته **معيار العقل**، وقد ارتكزت هذه المؤلفات والمقالة على كتاب **المسائل الميكانيكية** وعلى كتاب هيرون في **الميكانيك**.

إن هذه المقالة، المؤلفة من قسمين، تختص كلياً بوصف خمس آلات بسيطة. في القسم **الأول** يحذو ابن سينا حذو هيرون إلى درجة كبيرة، حتى إنه يأخذ من كتاب **الميكانيك** وصف وأشكال بعض «الآلات البسيطة». لذلك يعود الفضل، إلى حد بعيد، في تنظيم هذا القسم إلى كتاب هيرون. فقد أخذ عنه ابن سينا أسماء وتحديدات «الآلات البسيطة»، والمواد الضرورية لصناعتها، والشروط التي تؤمن ثباتها وضمان عملها.

ويتضمن القسم **الثاني** من المقالة وصفاً لتركيبات «الآلات البسيطة». ويصنف ابن سينا، على غرار هيرون، هذه التركيبات ويجمعها وفق مقدار توافق العناصر المؤلفة للآلات البسيطة في التركيبة المحتملة. لكن ابن سينا، وبخلاف هيرون الذي لا يأخذ بعين الاعتبار سوى بعض هذه التركيبات، يحلل تباعاً جميع التركيبات المحتملة. فهو يصف، في البداية، مثلما فعل هيرون، جميع تركيبات الآلات البسيطة المتوافقة كالرافعات والبكرات وملفافات الرفع والحزقات[٥٥]. ثم يأخذ جميع تركيبات الآلات البسيطة غير المتوافقة وذلك بأزواج ممكنة عملياً، أي ملفاف ـ حزقة وملفاف ـ بكرة وملفاف ـ رافعة. ويصف أخيراً آلية هي بشكل أساسي تركيب من جميع الآلات البسيطة (باستثناء السَّك)[٥٦].

وعلى الرغم من أن مقالة ابن سينا هي «موجز عملي صرف، إلا أنها ذات مغزى كبير في تاريخ علم الميكانيك. فقد كانت، في الواقع، أول محاولة ناجحة في تصنيف الآلات البسيطة وتركيباتها. والجدير ملاحظته أن الاهتمام بمثل هذا التصنيف لم يكن بأي حال من الأحوال مجرد مصادفة، سواء بالنسبة إلى ابن سينا أم بالنسبة إلى عصره.

ثم كانت مرحلة جديدة، امتدت تاريخياً من القرن الحادي عشر إلى القرن الثاني عشر الميلاديين، وقد تميزت بمنحى مختلف جذرياً. فقد اعتمد كتّاب تلك المرحلة أسلوباً جديداً، إذ أخذوا بشكل عام نوعاً من آلة بسيطة معينة، ووضعوا لها نظرية بأكبر دقة ممكنة، ثم أعطوا وصفاً وتصنيفاً لأجهزة مختلفة تشكل تعديلات لنوع الآلة موضوع البحث، أو أنهم أخذوا جزءاً خاصاً لـ «فرع» من العلوم، ووصفوا في إطاره آلات مختلفة وآليات وأدوات تنتمي إلى هذا الفرع أو تقترن به. إن كتاب **ميزان الحكمة** للخازني يشكل مثالاً نموذجياً لمثل

(٥٥) الصواميل. (المترجم).

(٥٦) يستخدم لتثبيت أجزاءٍ في آلية واحدة.

هذا الصنف من المؤلفات في علم الميكانيك. فهو يعرض بشكل شامل المسائل الرئيسة النظرية ومسائل التطبيق العملي للآلة الأكثر شيوعاً من بين «الآلات البسيطة»، أي الرافعة وشكلها الأكثر شيوعاً، وهو الميزان.

وهكذا مر «علم الآلات البسيطة» في العصور القديمة وفي الشرق في القرون الوسطى بعدد من المراحل المميزة له خلال تطوره. وذلك انطلاقاً من وصف أولي لمبدأ عمل «الآلات البسيطة» وتركيباتها، مروراً بمحاولات تصنيفها، وأخيراً وصولاً إلى وصف أحادي الموضوع لأنواع معينة من الآلات، والوصف هذا يضع إطاراً نظرياً لطراز إحدى الآلات، كما يقدم نموذجاً للآلة ولجميع أشكالها وتعديلاتها. هذه هي السمات المميزة لتلك المرحلة من تطور علم السكون، والتي انطلاقاً منها تشكل علم الميكانيك الصناعي فيما بعد(٥٧).

٢ ـ الميزان ـ الوزنة

إن المعلومات الأكثر شمولاً في الميزان والوزنة موجودة، وكما ذكرنا سابقاً، في كتاب **ميزان الحكمة** للخازني. فالمؤلف نفسه يعرّف كتابه(٥٨) «ككل ما أمكن تجميعه حول الموازين وطرق الوزن»(٥٩).

يقسم الخازني جميع أنواع الموازين إلى مجموعتين: الموازين المتساوية الذراعين، والموازين غير المتساوية الذراعين. إن النموذج الأكثر بساطة لميزان من المجموعة الأولى يملك قضيباً وكفات. نضع وزناً في كفة ونزنه بواسطة أثقال موازنة نضعها في إحدى الكفات أو في اثنتين منها. ويقترح الخازني لهذا الطراز من الموازين سلسلة أثقال موازنة تسمح بتحديد وزن أقصى بواسطة أقل عدد ممكن من الأثقال. والجانب المهم هو أن كتل الأثقال قد تم اختيارها من بين أسس، قيمتها اثنان أو ثلاثة، أي أنها مساوية لـ ١، ٢، $٢^٢$، $٢^٣$؛ ٣، $٣^٢$، . . .، وحدات وزن. فالخازني يعطي في هذه السلسلة حلاً لـ «مسألة الوزنة»، حيث عرفت أوروبا في القرون الوسطى فيما بعد أنه ينبغي البحث عن مصادر هذا الحل في

---

(٥٧) انظر: M. M. Rozhanskaya and I. S. Levinova, *At the Sources of Machine's Mechanics: Essays on the History of Mechanics (U Istokov Mechaniki Machin Issledovanija po Istorii Mechaniki)* (Moscow: Nauka, 1983), pp. 101-114.

(٥٨) بتصرف. (المترجم).

(٥٩) Khanikoff, «Analysis and Extracts of *Kitāb mīzān al-ḥikma (Book on the Balance of Wisdom):* An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century,» p. 7.

الرياضيات العربية[٦٠].

أما الموازين غير المتساوية الذراعين فقد قسمها الخازني إلى طرازين هما «القرسطون» وهو ميزان مزود بكفتين أو بكلاليب لتعليق الأوزان، و«القبان» وهو ميزان مزود بكفة وبثقل موازن متحرك على طول الذراع المقابل للكفة. إن النظرية العائدة لهذين الطرازين من الموازين معروضة في الشروحات التي كتبت حول أعمال ثابت بن قرة والإسفزاري والتي أدرجت في كتاب **ميزان الحكمة** للخازني[٦١].

أما عندما يتعلق الأمر باستعمالات الموازين، فإن الخازني يقسم هذين الطرازين إلى عدد من الأنواع. فهو يحدد أولاً أنواع «القبان»: «قسطاس مستقيم» يستخدم للوزنات عالية الدقة، وميزان ـ ساعة فلكي[٦٢]. ثم يصف أنواع «القرسطون» المختلفة، وهي ميزان الصراف الذي يملك «قضيباً» مقسماً إلى مقطعين بنسبة $\frac{١٠}{٧}$ (أي بنسبة الدينار إلى الدرهم)، ثم الميزان الجيوديزي ذو الذراعين المتساويين، وأخيراً مجموعة كبيرة من الموازين المائية (الموازين الهيدروستاتية) المخصصة لوزن عينات معادن ومواد معدنية في الهواء أو في الماء، وذلك بهدف تحديد ثقلها النوعي وتركيب السبائك. ويعير الخازني اهتماماً خاصاً لهذا النوع الأخير من الموازين. فقد خصص جزءاً أساسياً من مؤلفه لطرق وزن المعادن والمواد المعدنية في الماء بهدف تحديد ثقلها النوعي.

ويقسم الخازني الموازين الهيدروستاتية إلى ثلاثة أنواع. النوع الأول هو ميزان اعتيادي بسيط ذو ذراعين متساويين وكفتين. والثاني يملك ثلاث كفات، اثنتان منها معلقتان واحدة تحت الأخرى لكي يتسنى الوزن في الماء. والنوع الثالث يملك خمس كفات، ثلاث منها مربوطة بشكل ثابت إلى طرفي «قضيب» الميزان وفق الطريقة نفسها في الميزان السابق، واثنتان متحركتان على طول «القضيب» لتأمين توازنه. ويقدم الخازني عرضاً مفصلاً لتاريخ تطور الميزان الهيدرولي ولطرق الوزنة على امتداد خمسة عشر قرناً تقريباً، وذلك انطلاقاً من الميزان المائي في العصور القديمة وصولاً إلى نماذجه الخاصة في الموازين، ويقوّم مساهمات جميع رجال العلم، الذين يذكرهم، في نظرية الميزان وفي تطبيق الوزنة.

إن التحسين الذي طرأ على الميزان الهيدروستاتي عائد إلى ظهور كفة ثالثة معدة خصيصاً لوزن العينات في الماء. ووفقاً للخازني، فقد استخدم أسلافه في البلدان الإسلامية

(٦٠) انظر: Rozhanskaya, *Mechanica na Srednevokom Vostoke*, pp. 124-128.

(٦١) Khanikoff, Ibid., pp. 33-51.

(٦٢) المصدر نفسه.

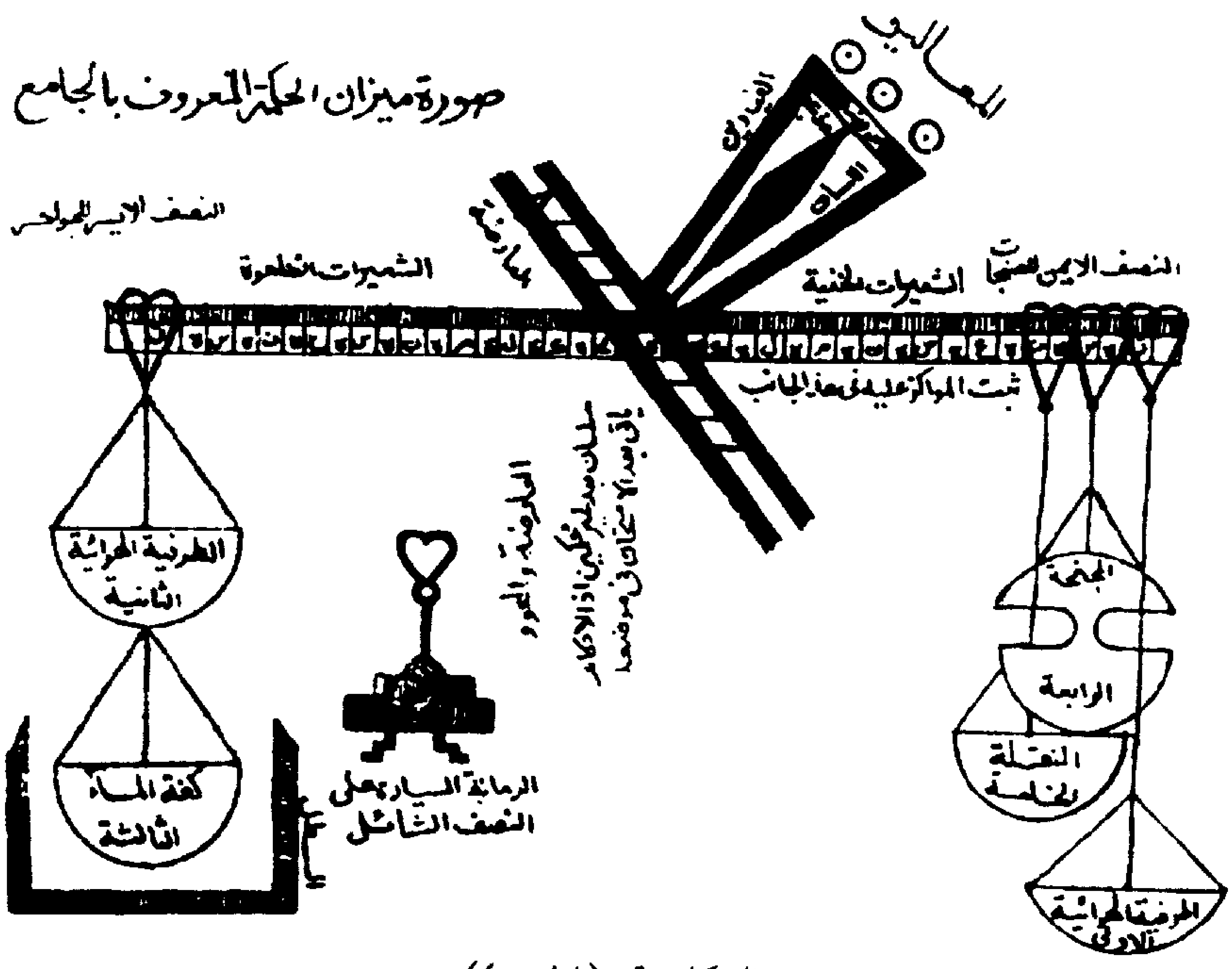
موازين مائية ذات ثلاثة أذرع.

وقد زاد الإسفزاري عدد الكفات إلى خمس، وصنع ميزاناً شامل الاستعمال، أسماه «ميزان الحكمة». وهو في الأساس ميزان ذو ذراعين متساويين ومزود بميناءين وخمس كفات نصف كروية ووزن متحرك ولسان مثبت في وسط «قضيب» الميزان. واللسان يرتكز على قاعدة، ولا يكون ارتكازه بواسطة محور بل من خلال نظام بارع من التعليق الحر، مؤلف من عارضة ومن قطعة بشكل منصّة حاملة، وهذا النظام هو من دون أدنى شك من تصميم الإسفزاري نفسه. إن ميزة نظام التعليق هذا هي في التقليل من تأثير الاحتكاك على دقة «ميزان الحكمة»، كما أن الدقة العالية قد تأمنت أيضاً بانتقاء ملائم لقياسات «القضيب» واللسان ولزاوية انحناء «القضيب» ولدقة اللسان. . .الخ. وقد وصف الخازني الميزان وأجزاءه وعرض طريقة تجميعه والمسائل المطروحة بالنسبة إلى توازنه ودقته على امتداد فصل كامل من كتاب **ميزان الحكمة**. ونذكر أن اثنتين من الكفات الثابتة كانتا مخصصتين للوزن في الهواء، والكفة الثالثة للوزن في الماء. في حين تلعب الكفتان المتحركتان، وكذلك الوزن المتحرك، دور نقالات للوصول بالميزان إلى حالة توازن، قبل التعيير والوزن (انظر الشكل رقم (١٨ ـ ٤) والشكل رقم (١٨ ـ ٥)).

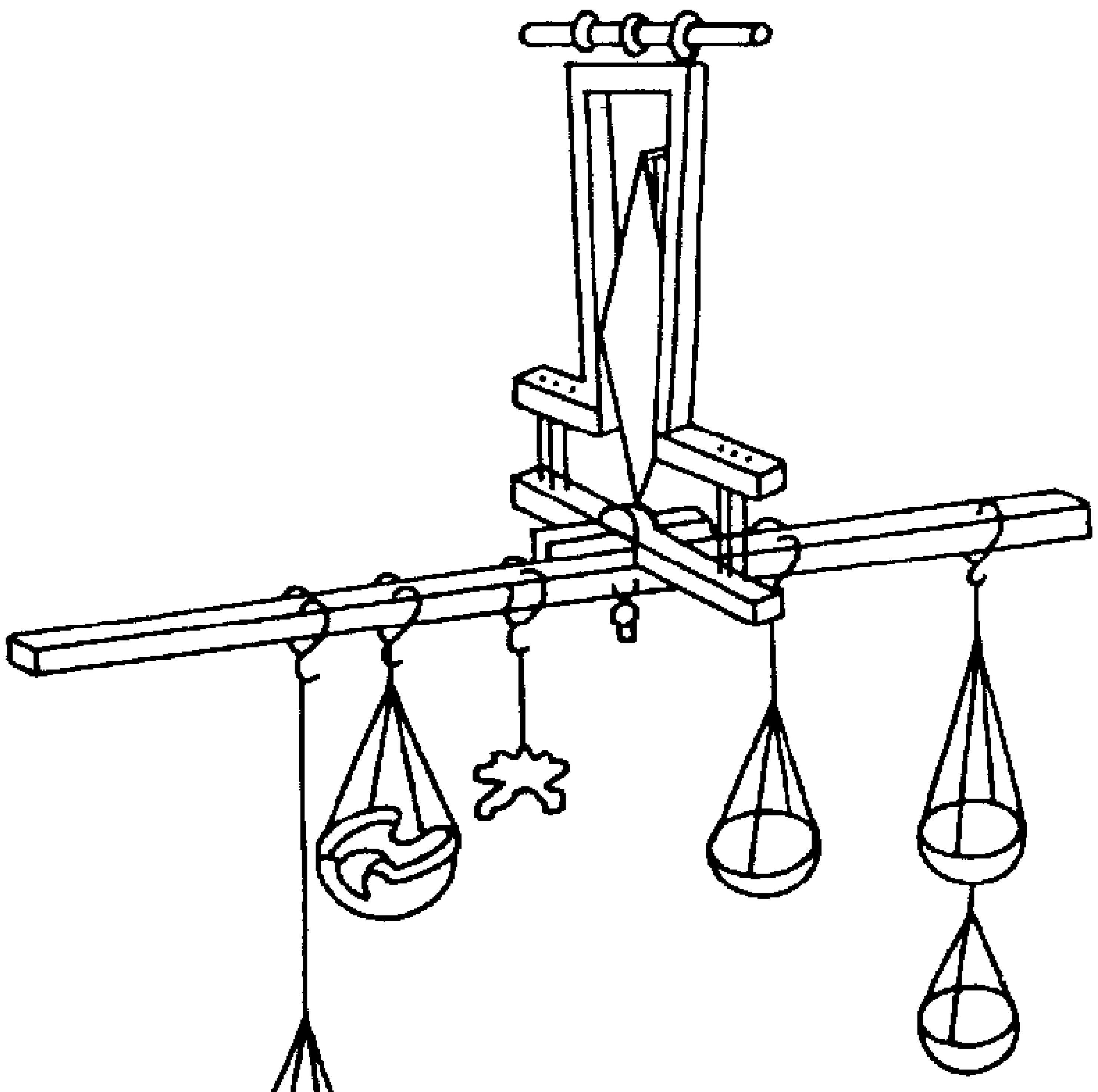
وقد حسّن الخازني فيما بعد «ميزان الحكمة»، إذ طور قاعدته النظرية وطرق التعيير والشروط التجريبية للوزن.

كما وصف الخازني بالتفصيل الطريقة المستخدمة لتحديد «الوزن في الماء» لعينة ما، حيث إن جزءاً أساسياً منها يتمثّل في حساب القوة الرافعة.

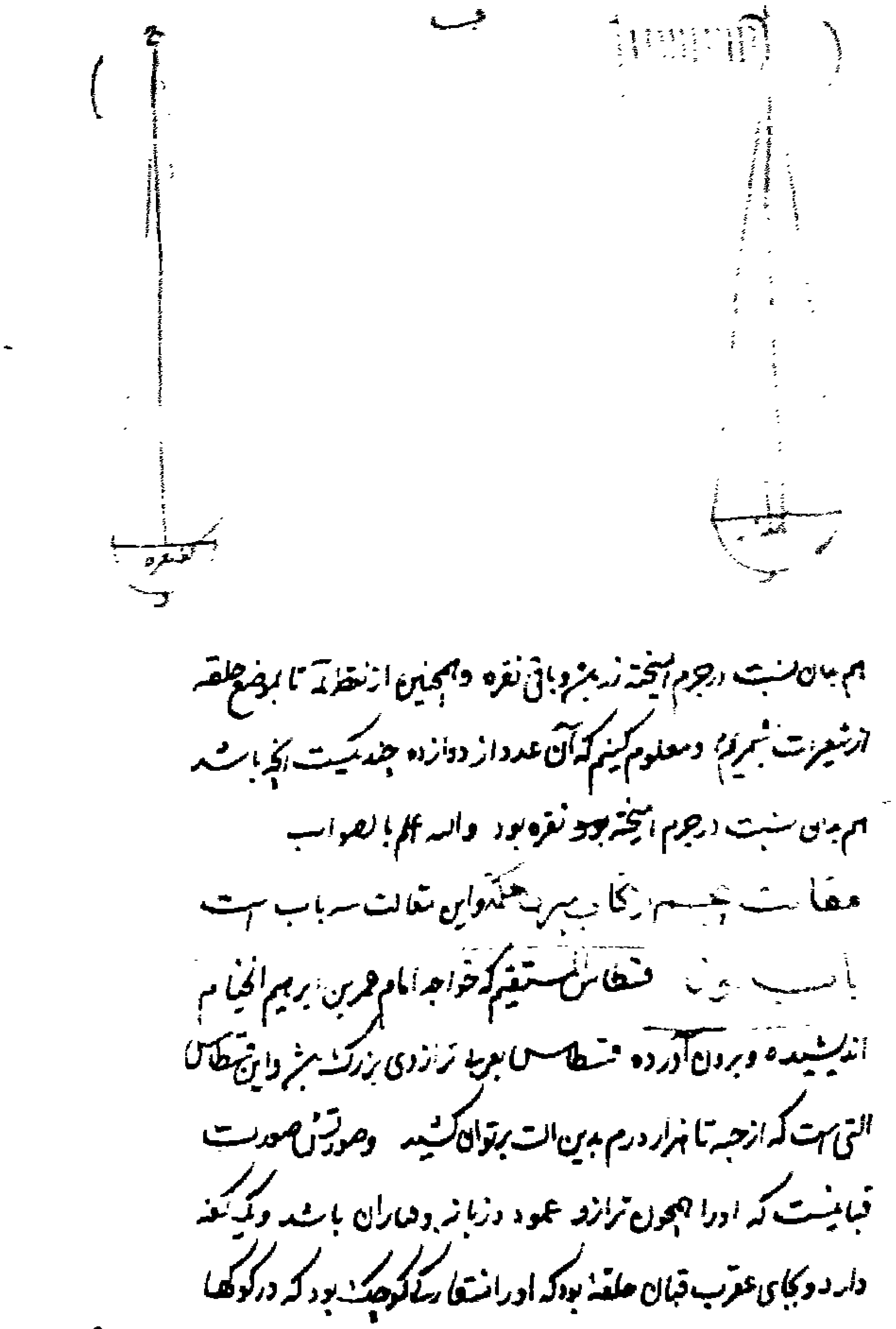
وكان الخازني يجري تعيير «ميزان الحكمة» وفق الطريقة التالية: كان يوازن الميزان مع الكفة الثالثة الثابتة المغمورة في الماء. ثم يضع عند ذلك عيّنة ذات وزن معلوم في الكفة الثابتة من الجهة اليسرى، ويعيد التوازن بوضع أثقال موازنة في الكفة الثابتة من الجهة اليمنى. ثم ينقل العينة إلى كفة الماء، والأثقال الموازنة إلى الكفة المتحركة من الجهة اليمنى. عند ذلك يحقق توازن الميزان بتحريك الكفات غير الثابتة على طول «قضيب» الميزان من كل جهة من المحور، بحيث تستطيع الكفات أن تبقى دائماً على مسافات متساوية من المحور. والنقطة، التي توجد فيها الكفة المتحركة الحاملة للأثقال الموازنة في نهاية العملية، تشكل ما يسمى «مركز» التعليق (لمعدن أو لمادة معدنية)، أي النقطة الموافقة للثقل النوعي للمادة موضوع الوزن.



الشكل رقم (١٨ ـ ٤)



الشكل رقم (١٨ ـ ٥)



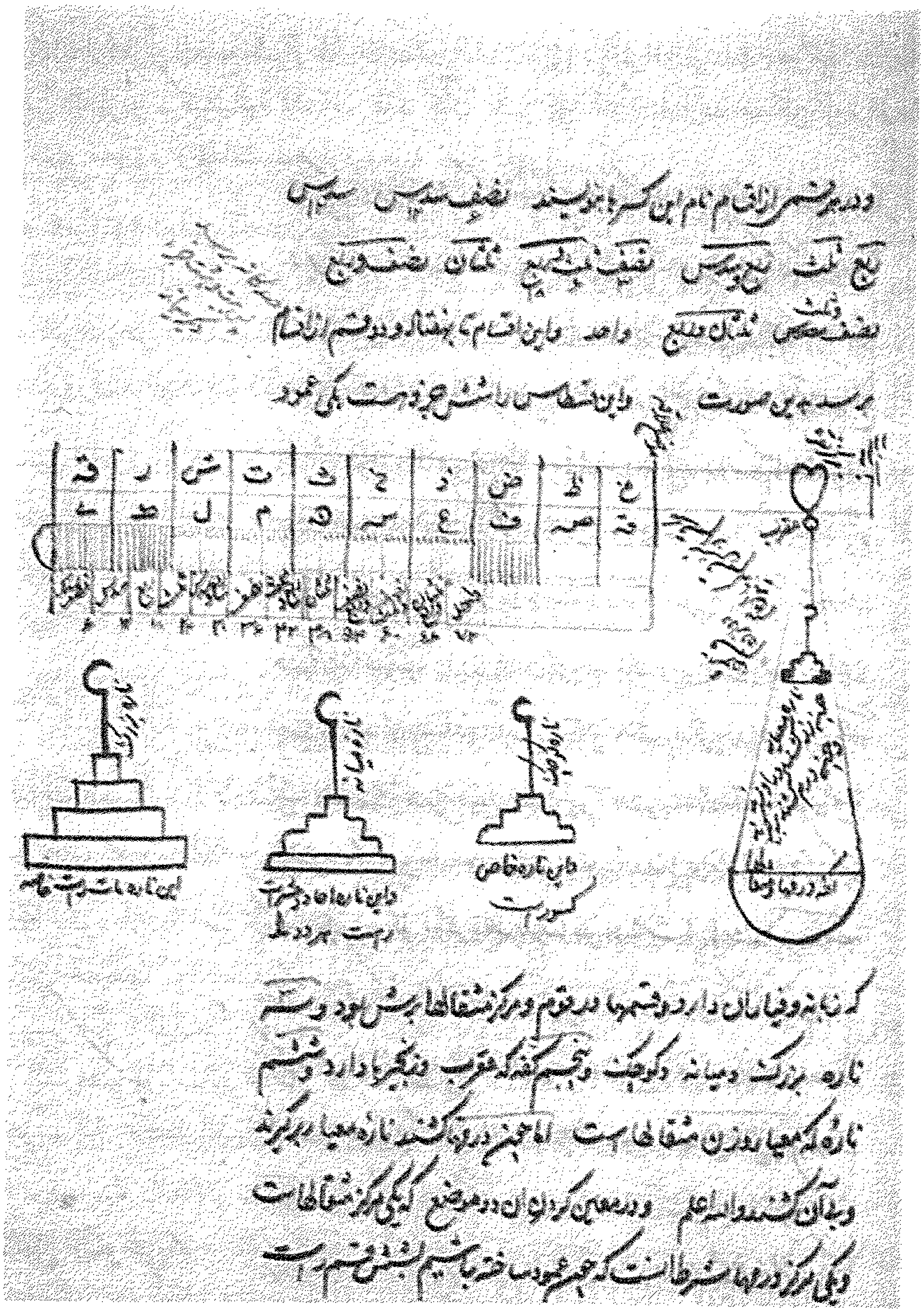
الصورة رقم (١٨ ـ ٤)

الخازني، كتاب ميزان الحكمة (طهران، مخطوطة مجلس شورى، ١٩).

هذا الكتاب يمثل أهمية بالغة. ألفه الخازني سنة ٥١٥ هـ/ ١٢١١م. وهو يراجع فيه كل التراث السابق حول الميزان: من اليونان (أرخميدس، إقليدس، منلاوس) حتى العرب (ثابت بن قرة، البيروني)، ويعمل فيه ميزاناً يفوق كل ما سبقه بدقته.

ويصف الخازني في كتابه هذا بعناية كيفية استعمال هذا الميزان، ولا سيما فيما يتعلق بتحديد الأثقال النوعية.

نرى في هذه الصورة دراسات مختلفة لنقل أماكن ارتباط الكفتين على القضيب، وكذلك أثقالاً ذات قيم مختلفة.



الصورة رقم (١٨ ـ ٥)

الخازني، كتاب ميزان الحكمة (طهران، مخطوطة مجلس شورى، ١٩).
هذا الكتاب يمثل أهمية بالغة. ألفه الخازني سنة ٥١٥ هـ/١٢١١م. وهو يراجع فيه كل التراث السابق حول الميزان: من اليونان (أرخميدس، إقليدس، منلاوس) حتى العرب (ثابت بن قرة، البيروني)، ويعمل فيه ميزاناً يفوق كل ما سبقه بدقته.
ويصف الخازني في كتابه هذا بعناية كيفية استعمال هذا الميزان، ولا سيما فيما يتعلق بتحديد الأثقال النوعية.
نرى في هذه الصورة دراسات مختلفة لنقل أماكن ارتباط الكفتين على القضيب، وكذلك أثقالاً ذات قيم مختلفة.

وكان الخازني يضع شروطاً خاصة بالنسبة إلى نوعية العينات، وكذلك بالنسبة إلى الخصائص الفيزيو ـ كيميائية للماء. فقد كان يشير إلى أن التجارب يمكن إجراؤها فقط مع ماء من منبع معين، وكذلك بحرارة معينة ثابتة للهواء.

إن «مراكز» تعليق المعادن والمواد المعدنية على مدرج ميزان الخازني يمكن تصنيفها وفق ترتيب تنازلي للأثقال النوعية. فالترتيب بالنسبة إلى المعادن هو على الشكل التالي: الذهب، الزئبق، الرصاص، الفضة، البرونز، الحديد، القصدير، وبالنسبة إلى المواد المعدنية: الياقوت الأزرق، الياقوت الأحمر، الزمرد، اللازورد، البلور الصخري، والزجاج.

يشير الخازني بوضوح إلى أن توازن الميزان لا يحصل إلا بشكل واحد. ونتيجة لذلك، فإن الثقل النوعي لمادة ما وتركيب سبيكة ما لا يتحددان إلا بطريقة واحدة. فإذا حصل توازن الميزان في عدة نقاط، فهذا يعني أن العينة هي سبيكة مؤلفة من ثلاثة عناصر أو أكثر. وفي هذه الحالة لا يمكن حل المسألة بطريقة واضحة.

وبالإضافة إلى حساب الثقل النوعي وتركيب السبائك، يمكن استخدام «ميزان الحكمة» للتحقق من أصالة ونقاء المعادن والمواد المعدنية، كما أن له استعمالات أخرى. وكان الميزان الهيدرولي يعتبر الأكمل من بين الموازين التي كانت معروفة في القرنين الميلاديين الثاني عشر والثالث عشر.

كما تعود أهمية «ميزان الحكمة» في تاريخ الموازين والوزنة إلى الاستعمالات العديدة التي يمكن تحقيقها بواسطته. فعندما يكون مزوّداً فقط بكفّتين وبثقل موازن متحرك على الجزء الأيسر من «القضيب»، يمكن استخدامه كـ «قرسطون» أو «قبان»، وكذلك كميزان «لتبديل الدراهم إلى دنانير»، أو كـ «قسطاس مستقيم» دقيق للغاية... فقد كان، إذاً، بشكل جليّ، آلة محكمة الدقة تملك مجموعة من الاستعمالات واسعة الشمول.

٣ ـ الثقل النوعي

إن المعلومات المتوفرة حول المحاولات الأولى لتحديد الثقل النوعي نادرة جداً. وتعود أقدم هذه المحاولات إلى الأسطورة الشهيرة التي تروي أن أرخميدس بيّن تركيب السبيكة التي صنع منها تاج هيارون، طاغية سرقوسة. كما نعلم أن منلاوس الإسكندري قد اشتغل أيضاً بهذه المسألة.

أما فيما يتعلق بالدراسات التي أجريت لتحديد الثقل النوعي في العلم العربي، فإننا نملك، لإبداء الرأي فيها، مصدرين رئيسين هما مؤلف البيروني في الأثقال النوعية[٦٣]

(٦٣) Al-Bīrūnī, «Maqāla fī al-nisab allatī bayna al-filizzāt wa al-jawāhir fī al-hajm (Le Livre sur la relation existant entre les volumes des métaux et ceux des pierres précieuses)».

وكتاب **ميزان الحكمة** الذي ذكرناه غير مرة. ويبدو مفيداً أن نشير إلى أن الخازني استعاد مؤلف البيروني بكامله تقريباً وأدرجه كنتاج له(٦٤).

إننا نعرف بفضل البيروني والخازني بعض الدراسات التي أجراها رجال علم في البلدان العربية، وهم: سند بن علي (القرن التاسع للميلاد) ويوحنا بن يوسف (القرن العاشر للميلاد) اللذان ينتميان إلى مدرسة بغداد؛ وأبو الفضل البخاري (القرن العاشر للميلاد) الذي اعتبره البيروني سلفه المباشر؛ والنيريزي (القرن العاشر للميلاد)، والرازي (القرنان العاشر والحادي عشر للميلاد)، وعمر الخيام (القرنان الحادي عشر والثاني عشر للميلاد)، وغيرهم.

إلا أنه يجب التشديد على أن الثقل النوعي، بصفته نسبة وزن جسم إلى حجمه، لم يكن تقريباً معرّفاً بدقة لا في العصور القديمة ولا من قبل أسلاف الخازني في الأقطار العربية. فجميع هؤلاء الأسلاف، الذين ذكرهم الخازني والذين أشار إليهم البيروني في مقدمة مؤلفه، قد استخدموا في الواقع مفهوم الثقل النوعي بشكل ضمني من دون أن يصوغوه بوضوح. وأول تعريف دقيق لهذا المفهوم يعود إلى الخازني الذي يذكر أن «نسبة ثقل جسم صغير إلى حجمه تماثل نسبة ثقل جسم أكبر [من المادة عينها] إلى حجمه»(٦٥).

ولتحديد الثقل النوعي لعينة ما، يجب معرفة وزنها في الهواء وفي الماء، ومعرفة حجم وزن الماء المزاح عند تغطيس العينة فيه. ولهذا السبب، لعبت الموازين الهيدرولية دوراً مهماً في مثل هذه التجارب، حيث استخدمتها أغلبية الباحثين. وتوخياً لدقة أكبر، صمّم البيروني نفسه آلة بارعة لتحديد حجم السائل المزاح. فقد استعمل وعاءً مخروطياً لتحديد الأثقال النوعية، بواسطة حساب نسبة وزن الماء المزاح إلى وزن المادة المحدد في الهواء.

وبعد الحصول على هذه المعطيات، يصبح من السهل حساب الثقل النوعي لجسم ما بعملية رياضية بسيطة. وقد أجرى البيروني سلسلة من القياسات للأثقال النوعية. فقد أخذ عينات من المعادن والمواد المعدنية تملك وزناً واحداً (مقداره مئة مثقال، والمثقال يساوي ٤,٤٢٤ غراماً) أو حجماً واحداً (وهو الحجم الذي يشغله مئة مثقال من الذهب). ثم لخص النتائج التي حصل عليها في عدد من الجداول، فعرض في جدول وزن الماء المزاح بسبب عينات من المعادن والمواد المعدنية لها نفس الوزن في الهواء، كما عرض في جدول آخر أحجام عينات لها نفس الوزن في الماء... الخ. ويمكن إيجاد الثقل النوعي حسابياً انطلاقاً من هذه الجداول. ونشير إلى أن البيروني لم يأخذ الماء كمادة إسناد، كما نفعل حالياً، بل المعدن الأثقل، أي الذهب بالنسبة إلى المعادن، والمادة المعدنية الأثقل، أي الياقوت الأزرق بالنسبة إلى المواد المعدنية.

---

(٦٤) Khanikoff, Ibid., pp. 55-78.

(٦٥) المصدر نفسه، ص ٨٦.

إن نتائج البيروني هي قريبة إلى حد ما من المعطيات الحالية. ويمكن تفسير بعض الفروق بالنقص في نقاوة العينات وباختلاف الحرارة أثناء التجارب (لقد أهمل البيروني حرارة الماء).

إن النتائج التي عرضها البيروني يمكن إعادة حسابها بسهولة بالانتقال من مادتي الإسناد اللتين اعتمدهما، أي الذهب والياقوت الأزرق، إلى الماء. ويكفينا، للوصول إلى هذا الغرض، أن نضرب عدد البيروني في نسبة الثقل النوعي لمادة الإسناد إلى وزن المادة (والنسبة هي ٣,٩٦ للياقوت الأزرق و١٩,٠٥ للذهب)، ثم نقسم حاصل الضرب على مئة (لأن وزن العينة هو مئة مثقال).

وقد حدد البيروني أيضاً الثقل النوعي لبعض السوائل، وكذلك الفروقات بين الأثقال النوعية للماء البارد والحار والمالح والعذب. كما لفت الانتباه إلى وجود علاقة معينة بين الكثافة والثقل النوعي للماء. وقد استعمل بلا شك لهذه التجارب آلة مزودة بكفة خاصة للسوائل، من طراز مقياس كثافة الهواء، الذي وصفه الخازني. فالبيروني كان في تاريخ العلم أول من أدخل عمليات تحقيق في الممارسات التجريبية.

لقد كرس عمر الخيام لمسألة تحديد الثقل النوعي مؤلفاً خاصاً هو **ميزان الحِكَم**. وقد أُدرج هذا المؤلف بكامله في كتاب الخازني(٦٦). استخدم الخيام العلاقات الموجودة بين وزني الهواء والماء كنقطة انطلاق. واقترح طريقتي حساب لتحديد الثقل النوعي، فالأولى يستخدم فيها نظرية النسب، أما الطريقة الثانية فهي جبرية واسمها «الجبر والمقابلة»، وهي تؤدي إلى الطرق العمومية الحديثة في حل المعادلات الخطية. ويحدد الخيام الثقل النوعي انطلاقاً من نسبة وزن مادة ما في الهواء إلى وزنها في الماء. لنفرض أن P، P_1، P_2 وQ، Q_1، Q_2 هي أوزان سبيكة وعنصريها، على التوالي في الهواء وفي الماء، ولنفرض أن d، d_1، d_2 هي الأثقال النوعية الموافقة، عندها نستطيع أن نقارن النسب P/Q وP_1/Q_1 وP_2/Q_2 زوجين زوجين، وهي معادلة لنسب الأثقال النوعية:

$$\frac{d}{d - d_{eau}} \text{ و } \frac{d_1}{d_1 - d_{eau}} \text{ و } \frac{d_2}{d_2 - d_{eau}} .$$

ويصور الخيام التناسبات التي حصل عليها، بواسطة رسم بياني هندسي، حيث تتمثل القيم العددية بمقاطع ذات أطوال مختلفة.

وهناك مساهمة أساسية في النظرية والتطبيق لتحديد الثقل النوعي قدمها الخازني الذي خصص لهذه المسألة قسماً مهماً من كتاب **ميزان الحكمة**. فبعد أن وصف بالتفصيل الطرق

(٦٦) المصدر نفسه، ص ٨٧ ـ ٩٢.

التي استخدمها سلفاه (البيروني والخيام)، عرض الخازني طريقته الخاصة المبنية على استخدام ميزان الحكمة وجداول البيروني. فقد أجرى وزنات بواسطة «ميزان الحكمة»، وحصل على أوزان العينات (على سبيل المثال عينات ذهب وفضة وسبائكهما) في الماء وفي الهواء، ثم استخدمها لتحديد الأوزان النوعية للمواد بالطرق الثلاث التالية:

أ ـ بواسطة الحساب، مستعملاً النظرية الإقليدسية للنسب، وجامعاً للتناسبات الموافقة؛

ب ـ بواسطة الهندسة؛

ج ـ بواسطة «الجبر والمقابلة»، أي بحل معادلات جبرية من الدرجة الأولى.

كما أشرنا سابقاً، إذا كانت P، P_1، P_2 وQ، Q_1، Q_2 ترمز إلى أوزان سبيكة وعنصريها في الماء والهواء؛ و F، F_1، F_2 ترمز إلى القوى الأرخميدسية للسبيكة وعنصريها، وC ترمز إلى قيمة جزء من المدرّج؛ و m، m_1، m_2 ترمز إلى عدد أجزاء المدرج بالنسبة إلى السبيكة وعنصريها، في هذه الحالة يمكن كتابة طريقة الخازني الحسابية وفق القاعدة التالية:

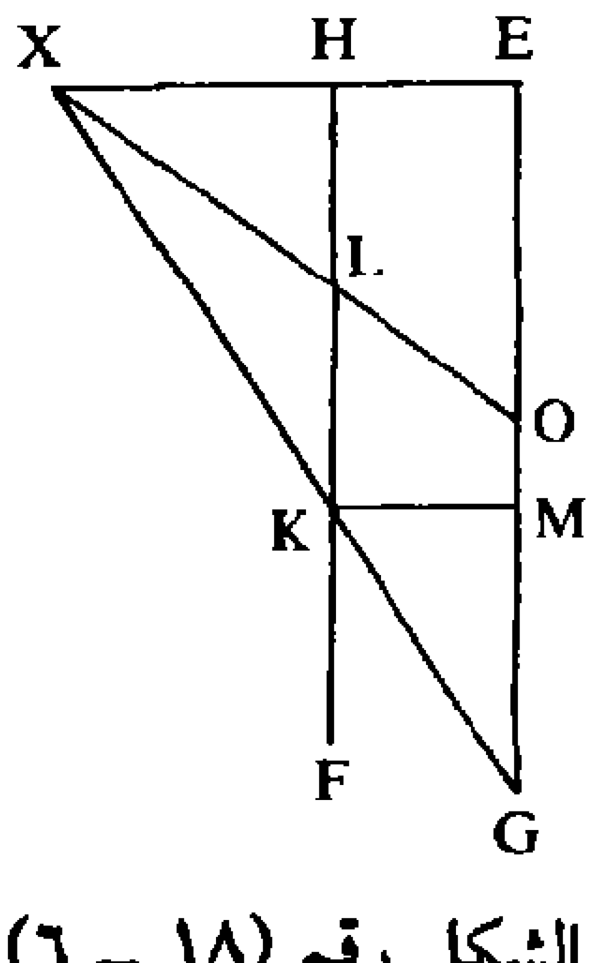
$$x = \frac{P(Q_2 - Q)}{Q_2 - Q_1} = \frac{P(m_2 - m)}{m_2 - m_1}$$

حيث:

$$F = P - Q = cm \text{ و } F_1 = P_1 - Q_1 = cm_1 \text{ و } F_2 = P_2 - Q_2 = cm_2$$

و x هي وزن أحد عنصري السبيكة.

هناك طريقة أخرى تتبع الطريقة الأولى، لكنها هندسية. يرسم الخازني خطين مستقيمين متوازيين EG وHF. ويضع عليهما وفق مقياس مدرج معين المقاطع التالية: $EG = P$ الذي يمثل وزن السبيكة في الهواء، $LF = Q$ الذي يمثل وزنها في الماء، $HF = \xi_1 = PQ_1/P_1$ الذي يمثل الوزن في الماء لكمية الذهب الموجودة في السبيكة، $KF = \xi_2 = PQ_2/P_2$ الذي يمثل الوزن في الماء لكمية الفضة الموجودة في السبيكة (انظر الشكل رقم (١٨ ـ ٦)). ثم يرسم المستقيمين EH وGK ويمدهما حتى التقائهما في النقطة X. فهما يتقاطعان حتماً، ويمكن إثبات هذا الأمر بسهولة.



الشكل رقم (١٨ ـ ٦)

ثم يرسم الخازني المقطع KM بشكل موازٍ للمستقيم HE. فيحصل على متوازي الأضلاع $MEHK$، حيث يكون مجموع الزاويتين GEH وEMK مساوياً لزاويتين قائمتين، وتكون الزاوية EXK حادة. وبما أن EMK هي زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث MGK، فإن الزاوية EGX هي أيضاً حادة.

ويرسم الخازني بعد ذلك المستقيم XL وفق زاوية معينة بينه وبين المستقيم XHE. ويقطع XL المقطع EG في النقطة O. وفي الحالة العامة، تقسم هذه النقطة المقطع EG إلى قسمين غير متساويين. وقد تم اختيار النقطة L بحيث يكون $LF = Q$. فإذا مر XO فوق المستقيم EMG تكون العينة من الذهب الخالص، وإذا مر تحت المستقيم XKG تكون العينة من الفضة الخالصة، وإذا قطع المستقيم XHE تكون العينة مزيجاً من هذين المعدنين. فالمقطعان EO وEG هما متناسبان مع نسبة تركيز هذين المعدنين في السبيكة موضوع الدرس.

إن الخازني، من بين المؤلفين الذين نعرفهم، هو الثاني الذي استخدم الطريقة الهندسية. أما الأول، كما ذكرنا، فهو الخيام. غير أننا نستطيع اعتبار طريقة الخيام كتصوير هندسي صرف لتقنية حسابية، في حين أن الخازني اقترح طريقة هندسية مفصلة ومبرهنة بدقة لحل مسائل المزيج. ويمكن اعتبار رسمه البياني كنموذج أولي للمخططات البيانية.

أما الطريقة الثالثة التي اقترحها الخازني فهي جبرية. وسنعرضها مستخدمين الرموز التي ذكرناها سابقاً. فالمعادلة التي صاغها الخازني بالكلمات يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$Q = x\frac{Q_1}{P_1} + (P - x)\frac{Q_2}{P_2}$$

حيث $\frac{Q_1}{P_1}$ و $\frac{Q_2}{P_2}$ هما الكسران اللذان يمثلان وزني عنصري السبيكة، وx هو وزن أحدهما المطلوب إيجاده. وإذا استخدمنا الطرق التي يفرضها «الجبر والمقابلة»، بإمكاننا تحويل هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$x\left(\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_2}\right) = P\left(\frac{Q}{P} - \frac{Q_2}{P_2}\right)$$

وبذلك نحصل على:

$$x = \frac{P\left(\frac{Q}{P} - \frac{Q_2}{P_2}\right)}{\frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_2}}$$

أو:

$$x = P\frac{Q - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}$$

أي أن الحل الجبري يعطي نفس النتائج التي حصلنا عليها حسابياً وهندسياً.

خلاصة

لقد استعرضنا سيرورة إنشاء الأسس النظرية والطرق التطبيقية لعلم السكون العربي.

إن هذه السيرورة لم تقتصر على الترجمة وكتابة الشروحات وعلى تجميع واقتباس أعمال العصور القديمة. فقد أجريت أولاً تحسينات على الطرق العائدة لأرخميدس ولمؤلف **المسائل الميكانيكية**، وجرى التعمق فيها بين القرنين التاسع والخامس عشر. ثم تم تطوير الجانب الدينامي لنظرية أرسطو خلال هذه الحقبة نفسها.

لقد أوصل رجال العلم العرب علم السكون إلى مستوى أعلى باستعمالهم مجموعة من الطرق الرياضية (ليس فقط تلك الموروثة عن النظرية القديمة للتناسبات وللتقنيات اللامتناهية في الصغر، بل استخدموا أيضاً من ضمن هذه المجموعة طرق الجبر وتقنيات الحساب الدقيقة التي كانت معروفة في عصرهم). فقد تعممت نتائج أرخميدس الكلاسيكية في نظرية مركز الثقل، وطبقت على أجسام ثلاثية الأبعاد. كما تأسست نظرية الرافعة الوازنة، ونشأ «علم الجاذبية» قبل أن يخضع لاحقاً لتطورات جديدة في أوروبا في القرون الوسطى. ودُرست ظاهرات علم السكون باستعمال مقاربة دينامية، بحيث أصبحت هاتان المادتان العلميتان، أي الديناميكا وعلم السكون، موحدتين في علم واحد هو علم الميكانيك.

كما أن اندماج المقاربة الدينامية مع علم الهيدروستاتيكا قد أنشأ تياراً علمياً يمكن تسميته بالهيدروديناميكا في القرون الوسطى.

لقد شكل علم السكون الأرخميدسي قاعدة ارتكزت عليها أسس علم الأثقال النوعية للأجسام. فقد تم تطوير طرق عديدة ودقيقة في الحساب، بهدف تحديد الأثقال النوعية للأجسام، وهي طرق استندت بخاصة إلى نظرية الميزان والوزنة. وأخيراً يمكن اعتبار أعمال البيروني والخازني الكلاسيكية، وعن حق، بداية تطبيق الطرق التجريبية في العلم في القرون الوسطى.

لقد كان علم السكون العربي حلقة أساسية في تطور العلم العالمي. فقد لعب دوراً مهماً في نشوء علم الميكانيك الكلاسيكي في أوروبا في القرون الوسطى. فلولاه ربما لم يكن باستطاعة علم الميكانيك الكلاسيكي أن يتأسس.

ـ ١٩ ـ

علم المناظر الهندسية(*)

رشدي راشد

مقدمة

علم المناظر العربي هو وريث علم المناظر الهلينستي، وبإمكاننا اعتبار هذا الأخير مصدره الوحيد. فقد أورثه مواضيعه ومفاهيمه ونتائجه والمدارس المختلفة التي تقاسمته خلال العصر الإسكندري. وهذا يعني أن العلماء العرب الأوائل الذين اشتغلوا بهذا العلم قد تتلمذوا في مدرسة المؤلفين الهلينستيين أمثال إقليدس وهيرون وبطلميوس وثيون وغيرهم، وعلى هؤلاء فقط. لذلك نرى أن علم المناظر يتميز عن بقية قطاعات العلوم الرياضية العربية، كعلم الفلك مثلاً، لكونه لم يتلقَّ أي إرث غير هلينستي، مهما كان ضئيلاً، من شأنه أن يؤثر ولو قليلاً في تطور هذا العلم.

لكن هذه التبعية القوية لم تحلْ دون بروز مبكر نسبياً لبحث مبدع خلاق. وفعلاً أصبحت سيرة هذا العلم، بعد النقل المكثف للكتابات اليونانية، وبسرعة كبيرة، سيرة تصحيح لهذه الكتابات، وتجميع لنتائج جديدة، وتجديد لفصوله الرئيسة. وقد كان انقضاء قرنين من الزمن كافياً لتحضير ثورة حقيقية طبعت بطابعها، وبشكل دائم، تاريخ علم المناظر، بل أيضاً وبشكل أعم تاريخ علم الفيزياء. وإننا سندرس هذه الحركة الجدلية القائمة بين التواصل الوثيق والانفصال العميق، لكي نفهم مسار علم المناظر العربي بين القرنين التاسع والسادس عشر.

لنعد إلى القرن التاسع، وبالتحديد إلى منتصفه، حيث سارت الترجمات العربية

(*) قام بترجمة هذا الفصل شكر الله الشالوحي.

للنصوص اليونانية جنباً إلى جنب مع الأبحاث الأولى المكتوبة بالعربية مباشرة في علم المناظر. لم يكن هذا التزامن بين الترجمة والبحث، والذي لم يُشَر إليه بشكل كافٍ، وقفاً على علم المناظر فحسب، بل تعداه إلى سائر المواد الرياضية إن لم يكن إلى الإرث القديم برمته. إن هذا التزامن هو بالنسبة إلينا أمر رئيس إذا أردنا فهم طبيعة حركة هذه الترجمة والإعداد لعلم المناظر. ولم تكن الترجمة أبداً عملية نقل فقط، بل بالعكس من ذلك، فإنها تبدو مرتبطة بالبحث الأكثر تقدماً في ذلك العصر. وحتى وإن لم تصلنا أسماء مترجمي الكتابات البصرية والتواريخ الدقيقة لترجمتها، لكننا نعلم بالمقابل أن أعمال الترجمة هذه قد تمت، في معظمها، خلال النصف الأول من القرن التاسع. فشهادات المترجمين والعلماء أمثال قسطا ابن لوقا وحنين بن إسحق، والعلماء الفلاسفة مثل الكندي، وجميعهم من القرن التاسع المذكور، بالإضافة إلى شهادات المفهرسين القدامى مثل ابن النديم، لا تسمح لنا بالرجوع بشكل أكيد وفعال إلى أبعد من هذا القرن وذلك فيما يتعلق بمجمل الكتابات في علم المناظر، باستثناء بعض الآثار التي ترتبط حصراً بطب العيون[1]. لكن قراءة لعلماء ذلك القرن كابن لوقا أو الكندي تكشف لنا اطلاعهم على الترجمة العربية لـ **مناظر** إقليدس ولتلك التي كتبها أنتيميوس الترالي بالإضافة إلى آخرين[2]. وتغطي هذه الترجمات مجمل ميادين علم المناظر الهلينستية:

أ ـ البصريات بالمعنى الحقيقي، أي الدراسة الهندسية للمنظور، وكذلك للخداعات البصرية المرتبطة به.

ب ـ علم انعكاس الضوء، أي الدراسة الهندسية لانعكاس الأشعة البصرية على المرايا.

ج ـ المرايا المحرقة، أي دراسة الانعكاس المتقارب للأشعة الشمسية على المرايا.

د ـ ظواهر الجو مثل الهالة وقوس قزح.

هذه هي بالتحديد فصول علم المناظر كما أحصاها الفارابي فيما بعد في كتابه **إحصاء العلوم**[3]. ومن ناحية أولى، يجب أن نضيف إلى هذه الفصول الهندسية العروض المتعلقة

---

(١) المقصود مثلاً كتابة جبرائيل بن بختيشوع (متوفى سنة ٨٢٨) حول العين، والتي لم تصلنا، أو تلك التي لابن ماسويه دغل العين والتي حُفظت.

(٢) حول الترجمة العربية لأنتيميوس الترالّي، انظر: Roshdi Rashed, «De Constantinople à Bagdad: Anthémius de Tralles et al-Kindī,» papier présenté à: *Actes du colloque sur la Syrie de byzance à l'Islam (Lym, 11-15 septembre 90)* (Damas: Institut français d'études arabes de Damas, 1991).

(٣) أبو نصر محمد بن محمد الفارابي، **إحصاء العلوم**، حققها وقدم لها عثمان أمين، ط ٣ (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦٨)، ص ٩٨ ـ ١٠٢.

بنظرية الرؤية والتي وجهت أعمال الأطباء المرتبطة بطب العيون وكذلك مؤلفات الفلاسفة، ومن ناحية ثانية، يجب أن نضيف تأملات هؤلاء الفلاسفة أيضاً حول نظريات علم المناظر الفيزيائي، كالألوان مثلاً.

وهكذا فإن عالِماً يعيش في منتصف القرن العاشر كان يستطيع الاطلاع على ترجمة كتاب **المناظر** لإقليدس وعلى الجزء الأكبر من كتاب **المناظر** المنسوب لبطلميوس(٤). كما كان بإمكانه الاطلاع بشكل غير مباشر، إلى حد ما، على كتاب **الانعكاس** المنسوب زعماً لإقليدس، وعلى بعض كتابات مدرسة هيرون الإسكندري. كذلك كان هذا العالِم يعرف، تقريباً، مجمل الكتابات اليونانية التي تعالج موضوع المرايا المحرقة، (البعض منها لم يسلم إلا في ترجمته العربية). كما ترجمت إلى العربية، إضافة إلى مجموعة منتخبات من كتاب ديوقليس، كتابات لأنتيميوس الترالي، ولآخر يدعى ديديم (Didyme)، ولمؤلف يوناني نجهل هويته ويشار إليه باسم «دترومس» (Dtrums)(٥). ويستطيع هذا العالِم، أيضاً، قراءة كتاب **الآثار العلوية** لأرسطو(٦) في ترجمته العربية وبعض الشروحات حول هذا الكتاب، كشرح أولمبيودور (Olympiodore)(٧). كما كان على علم، على الأقل من حيث المضمون، بأعمال جالينوس المتعلقة بتشريح وفيزيولوجيا العين(٨). وأخيراً، كانت في متناول

---

(٤) تبين دراسة أعمال قسطا بن لوقا وأبي إسحق الكندي، وكلاهما من القرن التاسع، أنهما كانا مطلعين على مناظر إقليدس، وعلى إحدى ترجمات **الانعكاس** المزعوم لإقليدس. لكننا لا نعلم حتى الآن وبشكل محدد متى ترجمت المناظر المنسوبة إلى بطلميوس إلى العربية. وأول شهادة حقيقية عن وجود هذه الترجمة تعود لابن سهل وهي متأخرة نسبياً، في الربع الأخير من القرن العاشر. انظر: Roshdi Rashed, *Dioptrique et géométrie au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris: Les Belles lettres, 1991).

(٥) حول هذه الأعمال عن المرايا المحرقة، انظر: Roshdi Rashed, *Dioclès, Anthémius de Tralles, Didyme, et al.: Sur les miroirs ardents*, collection G. Budé (sous presse).

(٦) انظر الترجمة العربية في: أبو الحسين يحيى بن الحسن بن البطريق، **في السماء والآثار العلوية**، تعريب كتاب أرسطوطاليس *Météorologiques*، نشره عبد الرحمن بدوي (القاهرة: [د.ن.]، ١٩٦١)؛ هنالك طبعة أخرى لهذا النص، انظر: Aristoteles, *The Arabic Version of Aristotle's Meteorology*, english translation by C. Petraitis, a critical edition with an introduction and greek - arabic glossaries, université Saint Joseph, institut de lettres orientales de Beyrouth, recherches, série 1: Pensée arabe et musulmane; t. 39 (Beyrouth: Dar El-Machreq, 1967).

(٧) انظر نص اسكندر الأفروديسي، في: ʻAbd al-Rahman Badawī, *Commentaires sur Aristote perdus en grec et autres épîtres*, institut de lettres orientales de Beyrouth, recherches, t. 1, nouv. série langue arabe et pensée islamique (Beyrouth: Dar El-Machreq, 1968), pp. 26 et sqq., وانظر نص أولمبيودور ص ١٤٤ وما بعدها.

(٨) انظر: Ḥunayn Ibn-Isḥāq, *Kitāb al-ʻashar maqālāt fī al-ʻayn al-mansūb li-Ḥunayn Ibn Isḥāq: The Book of the Ten Treatises on the Eye, Ascribed to Ḥunain Ibn Isḥāq (809-877 A.D.)*, =

يده مؤلفات الفلاسفة التي تعالج مواضيع أخرى في علم المناظر الفيزيائي كتلك التي كتبها إسكندر الأفروديسي في الألوان(٩).

لم يكن الدافع لهذه الحركة المكثفة في ترجمة النصوص البصرية مرتبطاً بالاهتمامات العلمية والفلسفية فقط، كما حاول البعض أن يتصور ذلك، بل أيضاً بالتطبيقات المرتقبة.

فلقد شجع الخلفاء والأمراء البحث في ما صوره العلماء لهم كسلاح مخيف كان قد استخدمه أرخميدس لكي يقهر أسطول مرسالوس، وذلك السلاح هو المرايا المحرقة(١٠). وكان البحث في الانعكاس يستعاد دائماً بهدف إثارة إعجاب هؤلاء الأمراء وتسليتهم(١١). ونشير إلى أن هذين النوعين من التطبيقات لم يكونا جديدين، فقد أشير إليهما في العصور القديمة(١٢).

ولنذكّر الآن بالكتابات العربية الأولى، التي كانت، كما ذكرنا، معاصرة لهذه الترجمات. فقد كتبت في البداية أعمال تتعلق بطب العيون حيث حُرر بعضها قبل ظهور أي إسهام في بقية فصول علم المناظر. وترجع أولى هذه الكتابات حول العين إلى القرن الثامن؛ وقد توسعت هذه الكتابات مع ابن ماسويه، وبخاصة مع حنين بن إسحق وقسطا بن لوقا وثابت بن قرة. وسنتفحص لاحقاً مساهمة هذه المدرسة الطبية في علم المناظر الفيزيولوجي. ولنستعرض الآن الفصول الأخرى لعلم المناظر.

حسب المفهرسين القدامى، قاد عالمان عاشا في العصر نفسه البحث في علم المناظر وهما قسطا بن لوقا وأبو إسحق الكندي. وقد نسبت إلى الأول مقالة وحيدة، مخصصة للمرايا المحرقة، ولا يتعلق الأمر بترجمة لمؤلّف يوناني بل بتأليف عائد لهذا العالِم والمترجم المشهور حسب ما أشار إليه مفهرس القرن العاشر ابن النديم. وإن كانت هذه المقالة قد وجدت، فإنها لم تصل إلينا، في حين وصلت إلينا مقالة أخرى للمؤلف نفسه لم يأتِ على

= edited and translated by Max Meyerhof (Cairo: Government Press, 1928), and Max Meyerhof et Paul Sbath, eds., *Le Livre des questions sur l'œil de Honaïn Ibn Ishāq* (Le Caire: Imprimerie de l'institut français d'archeologie orientale, 1938).

(٩) انظر: Helmut Gätje, *Die Arabische Übersetzung der Schrift des Alexander von Aphrodisias über die Farbe* (Göttingen: [n. pb.], 1967).

(١٠) انظر مراسلة قسطا بن لوقا، في: Samīr Khalīl, «Une correspondance islamo-chrétienne entre Ibn al-Munajjim, Ḥunayn Ibn Ishāq et Qusṭā Ibn Lūqā,» dans: F. Graffin, *Patrologia Orientalis* (Belgique: Brepols, 1981), vol. 40, fasc. 4, 185, p. 156.

(١١) مقالة ابن لوقا، **كتاب في علل ما يعرض في المرايا المحرقة من اختلاف المناظر**، وكان قد ألّفها للأمير العباسي أحمد، ابن الخليفة المعتصم الذي حكم خلال الفترة ٨٣٣ ـ ٨٤٢.

(١٢) انظر مقدمة المؤلف المنسوب إلى ديوقليس، هامش رقم (٥).

ذكرها المفهرسون[١٣].

وترتبط باسم الكندي أربعة مؤلفات في علم المناظر والانعكاس، وثلاثة مؤلفات تعالج المرايا المحرقة وطرق إنشائها، وثلاثة أخرى في علم المناظر الفيزيائي[١٤]، وفي هذا التعداد نتساءل: هل هناك إحصاء صحيح أم مجرد ازدواجية في العناوين؟[١٥]. إننا لا نستطيع الإجابة الدقيقة عن هذا التساؤل. وكل ما نعلم هو أنه لم يبقَ من المجموعة الأولى سوى الترجمة اللاتينية لواحد من كتب الكندي في علم المناظر، وهو معروف تحت عنوان *Liber de causis diversitatum aspectus* [ومشار إليه بـ *De aspectibus*][١٦]؛ أما من المجموعة الثانية فإنه لم يصل إلينا سوى مؤلف مهم واحد يعالج المرايا المحرقة[١٧]؛ وأخيراً وصلنا مؤلفان من المجموعة الثالثة. ومهما يكن من أمر، فإننا نشهد مع قسطا بن لوقا، ولا سيما مع الكندي، بزوغ فجر البحث البصري والانعكاسي عند العرب.

أولاً: بدايات علم المناظر العربي: ابن لوقا، والكندي وخلفاؤهما

إن الترجمة العربية لـ **مناظر** إقليدس بالإضافة إلى نقل جزء على الأقل من مضمون كتاب **الانعكاس** المزعوم لإقليدس، شكلا منطلقاً لكتابات عديدة ذات دوافع وأهداف مختلفة: فهناك تطبيقات جديدة وأعمال جديدة يجري فيها التحسين وحتى التصحيح لبعض النقاط في **مناظر** إقليدس. ولكن أضيفت إلى المدرسة الإقليدسية هذه ثلاث أخريات في القرن التاسع وهي: مدرسة هيرون الإسكندري، التي يبدو أنها عُرفت بشكل مبكر نسبياً، ومدرسة الانعكاسيين الذين اهتموا بالمرايا المحرقة، ومدرسة الفلاسفة ولا سيما أرسطوطاليس. وتبدو تعددية المصادر هذه في أساس المشروع الأول لعلماء القرن التاسع. إلا أن أحد الخطوط الرئيسة لهذا المشروع هو بالتحديد إصلاح كتاب المناظر لإقليدس.

---

(١٣) المقصود هو «كتاب علل ما يعرض في المرايا المحرقة من اختلاف المناظر».

(١٤) Muhammad Ibn Ishāq Ibn al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist,* mit Anmerkungen hrsg. von Gustav Flügel; nach dessen Tode von Johannes Roediger und August Mueller, 2 vols. (Leipzig: F. C. W. Vogel, 1871-1872); traduction anglaise par: Bayard Dodge, ed. and tr., *The Fihrist of al-Nadīm: A Tenth-Century Survey of Muslim Culture,* Columbia Records of Civilization, Sources and Studies; no. 83, 2 vols. (New York: Columbia University Press, 1970), pp. 317 - 318 and 320.

(١٥) قابل العناوين التي أعطاها ابن النديم.

(١٦) انظر: Axel Anthon Björnbo and Seb Vogl, «Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid: Drei Optische Werke,» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften,* Bd. 26, no. 3 (1912), pp. 3-41.

(١٧) انظر: **كتاب الشعاعات** (مخطوطة، مكتبة خودا ـ بخش، ٢٠٤٨).

١ ـ إن أحد أوائل الكتب في علم المناظر العربي هو، كما ذكرنا سابقاً، كتاب قسطا ابن لوقا المكتشف حديثاً والذي لم يحلل من قبل[١٨]. في هذا الكتاب يعطي ابن لوقا لهذا العلم اسماً ويحدد هدفه، ويعطينا مفهومه لهيكلية هذا العلم.

وبالفعل يشارك تعبيران للدلالة على هذا العلم، وهما «علم اختلاف المناظر» و«علم الشعاعات». وهما التعبيران اللذان اختارهما الكندي أيضاً، مضيفاً إليهما التعبير «مطارح الشعاعات». هكذا كان الوضع في القرن التاسع كما نستطيع قراءته مدوناً بريشة ثابت بن قرة[١٩]. أما الغاية من هذا العلم فهي دراسة هذا الاختلاف في المناظر وأسبابه. إن البحث في هذه الأسباب يدفع ابن لوقا فضلاً عن الكندي للذهاب إلى أبعد من العرض الهندسي. فهما يقصدان بوضوح جمع هندسة الرؤية مع فيزيولوجيا الرؤية. وهكذا تتضح هيكلية علم المناظر كما جاءت في وصف ابن لوقا لها: «وأحسن العلوم البرهانية ما اشترك فيه العلم الطبيعي والعلم الهندسي لأنه يأخذ من العلم الطبيعي الإدراك الحسي ويأخذ من العلم الهندسي البراهين الخطوطية ولم أجد شيئاً تجتمع منه هاتان الصناعتان أكثر حسناً وكمالاً من علم الشعاعات لا سيما ما كان منها منعكساً عن المرايا»[٢٠].

وهكذا إذاً، فإنه بالنسبة إلى ابن لوقا، لا تُختصر البصريات بالهندسة أكثر من اختصار الانعكاس بها؛ بل على العكس من ذلك يجب تأليف الهندسة والفيزياء نظراً لخصائص الإدراك البصري. وبذلك يتميز موقف ابن لوقا هذا بالتأكيد عن موقف إقليدس؛ ولكن لا ينبغي اعتبار موقف ابن لوقا الواضح هذا نظرية جديدة، فهذه النظرية لم تبرز إلا لاحقاً مع إصلاح ابن الهيثم.

إن الهدف الرئيس لكتاب ابن لوقا هو دراسة الانعكاس على المرايا المسطحة والكروية المقعرة منها والمحدبة، ودراسة تنوع الصور المرئية تبعاً لموضع الجسم المرئي بالنسبة إلى المرآة ولبعده عنها. . . الخ. لكن ابن لوقا، وقبل الشروع بهذه الدراسة، يبدأ بتفسير موجز للرؤية وبتذكير ببعض النتائج البصرية.

إن مذهبه في الرؤية ذو مصدر إقليدسي وجالينوسي معاً. فهو يذكر أن «البصر يكون بشعاع ينبث من العين ويقع على المبصرات فتبصر بالشعاع الواقع عليها، فما وقع عليه الشعاع البصري يبصره الإنسان وما لم يقع عليه الشعاع البصري لم يبصره الإنسان»[٢١].

ونتعرف بوضوح في أقوال ابن لوقا هذه إلى نص التحديد الثالث لعلم «المناظر»

---

(١٨) قسطا بن لوقا، كتاب في علل ما يعرض في المرايا المحرقة من اختلاف المناظر (مخطوطة أسطان قدس، مشهد، ٣٩٢).

(١٩) إنه في الواقع تحت عنوان علم المناظر الذي يحفظه ابن قرّة. انظر: ثابت بن قرّة، الرسالة المشوقة إلى العلوم (مخطوطة مالك، طهران، ٦١٨٨).

(٢٠) المصدر نفسه، الورقة ٢و.

(٢١) المصدر نفسه، الورقتان ٣ظ ـ ٤و.

الإقليدسي. ويبقى تحديد شكل هذا الشعاع البصري بدقة. ويكتب ابن لوقا عندئذٍ: «الشعاع البصري ينبث من العين في صورة شكل مخروط مستجده يلي العين الباصرة وقاعدته تلي المبصرات التي تقع عليها فما وقعت عليه قاعدة المخروط الشعاعي أدركه البصر وما لم يقع عليه الشعاع البصري لم تدركه حاسة البصر، وهذا المخروط البصري ينفذ من العين الباصرة على خطوط مستقيمة لا اعوجاج فيها وله زاوية يحيط بها ضلعان من أضلاع المخروط، وتلك الزاوية تلي المبصرات لأن ذلك علة أن يرى الشيء الواحد مختلف العظم في قربه وبعد عن البصر، فيُرى في القرب عظيماً وفي البعد صغيراً»[٢٢]. ومن الواضح هنا أن ابن لوقا يستعيد أفكار إقليدس المتضمنة في التحديدات الأربعة الأولى من كتاب المناظر لإقليدس ولكنه يضيف إليها عناصر أخرى جالينوسية بموجبها «هذا الشعاع البصري ينبث من الروح النفسانية التي تنبعث من الدماغ إلى العينين وينبث من العين في الهواء إلى المبصرات ليكون كالعضو للإنسان فما وقع عليه ذلك الشعاع أدركته حاسة البصر»[٢٣].

إلا أن هذا الشعاع البصري لا يدرك المرئيات إلا بواسطة أحد نوعين من الأشعة هما، وفقاً لابن لوقا، الشعاع الشمسي والشعاع الناري. وكل واحد من هذين الشعاعين «يؤثر في الهواء ضياء لا يكون البصر إلا به وفيه»[٢٤].

ويبقى ابن لوقا للأسف صامتاً فيما يتعلق بدور الهواء والإضاءة في الرؤية.

ويبدو أن استعارته للعناصر الغالينوسية والتي استعارها أيضاً بمهارة حنين بن إسحق في ذلك العصر، تعود إلى عجز المذهب الإقليدسي عن إثبات أن الشعاع البصري هو أداة للعين، في حين أن الرؤية هي، مع ذلك، من عمل الروح.

فإذا عدنا اليوم إلى الدراسة البصرية والانعكاسية، نجد أن همّ ابن لوقا الأكبر يكمن في إثبات وصياغة ما طرحه إقليدس كمسلمات؛ ولكن هذه المحاولة ليست قصراً عليه، بل برزت عند الكندي أيضاً وبشكل أكثر سطوعاً. وهكذا بعد أن يثبت مسلمة إقليدس القائلة بأن الجسم المرئي يمكن إدراكه بأشكال مختلفة تبعاً لاختلاف زوايا الشعاع البصري الذي بواسطته تراه العين[٢٥]، نراه يتطرق إلى مشروعه الحقيقي أي البحث الانعكاسي. ووسيلته الرئيسة، التي هي في متناول يده، هي قانون الانعكاس، الذي يعبر عنه على الشكل التالي: «الشعاع البصري بل كل شعاع إذا لقي جرماً صقيلاً، انعكس منه على زوايا متساوية وأعني بقولي زوايا متساوية، أن تكون الزاوية التي يحيط بها الشعاع المنبث إلى الجرم الصقيل مساوية للزاوية التي يحيط بها الشعاع المنعكس عن الجرم الصقيل مع الجرم الصقيل»[٢٦]. يفترض

(٢٢) المصدر نفسه، الورقة ٤ ظ.

(٢٣) المصدر نفسه.

(٢٤) المصدر نفسه.

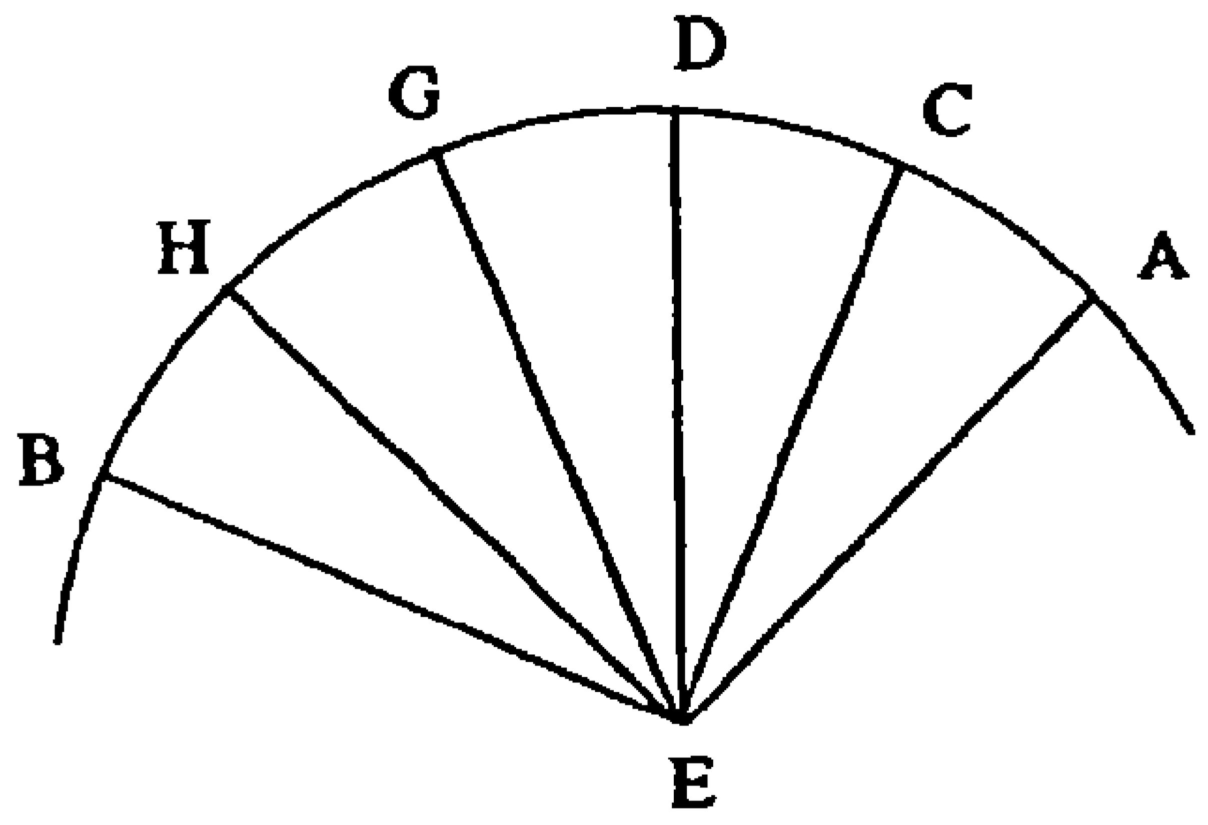
(٢٥) المصدر نفسه، الورقة ٤ و–ظ.

(٢٦) المصدر نفسه، الورقة ٦ و.

ابن لوقا، أثناء تطبيقه لهذا القانون، ومن دون إيضاح، أن الشعاع الساقط والشعاع المنعكس يقعان في مستو واحد عمودي على مستوي المرآة. وإذا أردنا التقاط سمة أساسية من بحث ابن لوقا الانعكاسي فإننا نحددها على الشكل التالي: كان اهتمامه بالزاوية التي يُرى الجسم من خلالها في المرآة أكثر بكثير من اهتمامه بصورة هذا الجسم، ونعني بذلك المفهوم البصري للصورة.

ولإيضاح منهجه، نأخذ مثال الافتراض ٢٨ من «مقالته». فهو يريد أن يعرف أسباب عدم رؤية الوجه في بعض المرايا، وفي أية مرايا تحدث هذه الظاهرة وعلى أية مسافة؟ يعطي ابن لوقا الجواب عن هذا التساؤل في الحالة التي تكون فيها المرآة كروية مقعرة ويكون الناظر موجوداً في مركز الكرة. والسبب في ذلك هو أن «الشعاع المنبث من البصر في هذا الوضع ينعكس على ذاته»[٢٧].

لبرهان هذا الافتراض، يأخذ ابن لوقا مرآة كروية مقعرة. ويعتبر قوساً AB أصغر من نصف دائرة يولّد دورانه سطح الكرة. ليكن E مركز الكرة حيث توجد العين. لنرسم الشعاع البصري بين المقطعين AE وEB ولنبرهن أن هذا الشعاع ينعكس على نفسه (انظر الشكل رقم (١٩ ـ ١)).



الشكل رقم (١٩ ـ ١)

ولنرسم انطلاقاً من النقطة E إلى المرآة AB العدد الذي نبغي من المقاطع المستقيمة: ED، EC، EG، EH. فجميع هذه المقاطع متساوية، ويشكل كل واحد منها مع محيط الدائرة زاويتين متساويتين. يكتب ابن لوقا في هذه الحالة: «وقد كنا بينا أن الشعاع ينعكس عن الأجرام الصقيلة على زوايا متساوية، فإذا توهمنا خطوط هـ أ، هـ جـ، هـ د، هـ ز، هـ ح، هـ ب، شعاعات تلقى جرماً صقيلاً وهو المرآة التي على أ ب، كان لقاؤها إياه على زوايا متساوية، فهي إذن تنعكس على ذاتها. فهي، إذاً، تنعكس على نقطة واحدة وهي نقطة هـ فلا يرى في مرآة أ ب شيء غير نقطة هـ»[٢٨].

لم يستعن ابن لوقا هنا في برهانه إلا بكتاب **الانعكاس** المزعوم أنه لإقليدس وبالافتراضين الثاني والخامس، كما نلاحظ أن ابن لوقا، وكما فعل إقليدس في كتابه

---

(٢٧) المصدر نفسه، الورقة ١٣و.

(٢٨) المصدر نفسه، الورقة ١٣ظ.

المزعوم، درس كيفية ظهور الجسم في المرآة بالنسبة إلى عين المشاهد. نشير أخيراً إلى أن ابن لوقا استعان خلال دراسته، بالإضافة إلى الافتراضين المذكورين، بافتراضات أخرى من الكتاب نفسه، وبخاصة السابع والحادي عشر والثاني عشر، مما يؤكد قناعتنا بأن المؤلفين العرب قد عرفوا بطريقة أو بأخرى ترجمة لنص هذا الكتاب(٢٩).

٢ ـ إنّ عمل ابن لوقا يبقى ضمن إطار علم المناظر والانعكاس الهلينستيين. وقد كان ابن لوقا معروفاً كمترجم بارز، وهو بذلك يشكل حالة نموذجية. وعلى خطى إقليدس تصور وألف كتاباً طبق فيه ما استطاع حفظه من **مناظر** هذا الأخير، وما تعلمه أيضاً من إحدى ترجمات كتاب **الانعكاس**، وربما كذلك من أحد المصادر الذي لم يحدد حتى الآن، والذي ينتمي إلى مدرسة هيرون الإسكندري. لكن مساهمة ابن لوقا لم تقتصر فقط على مجرد شرح بسيط لإقليدس أو لإقليدس المزعوم. فقد باشر، وبشكل متقن، بإجراء بحث جديد في مجال المرايا المسلية، وحسّن المذهب الإقليدسي للرؤية كما أثبت ما طرحه إقليدس كمسلمة. إن تواضع نتائج ابن لوقا لا يستطيع طمس موقفه المجدِّد الصريح. فهذه النزعة عنده ليست ميزته الخاصة، فهي لا تقتصر على علم المناظر، بل إنها ميزة العصر، وإغفالها يحول بيننا وبين فهم إنجازات تلك الحقبة من الزمن. فهل ظهرت في بحثه المتعلق بالمرايا المحرقة؟ إننا نجهل هذا الأمر للسبب الذي أثرناه سابقاً. وعلى كل حال، فإن هذه النزعة هي التي دفعت الكندي، معاصر ابن لوقا، للسير قدماً، إن في إنجازه الفلسفي أو البصري، أي في أعماله التي تعالج المرايا المحرقة(٣٠). وقد وضع الكندي نصب عينيه عرض تعاليم القدماء في هذين الميدانين، وتطوير ما بدأوا به، وتصحيح الأخطاء التي ارتكبت. وقد وفى فيما بعد بوعده في المؤلفين اللذين يعالجان المناظر الهندسية واللذين وصلا إلينا. وسنبدأ بتحليل سريع للمؤلف *Liber de causis diversitatum aspectus* ثم نستعرض كتابه عن المرايا المحرقة، قبل الإشارة إلى مقالاته الأخرى في علم المناظر الفيزيائي.

أراد الكندي أن يبرهن مسلمات إقليدس بطريقة أكثر جذرية من ابن لوقا. فقد خصص الربع الأول من *De aspectibus* لإثبات الانتشار المستقيم للأشعة الضوئية بواسطة تصورات هندسية عن الظلال ومرور الضوء عبر الثقوب، موسعاً بذلك ملحوظات من خاتمة كتاب **التنقيح** *(Recension)* لثيون الإسكندري(٣١).

يبرهن الكندي في الافتراض الأول من كتابه أنه إذا كان المصدر الضوئي والجسم

---

(٢٩) في الواقع، يستخدم ابن لوقا الافتراض ٧ من **الانعكاس** لإقليدس المزعوم في الافتراض ٢٢ والافتراضين ١١ و١٢ في الافتراض ٣٠.

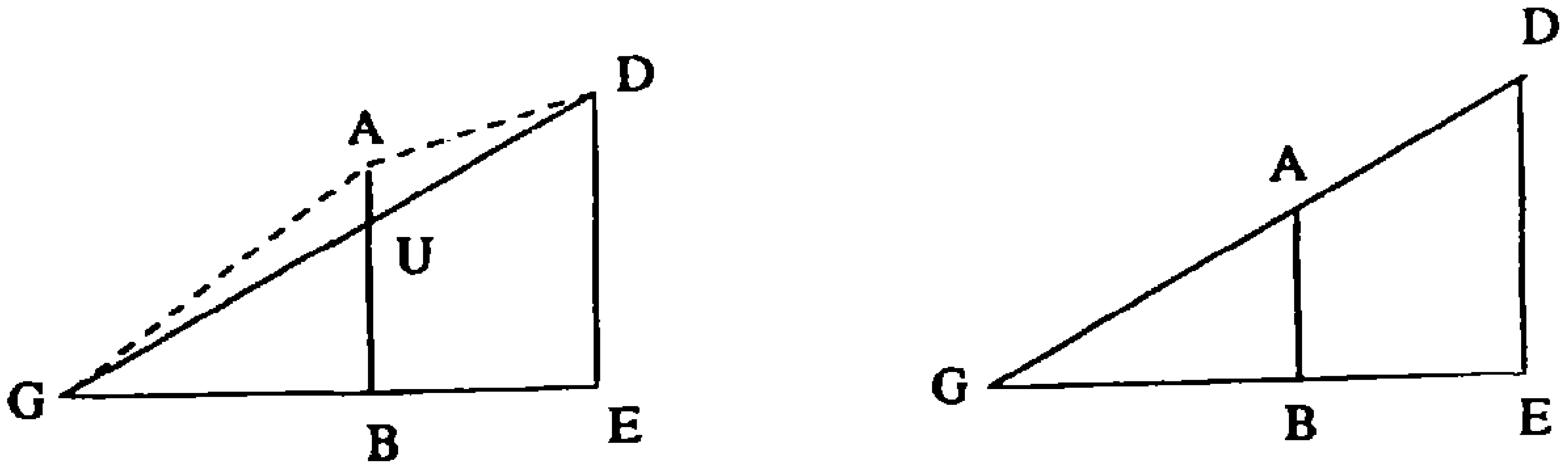
(٣٠) انظر «Al-Kindī,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 15, pp. 261-266.

(٣١) حول تأثير ثيون الاسكندري على الكندي، انظر شروحات بجورنبو، في: Björnbo and Vogl, «Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid: Drei Optische Werke,» pp. 3-41.

المضاء بواسطة هذا المصدر يمثلان كرتين بنفس القطر d، عندئذ يكون الظل أسطوانياً، كما أن الظل الملقى على مستوٍ عمودي على المحور المشترك يكون دائرة بنفس القطر d. وبالعكس، إذا كان للجسم المضاء وللظل الملقى على مستوٍ نفس القطر d، فإن المصدر الضوئي يكون عندئذٍ كروياً، وبنفس القطر d.

في الافتراض الثاني يبرهن الكندي أنه إذا كان قطر المصدر الضوئي أكبر من قطر الجسم المضاء، عندئذٍ يكون الظل مخروطياً، والظل الملقى على مستوٍ عمودي على محور المخروط يمثل دائرة بقطر أصغر من قطر الجسم المضاء. ثم يبرهن لاحقاً الافتراض الثالث، وهو الحالة التي يكون فيها قطر المصدر الضوئي أصغر من قطر الجسم المضاء، عندئذٍ يكون الظل جذع مخروط، أما الظل الملقى على مستوٍ عمودي على محور الجذع فيكون دائرة ذات قطر أكبر من قطر الجسم المضاء. إن هذه الافتراضات الثلاثة سمحت للكندي بأن يبرهن الانتشار المستقيم للضوء.

يضيف الكندي، ثلاثة افتراضات أخرى مخصصة لإثبات المبدأ نفسه بشكل قطعي. وهكذا، في الافتراض الخامس يأخذ مصدراً ضوئياً مستقيماً ED (أو حتى مصدراً بشكل نقطة D) ويأخذ جسماً مضاء مستقيماً AB. ويؤكد أنه إذا كان الظل هو BG، عندئذٍ فإن التجربة تعطي: $BG/BA = EG/DE$، ويستتبع هذه المعادلة أن النقاط الثلاث D وA وG هي على استقامة (انظر الشكل رقم (١٩ ـ ٢)).



الشكل رقم (١٩ ـ ٢)

وفعلاً، إذا لم تكن هذه النقاط الثلاث على استقامة عندئذٍ يقطع DG المقطع AB في U. ويكون المثلثان GBU وGED متشابهين، ونحصل على: $BG/BU = EG/DE$.

وبمقارنة النسبتين نحصل على $BU = BA$، وينشأ عن ذلك تناقض.

في الافتراض السادس يأخذ الكندي ثقباً مضاء بواسطة مصدر ضوئي ويثبت، انطلاقاً من صورة هذا الثقب، الانتشار المستقيم للضوء.

من الملاحظ هنا أن الكندي يتكلم عن أشعة مصادر ضوئية؛ وهذا يعني أنه يُقر، مثل الكثيرين أمثاله من مؤلفي العصور القديمة، أن هذه الأشعة مماثلة للشعاع البصري بالنسبة

إلى الانتشار أو بالنسبة إلى بقية قوانين البصريات.

وما إن ينتهي الكندي من إثبات الانتشار المستقيم للضوء، حتى يرجع إلى نظرية الرؤية[٣٢]. ويبدأ بالتذكير بالمذاهب الرئيسة المعروفة منذ العصور القديمة، لكي يتبنى في النهاية مذهب البث (l'émission). ويبرر اختياره هذا مقدماً حججاً جديدة ضد المذاهب القديمة، وبخاصة ضد مذهب إدخال الأشكال (l'intromission des formes)، كما هو عند الذريين اليونانيين وضد مذهب البث ـ الإدخال للأشكال كما هو الأمر عند أفلاطون. ويعود نقده أخيراً إلى برهان استحالة التوفيق بين مذهب إدخال الأشكال، أي الكليات غير القابلة للتحليل إلى عناصرها البسيطة، وواقع أن إدراك جسم ما هو مرتبط بموضعه في الفضاء العادي. وإذا كان مذهب إدخال الأشكال صحيحاً، يقول الكندي، فإن دائرة موجودة في نفس مستوي العين تكون عندئذٍ مرئية بكاملها، وهذا أمر غير صحيح. ومع ذلك، فإنه لا يقبل المذهب الإقليدسي للبث إلا بعد أن يدخل عليه بعض التحسينات الجدية. فمخروط الرؤية، في اعتقاده، وبخلاف ما يرى إقليدس، ليس مؤلفاً من أشعة منفصلة، بل من كتلة أشعة متواصلة.

إلا أن أهمية هذا التحسين الأخير تكمن في الواقع في الفكرة التي يرتكز عليها: وهي فكرة الشعاع. فعلى غرار ابن لوقا، نرى الكندي يستبعد المفهوم الهندسي الصرف للشعاع؛ فالأشعة عنده ليست مستقيمات هندسية، بل انطباعات تولدها الأجسام ثلاثية الأبعاد؛ أو حسب ما ذكره الكندي نفسه[٣٣]: «ولكن الشعاع هو تأثير الجسم المضيء على أجسام غير شفافة، ويشتق اسمه (أي الشعاع) من اسم الضوء بسبب التغيرات التي يحدثها على الأجسام هذا التأثير. فإن التأثير وما وقع فيه التأثير، مجتمعين، يؤلفان الشعاع. ولكن الجسم الذي يحدث التأثير هو جسم ذو ثلاثة أبعاد: طول وعرض وعمق. فإن الشعاع لا يتبع خطوطاً مستقيمة قد يكون بينها فسحات»[٣٤].

إن نقد الكندي لمفهوم الشعاع هو نقد مهم في حد ذاته، فهو يحضّر، بشكل أو بآخر، لخطوة أساسية سيجتازها ابن الهيثم فيما بعد: وهي الفصل بين الضوء والخط المستقيم الذي يسلكه أثناء انتشاره. لكن ينبغي على الكندي أيضاً أن يفسر اختلاف الإدراك تبعاً لمناطق المخروط المختلفة. وبذلك ينفرد بموقف متميز في آن معاً عن إقليدس وبطلميوس، مفترضاً خروج مخروط رؤية من كل نقطة من العين.

---

(٣٢) انظر: David C. Lindberg, «Al-kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision,» *Isis*, vol. 62, no. 214 (December 1971), pp. 469-489, reprinted in: David C. Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler* (Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1976), vol. 2, pp. 18-32.

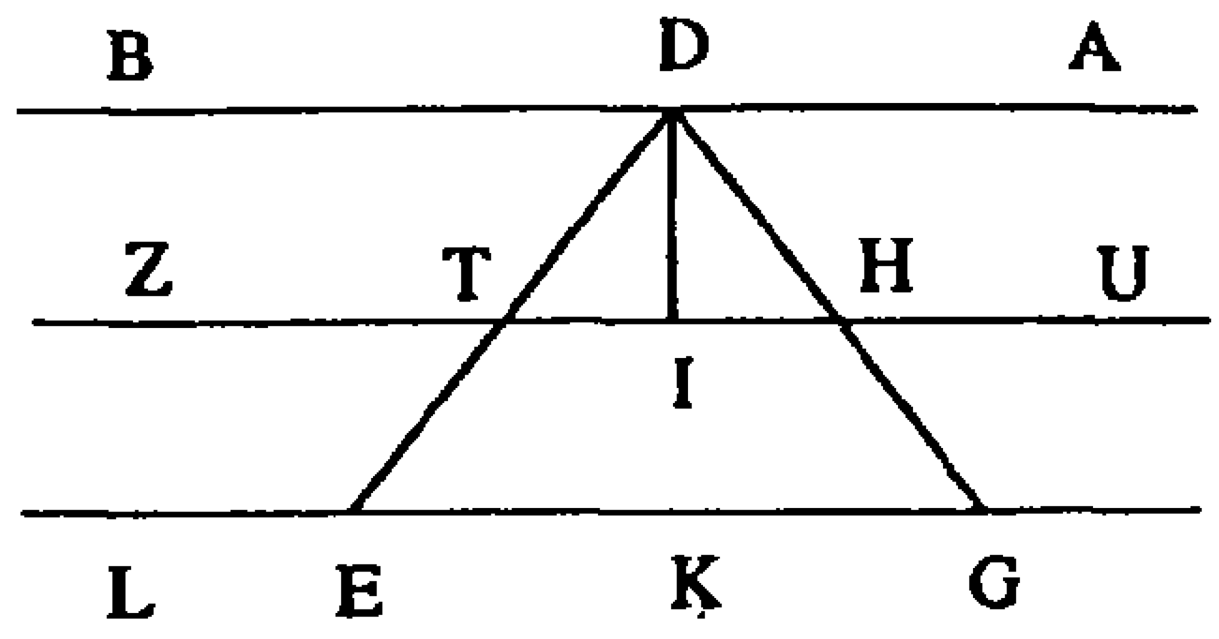
(٣٣) بتصرف. (المترجم).

(٣٤) انظر: Björnbo and Vogl, «Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid: Drei Optische Werke,» *Liber de causis...*, proposition 11.

انظر أيضاً: Roshdi Rashed [et al.], *L'Œuvre optique d'al-Kindī* (Leiden: sous presse).

وهكذا بعد أن أثبت الانتشار المستقيم، الذي يرجع إليه في الافتراض الثالث عشر ليبرهن أنه يحدث في كل الاتجاهات، وبعد أن أعد مذهبه في الرؤية، يعود إلى دراسة المرايا والصور انطلاقاً من الافتراض السادس من كتابه. وهنا يبرهن تساوي الزاويتين اللتين يكوّنهما الناظم على المرآة في نقطة السقوط مع الشعاع الساقط ومع الشعاع المنعكس. يبرهن الكندي هذا القانون ليس فقط بطريقة هندسية بل وبطريقة تجريبية أيضاً. فهو يضع، لهذه الغاية، مرآة مستوية AB ولوحة UZ موازية لـ AB. ثم يأخذ نقطة D على المرآة ويرسم GD الذي يقطع UZ في النقطة H (انظر الشكل رقم (١٩ ـ ٣)).

ونُسقط على UZ عموداً يقطعه في النقطة I. ثم نأخذ على UZ مسافتين متساويتين $IT = IH$. ثم يثقب اللوحة ثقباً دائرياً في T. ويضع لوحة ثانية KL موازية لـ AB. وتتمثل تجربة الكندي في هذه الحالة في وضع مصدر ضوئي على DG أو على امتداده وفي إثبات أن الشعاع المنعكس يكون باتجاه DE.



الشكل رقم (١٩ ـ ٣)

وفي الواقع يندرج هذا «الإثبات التجريبي» في مدرسة قديمة نتلمس آثارها في تنقيح (recension) ثيون لـ مناظر إقليدس والتي تعمق فيها ابن الهيثم كما سنرى فيما بعد.

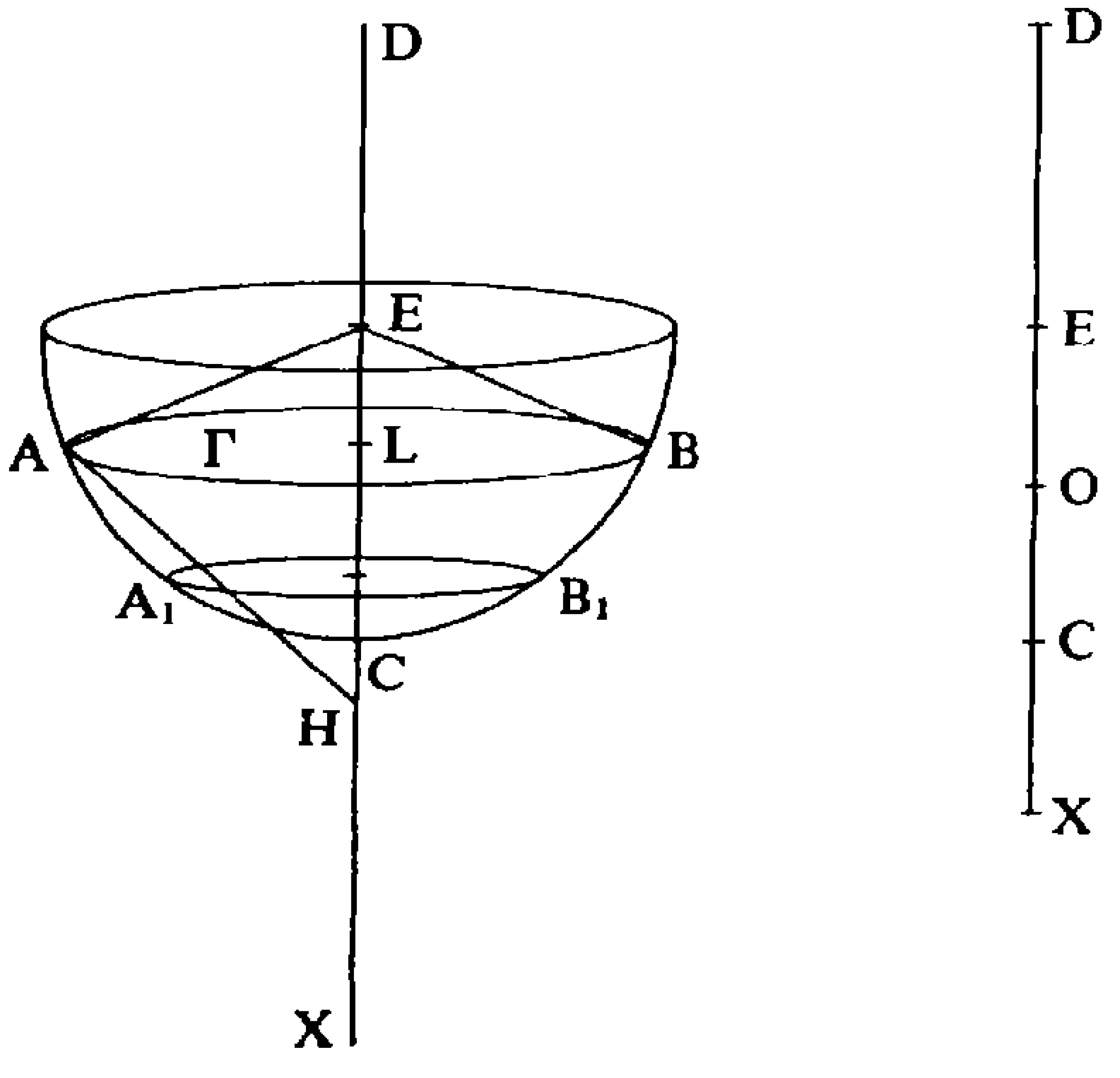
يتابع الكندي نفس البحث المذكور (الافتراض الثامن عشر) آخذاً مرآة كروية محدبة أو مقعرة، ليبرهن أن انعكاس الشعاع في أية نقطة من المرآة يحصل على المستوي المماس في هذه النقطة. ثم يتفحص في الافتراض الحادي والعشرين موضع الصورة الوهمية ويستنتج فكرة التناظر بالنسبة للمرآة. ثم يدرس في الافتراض الثالث والعشرين فكرة زاوية الرؤية.

٣ ـ لم تقتصر مساهمة الكندي على أعماله البصرية والانعكاسية فحسب. وكأنه أراد معالجة جميع المواضيع الموروثة عن علم المناظر القديم. وهكذا نجده يخصص كتاباً كاملاً للمرايا المحرقة؛ ومن بعده لم يأتِ عالم عربي شهير في علم المناظر إلا وضمّن بحثه دراسة في المرايا المحرقة. هذا، على الأقل، حال المؤلفين الأكثر أهمية وهما: ابن سهل وابن الهيثم. والمقصود هنا هو فصل مركزي في علم المناظر وليس كما كان الحال في العصور القديمة حيث كانت هذه المرايا تعتبر اختصاصاً مستقلاً. وفضلاً عن ذلك، سنرى لاحقاً أن هذه الدراسة ستقودنا بالتحديد إلى تدشين فصل جديد في القرن العاشر تحديداً، وهو فصل الانكسارات.

لم يحلَّل كتاب الكندي هذا بشكل صحيح حتى الآن[٣٥]. وهو يقع، كبقية أعماله الأخرى، في تواصل مع العلماء القدامى وفي تعارض معهم في الوقت نفسه. ويحاول الكندي سد النواقص في دراسة أنتيميوس الترالي. ألم يأخذ هذا الأخير كحقيقة واقعة تلك الأسطورة التي تقول إن أرخميدس أحرق الأسطول الروماني من دون أن يبرهن هذه الإمكانية؟ ألم يعمل من أجل صنع مرآة تعكس أربعة وعشرين شعاعاً نحو نقطة واحدة دون أن يحدد بدقة المسافة بين هذه النقطة والمرآة؟ وقد أخذ الكندي هذه المهمة على عاتقه في خمسة عشر افتراضاً غير متساوية من حيث الأهمية.

إن هدف الافتراضات الأربعة الأولى هو إنشاء مرآة محرقة ذات شكل مخروطي. فهو يدرس لهذه الغاية في الافتراضات الثلاثة الأولى جهازاً مؤلفاً من مرآتين مستويتين وموضوعتين على وجهي ثنائي الأسطح.

وتعالج الافتراضات السبعة التالية إنشاء المرايا الكروية المقعرة. ويكون محور المرآة موجهاً دائماً نحو الشمس، ويعالج الكندي مسألة الأشعة الساقطة على نقاط الدائرة التي تحد المرآة. ويبرهن أن الأشعة المنعكسة تلتقي في نقطة واحدة من المحور. ويميز بين عدة حالات تبعاً لنسبة القوس AB، الذي يحدد المرآة، إلى الدائرة الكبرى للكرة. ويحصل الأمر ذاته إذا أخذنا مرآة كروية مقعرة ذات محور CD وهي على شكل نصف كرة، وإذا أخذنا على المرآة دوائر ذات محور مشترك CD (الشكل رقم (١٩ ـ ٤)).



الشكل رقم (١٩ ـ ٤)

---

(٣٥) انظر مخطوطة: كتاب الشعاعات حيث نعطي نشرة نقدية وترجمة فرنسية لهذا النص (انظر الهامش السابق).

لتكن Γ إحدى هذه الدوائر ومركزها L؛ وليكن E مركز الكرة وR نصف قطرها وO في منتصف EC؛ فنستطيع تلخيص نتائج الكندي الرئيسة كما يلي:

١ ـ إن الشعاع الشمسي الساقط في النقطة A من الدائرة Γ ينعكس نحو النقطة H من المحور CD. وتبقى النقطة H ثابتة عندما ترسم A الدائرة Γ.

٢ ـ يتعلق موضع النقطة H بالقوس AB الموافق للدائرة Γ، ويتعلق بالتالي بالزاوية $\alpha = AEB$.

ـ ترسم النقطة H المقطع OC في الحالة $\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

ـ عندما تكون $\alpha \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$ تكون النقطة H، التي يتجه نحوها الشعاع المنعكس، موجودة على نصف المستقيم CX.

ـ تتحدد المسافة LH عندما نعرف القوس AB. وبسهولة نثبت أن:

$$LH = R\ sin \frac{\alpha}{2} . |cotg\ \alpha|.$$

وهكذا إذا كانت المرآة محددة بالقوس AB والذي يساوي $\frac{2\pi}{3}$، فإن جميع الشعاعات المنعكسة والموافقة لجميع الشعاعات الشمسية الساقطة على المرآة تتجمع على المقطع OC. أما الشعاعات الساقطة في جوار النقطة C، فإنها تنعكس لتمر في جوار النقطة O. ومن ناحية أخرى، إذا كان $\frac{2\pi}{3} < arc\ AB < \pi$، وإذا أردنا أن تلتقي الشعاعات المنعكسة بالمحور لوجب استعمال رأس كرة (قبّة) يكون مركزها النقطة C.

يعود الكندي بعد دراسة هذه المرآة إلى مسألة أنتيميوس التالي: وهي إنشاء جهاز من خمس وعشرين مرآة مسدسة الأضلاع، يستطيع عكس الأشعة الشمسية الساقطة في مركز المرايا، باتجاه نقطة وحيدة. ويبرهن أنه إذا كانت الأشعة الشمسية موازية لمحور المرآة المركزية، فإن المسألة تكون سهلة بالنسبة إلى ثلاث عشرة مرآة، حيث توجد نقطة تجمع نسميها R. لكن المسألة تتعقد بالنسبة إلى المرايا الاثنتي عشرة الباقية حيث نصطدم بالصعوبة التي واجهت أنتيميوس إذ إنّ الشعاعات تنعكس نحو نقطة أخرى مختلفة عن النقطة الأولى وهي موجودة على محور الجهاز وقريبة من النقطة R.

إن برهان الكندي صحيح بالنسبة إلى المرايا الست المحيطة بالمرآة المركزية؛ لكنه يؤكد دون برهان نفس الخاصية لبقية المرايا، وهذا الأمر ليس صحيحاً بشكل تام.

أراد الكندي، في الافتراض الرابع عشر، إنشاء مرآة تكون «أكثر إتقاناً من مرآة أنتيميوس». وهكذا أنشأ، انطلاقاً من مضلع منتظم ذي أربعة وعشرين ضلعاً، هرماً منتظماً ذا أربعة وعشرين جانباً، وذلك لكي تكون الأشعة الشمسية الساقطة في وسط قاعدات هذه الجوانب المأخوذة كمرايا، منعكسة نحو نفس النقطة J من محور الهرم. ويحدد هذه النقطة J عندما يأخذ جانبين متناظرين بالنسبة إلى المحور، ولكنه لا يبرهن هنا أن النقطة J تبقى هي

نفسها فيما لو أخذ جانباً أياً كان من الجوانب. ومما تجدر الإشارة إليه أن هذه النتيجة تكون بديهية لو أخذنا بعين الاعتبار مستويات التناظر في الهرم المنتظم.

ويختتم الكندي الجزء الأخير من مؤلفة بنص، إذا ما تم تصويبه فإنه يصوغ لنا مسألة أنتيميوس وهي تتمثل في إنشاء مرآة بقطر محدد، تعكس الأشعة نحو نقطة محددة. والطريقة التي يشير إليها تتمثل في إنشاء قطع مكافئ بواسطة نقاط ومماسات، وهذا القطع المكافئ يملك بؤرة ودليلاً معروفين.

إن الطريقة والأفكار هي مماثلة لتلك التي أوردها أنتيميوس، إلا أن برهان الكندي هو أكثر وضوحاً وتنظيماً على الأقل مقارنة بالبرهان الذي وصل إلينا في النص اليوناني لأنتيميوس، أو في الترجمة العربية التي كنا، لحسن الحظ، قد عثرنا عليها.

وهكذا، فإننا نقدر الأهمية والاتساع اللذين استطاع الكندي أن يوليهما لدراسة المرايا المحرقة. فهو يتفحص خمس مرايا، وبذلك يكون قد درس عدداً من المرايا أكثر مما فعل أسلافه الهلينستيون. وهو يرجع إلى ترجمة حديثة لأنتيميوس الترالي، ولكنه لم يلبث أن ذهب قدماً بعيداً عنه. وإذا لم يُعِر اهتمامه في كتابه إلى المرايا الاهليلجية فذلك لأنه لم يكن يهتم إلا بالمرايا التي يمكن أن توافق أسطورة أرخميدس. وقد تابع خلفاؤه العرب من بعده، وبنشاط كبير، دراسة انتشار الأشعة الشمسية وتقاربها بعد الانعكاس. وهذه الدراسة ستترك بصماتها الدامغة على تطور علم المناظر بأكمله كما سنرى لاحقاً.

تنسب إلى الكندي أيضاً مقالة صغيرة يبرهن فيها أن «أعظام الأشكال الغائصة في الماء كلما غاصت تُرى أعظم»، حيث يحاول بواسطة الانعكاس تحليل ظاهرة في الانكسار. تبين هذه المقالة، والتي نُسبت خطأ إلى مؤلف متأخر، أن الفيْلسوف الكندي لم يكن بعد مطلعاً آنذاك على مناظر بطلميوس. ومن الجدير ذكره، أخيراً، الكتيبات التي عالج فيها، بطريقة أو بأخرى، مسألة اللون. وعنوان الكتيب الأول «في الجرم الحامل بطباعه اللون من العناصر الأربعة والذي هو علة اللون في غيره»[٣٦].

وهذا الجسم بالنسبة إليه ليس سوى «الأرض». وفي الكتيب الثاني يتساءل عن «علة اللون اللازوردي الذي يُرى في الجو في جهة السماء ويُظن أنه لون السماء»[٣٧].

ويرى الكندي عندئذٍ أن هذا اللون ليس هو لون السماء، ولكنه خليط من ظلمة السماء ومن ضوء الشمس المنعكس على جزيئات الغبار في الجو.

(٣٦) أبو يوسف يعقوب بن إسحق الكندي، **رسائل الكندي الفلسفية**، تحقيق وتقديم محمد عبد الهادي أبو ريدة، ٢ج (القاهرة: دار الفكر العربي، ١٩٥٠ ـ ١٩٥٣)، ج ٢، ص ٦٤ ـ ٦٨.
(٣٧) المصدر نفسه، ص ١٠٣ ـ ١٠٨.

ثانياً: ابن سهل ونظرية العدسات الهندسية

تشكلت في منعطف القرن التاسع مجموعة أساسية من كتابات بصرية تشمل في آن معاً ترجمات الكتب اليونانية في علم المناظر، والانعكاسيات، والمرايا المحرقة، وعلم المناظر الفيزيولوجي، والمساهمات الجديدة للعلماء العرب أنفسهم. لقد أورد المفهرسون القدامى أسماء وعناوين لا نعرف عنها إلا النزر القليل. وعلى سبيل المثال، فإن مفهرس القرن العاشر ابن النديم قد ذكر ابن مسرور النصراني في الجيل الذي تلا جيل الكندي وابن لوقا. ولكن على الرغم من كل الدلائل التي تشير إلى الاستمرار في الكتابة في ذلك العصر في علم المناظر، فإنه لم يصل إلينا إلا القليل القليل من الوثائق في علم المناظر الهندسي؛ وكلها تشهد على الاهتمام الرئيس المتمثل في دراسة المرايا المحرقة.

وفي الواقع، وحتى الآن، ليس في متناول يدنا سوى ثلاثة مؤلفات يعود اثنان منها، دون أدنى شك، إلى ذلك العصر، وهما: كتاب الفلكي عطارد بن محمد ومقالة الرياضي أبي الوفاء البوزجاني، أما الثالث فنسبته إلى ذلك العصر ليست مؤكدة، وهو مقالة أحمد بن عيسى. فكتاب عطارد هو، كما بيّنا في مكان آخر[٣٨]، عبارة عن تجميع واقتباس لـ **المرايا المحرقة** لأنتيميوس الترالي ولمؤلف يوناني آخر من مدرسة هيرون الإسكندري. وشروحات عطارد لم تضف شيئاً أساسياً وكذلك مقالة ابن عيسى. فالأمر، كما بينا، يتعلق بتجميع واقتباس لمصادر واحدة، وينبغي أن نضيف إلى هذه المصادر **المرايا المحرقة** للكندي والمقالة الصغيرة المنسوبة إليه حول الأشكال المغمورة في الماء والتي أتينا على ذكرها سابقاً، وكذلك مناظر إقليدس، بالإضافة إلى الكثير من النصوص الأخرى. إن مقالة ابن عيسى هذه مهمة لمعرفة المصادر اليونانية والعربية في القرن التاسع. وقد شمل هذا التجميع والاقتباس فصولاً هي في الأصل نصوص مستقلة. لذلك نجد فيها، علاوة على علم المناظر والانعكاسيات، المرايا المحرقة، والهالة، وقوس قزح، ووصف العين. وأخيراً، فيما يتعلق بأبي الوفاء، فإنه يطبق طريقة لإنشاء مرآة مكافئية المقطع.

هذا الاهتمام بدراسة المرايا المحرقة يشكل مرحلة أساسية في فهم تطور علم انعكاس الضوء وانكساره، كما يشهد على ذلك اكتشافنا الحديث لمقالة مكتوبة بين العامين ٩٨٣ و٩٨٥م للعالم أبي سعد العلاء بن سهل. فبعد أن انطلق تحديداً من دراسة المرايا المحرقة، أضحى ابن سهل في تاريخ العلوم، أول من بدأ بحثاً يتناول العدسات المحرقة؛ وقد مثل لهذا الأخير بحثه «وثيقة ولادة» لعلم انكسار الضوء. وإن هذه المعرفة الحديثة بإنجاز ابن سهل تلقي المزيد من الضوء على إنجاز خلفه ابن الهيثم وذلك بتحديد موقعه التاريخي والرياضي.

تساءل علماء الانعكاس قبل ابن سهل عن الخصائص الهندسية للمرايا، وعن

---

(٣٨) انظر الهامش رقم (٥) السابق.

الإشعال الذي تحدثه على مسافة معينة. هذه هي باختصار المسألة التي طرحها ديوقليس وأنتيميوس الترالي والكندي. وقد غير ابن سهل السؤال دفعة واحدة، إذ لم يعد يأخذ المرايا فقط، بل الأدوات المحرقة، أي تلك الأدوات القادرة على الإحراق ليس فقط بالانعكاس بل وبالانكسار أيضاً. وقد درس عندئذٍ مرآة مكافئية المقطع ومرآة ناقصة المقطع وعدسة مستوية محدبة وعدسة محدبة الوجهين، وذلك تبعاً لبعد المصدر الضوئي ـ متناهٍ أو لا متناهٍ ـ وتبعاً لطريقة الإحراق ـ بالانعكاس أو بالانكسار. وفي كل هذه القطوع[٣٩] كان ابن سهل يبدأ بدراسة نظرية للمنحني ثم يعرض طريقة ميكانيكية لرسمه. فمثلاً، بالنسبة إلى العدسة المستوية المحدبة يبدأ بدراسة القطع الزائد كقطع مخروطي، ثم ينتقل إلى الرسم المتواصل لقوس قطعٍ زائد، ليتابع لاحقاً دراسة المستوي المماس على السطح المتولد من دوران هذا القوس حول مستقيم ثابت، ليصل أخيراً إلى قوانين الانكسار. وإذا أردنا فهم دراسة ابن سهل للعدسات، يجب أن نحدد مسبقاً معارفه فيما يتعلق بالانكسار.

وهناك مقالة أخرى وصلتنا وعقّب عليها ابن الهيثم، وكان ابن سهل قد كتبها خلال تفحصه للفصل الخامس من **مناظر** بطلميوس، وعنوان هذه المقالة **البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء**. في هذه المقالة يطبق ابن سهل على دراسة الانكسار مفاهيم كانت سائدة عند بطلميوس. أما مفهوم الوسط فإنه يشغل حيزاً مهماً في هذه الدراسة. ويبرهن ابن سهل أن كل وسط، بما فيها الفلك، يملك بعض الغلظ[٤٠] الذي يحدده. لكن اكتشاف ابن سهل الحقيقي يبرز عندما يميز الوسط عن نسبة معينة، وهذا ما يقوم به في مقالته «الحرّاقات». ومفهوم النسبة الثابتة هذا هو بالتحديد الصفة المميزة للوسط، وجوهر دراسة ابن سهل عن الانكسار في العدسات.

وفي مستهل هذه الدراسة يأخذ ابن سهل سطحاً مستوياً GF يحد قطعة من البلور الشفاف المتجانس. ثم يرسم المستقيم CD الذي يحدد انتشار الضوء في البلور، والمستقيم CE الذي يحدد انكساره في الهواء، ويرسم الناظم على السطح GF في النقطة G الذي يقطع CD في H والشعاع المنكسر في E (انظر الشكلين رقمي (١٩ ـ ٥) و(١٩ ـ ٦)).

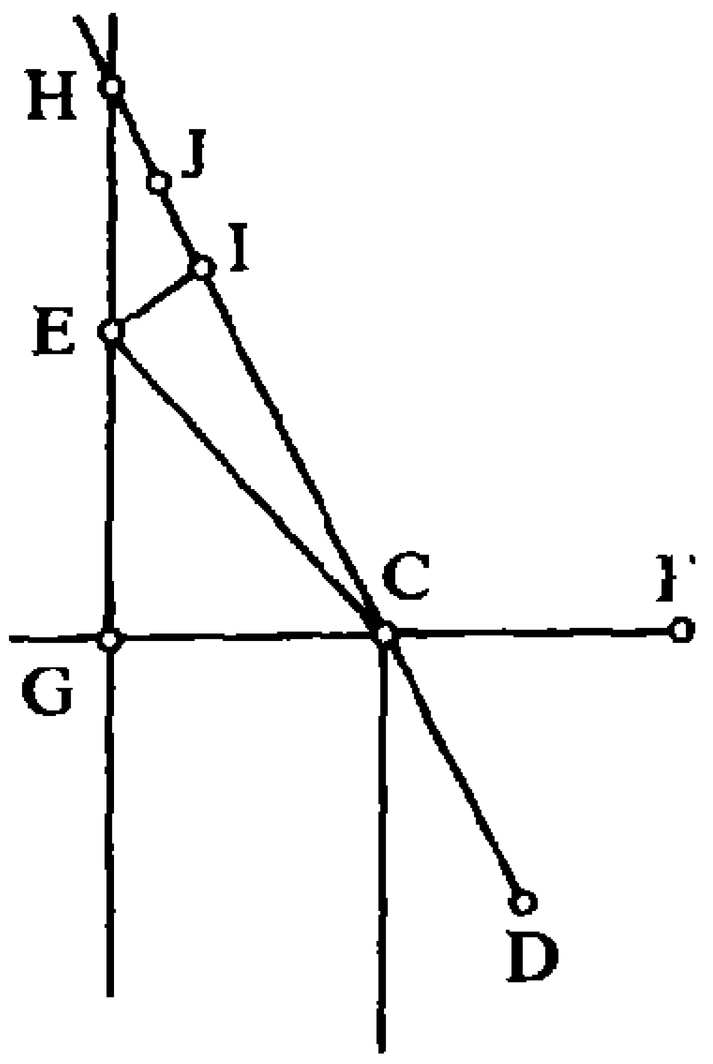
يطبق ابن سهل هنا بشكل واضح قانون بطلميوس المعروف الذي ينص على أن الشعاع CD في البلور، والشعاع CE في الهواء، والناظم GE على السطح المستوي للبلور هي في نفس المستوي. ويكتب باختصار، كعادته، وبدون شرح نظري: «فخط جـ هـ أصغر من خط جـ ح. ونفصل من خط جـ ح خط جـ ط مثل خط جـ هـ ونقسم ح ط

---

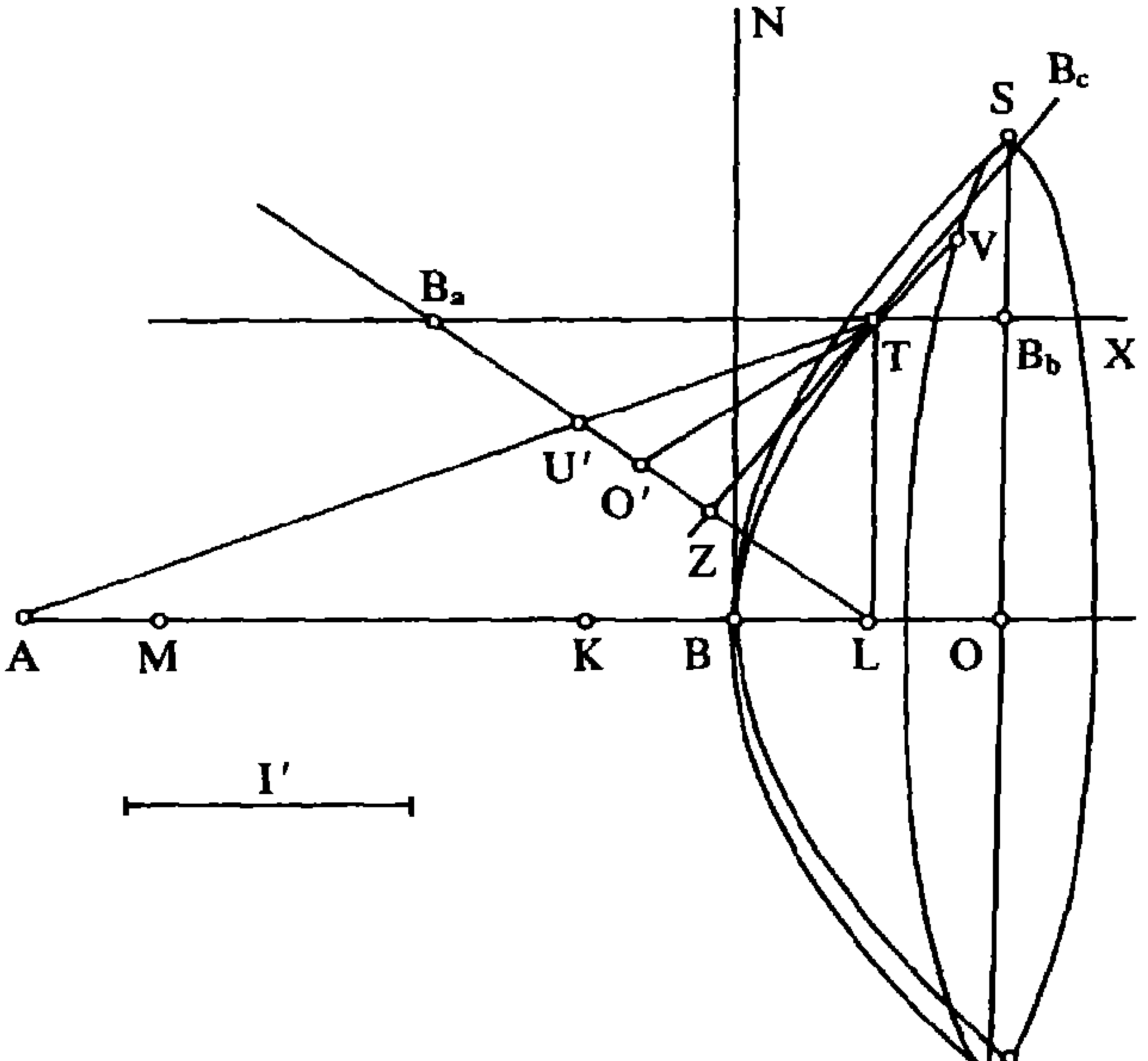
(٣٩) جمع قطع. (المترجم).

(٤٠) استعمل العرب لفظة الغلظ بمعنى الكمدة. (المترجم).

نصفين على نقطة ي ونجعل نسبة خط أك إلى خط أب كنسبة خط جـ ط إلى خط جـ ي ونخرج خط ب ل على استقامة خط أب ونجعله مثل خط ب ك. فإما أن تكون الأضواء الخارجة من. . .»[41].



الشكل رقم (١٩ ـ ٥)



الشكل رقم (١٩ ـ ٦)

(٤١) انظر: Ibn Sahl, «Les Instruments ardents,» dans: Rashed, *Dioptrique et géométrie au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, p. 34.

بهذه العبارات القليلة يستنتج ابن سهل أولاً أن $\frac{CE}{CH} < 1$ ويستعمل هذه النسبة على امتداد بحثه في العدسات المصنوعة من هذا البلور. فهو لا يتوانى عن إعطاء هذه النسبة نفسها، أو عن إعادة هذا الشكل نفسه في كل مرة يناقش فيها موضوع الانكسار في هذا البلور.

هذه النسبة ليست سوى معكوس معامل الانكسار(٤٢) في البلور بالنسبة إلى الهواء. وبالفعل، لنفترض أن i_1 وi_2 تمثلان الزاويتين المشكلتين على التوالي بين كل من CD وCE وبين الناظم GH؛ ينتج معنا أن:

$$\frac{1}{n} = \frac{sin\ i_1}{sin\ i_2} = \frac{CG}{CH} \times \frac{CE}{CG} = \frac{CE}{CH}$$

يأخذ ابن سهل النقطة I على المقطع CH بحيث تكون $CI = CE$، ويأخذ النقطة J في منتصف IH فنحصل عندها على:

$$\frac{CI}{CH} = \frac{1}{n}$$

وهذه القسمة $CIJH$ تميز البلور بالنسبة لأي انكسار كان.

ويبرهن علاوة على ذلك خلال بحثه في العدسة المستوية المحدبة والعدسة محدبة الوجهين، أن اختيار القطع الزائد لصنع العدسة مرتبط بطبيعة البلور، إذ إن الانحراف عن المركز للقطع الزائد هو $e = \frac{1}{n}$.

هذه النتيجة ستساعد على إدخال قاعدة الرجوع العكسي (العودة المتطابقة) للضوء في حالة الانكسار وهي قاعدة أساسية لدراسة العدسات محدبة الوجهين.

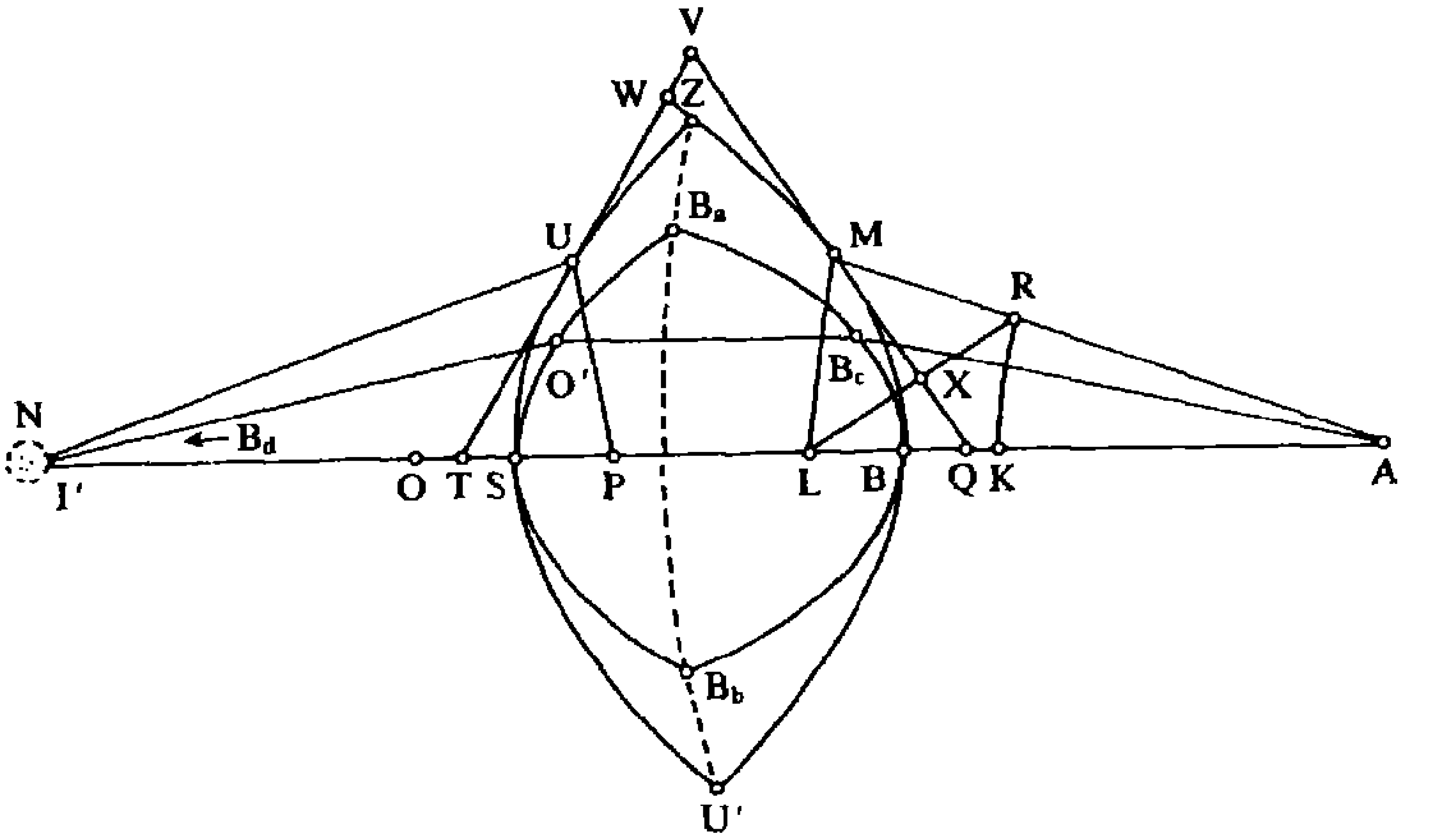
هذا هو إذن قانون سنيلليوس(٤٣) الذي اكتشفه ابن سهل وصاغه فعلاً. إن اكتشافه لهذا القانون، بالإضافة إلى تطبيق قانون الرجوع العكسي للضوء في حالة الانكسار، يظهران المسافة التي قطعها بعد بطلميوس في هذا المجال؛ فقد واجه دراسة العدسات مزوداً بهذه التقنيات التصورية.

وهكذا يبرهن أن الشعاعات الشمسية الموازية للمحور OB تنكسر على سطح القطع الزائد وأن الأشعة المنكسرة تتقارب في النقطة A (الشكلان رقما (١٩ ـ ٦) و(١٩ ـ ٧)).

---

(٤٢) أو قرينة الانكسار. (المترجم).

(٤٣) المصدر نفسه، من ص xxix إلى ص xxxiv، و Roshdi Rashed, «A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses,» *Isis*, vol. 81, no. 308 (September 1990), pp. 464-491.



الشكل رقم (١٩ ـ ٧)

ثم يبرهن أن الشعاعات الضوئية المنبثقة من البؤرة N للمجسم الزائدي القطع على السطح الزائد، والساقطة على السطح ZSU'، تدخل العدسة وتلتقي السطح ZBU' وتنتشر وصولاً إلى النقطة A؛ حيث يتم الإشعال في هذه النقطة.

وهكذا تصور ابن سهل وأنشأ مجال بحث في الحرّاقات، ويمكننا القول في الانكسارات فضلاً عن ذلك. لكن اضطراره إلى التفكير بمخروطات أخرى غير القطع المكافئ والقطع الناقص، كالقطع الزائد مثلاً، باعتباره منحنياً انكسارياً، هذا الاضطرار ساقه بشكل طبيعي إلى اكتشاف قانون سنيلليوس. وندرك، إذن، منذ الآن أن الانكساريات، عندما رأت النور على يد ابن سهل، لم تعالج إلا ما يتعلق بانتشار الضوء وذلك بمعزل عن مسائل الرؤية.

ولم يكن للعين مكان في البحث ضمن نطاق الحراقات، وكذلك كان الأمر بالنسبة إلى موضوع الرؤية. إنها، إذن، وجهة نظر موضوعية جرى اعتمادها بشكل مقصود في تحليل الظاهرة الضوئية. وقد جاء هذا العلم غنياً بالمادة التقنية، لكنه، في الواقع، كان فقيراً جداً بالمحتوى الفيزيائي الذي بدا شبه معدوم فيه ومقتصراً على بعض الاعتبارات الطاقية[٤٤] على سبيل المثال. ولم يحاول ابن سهل أبداً، على الأقل فيما وصلنا من كتاباته، أن يفسر لماذا تغير بعض الشعاعات مسارها وتتجمع عندما تنتقل إلى وسط آخر: فكان يكفيه أن يعرف كيف أن حزمة من الشعاعات الموازية لمحور العدسة المستوية ـ المحدبة والزائدية المقطع، تعطي بالانكسار حزمة متقاربة. أما فيما يتعلق بمسألة حدوث الإشعال بسبب تقارب الشعاعات، فيكتفي ابن سهل بتعريف الشعاع الضوئي على أساس قدرته على الإشعال، واضعاً مسلمة تقول بأن السخونة تتناسب مع عدد الشعاعات، وهذا ما فعله خلفاؤه على امتداد طويل من الزمن.

(٤٤) نسبة إلى طاقة. (المترجم).

ثالثاً: ابن الهيثم وإصلاح علم المناظر

بينما كان ابن سهل ينهي مقالته حول «الحراقات»، وعلى الأرجح في بغداد، كان ابن الهيثم، المولود في البصرة سنة ٩٦٥م، في حوالى العشرين من عمره. فمن غير المستغرب، إذن، أن يكون هذا الرياضي والفيزيائي الشاب قد اطلع على أعمال سلفه هذا واستشهد بها واستوحى الكثير منها[٤٥]. إن وجود ابن سهل يقلب دفعة واحدة الصورة التي رسمها المؤرخون عن ابن الهيثم باعتباره منعزلاً علمياً في الزمان والمكان وباعتبار أن أسلافه يقتصرون على الرياضيين الإسكندريين والبيزنطيين أمثال إقليدس، وأرخميدس، وبطلميوس، وأنتيميوس الترالي. وهكذا وبفضل هذا التواصل والانتساب الجديد يتوضح وجود بعض مواضيع البحث في كتابات ابن الهيثم كأبحاثه في الكاسر، والكرة المحرقة، والعدسة الكروية. كما سمح هذا التواصل بما كان متعذراً من قبل، وهو تقدير التقدم الذي أحرزه جيل من البحث في علم المناظر. وهو تقدم بالغ الأهمية، إن من الناحية التاريخية أو من الناحية المعرفية (الإبستيمولوجية)، إلى درجة أننا أصبحنا على عتبة إحدى الثورات الأولى في علم المناظر، إن لم تكن في الفيزياء.

إن إنجاز ابن الهيثم في علم المناظر، بالمقارنة مع الكتابات الرياضية اليونانية والعربية التي سبقته، يُظهر، وللنظرة الأولى، سمتين بارزتين هما الاتساع والإصلاح. وإذا أمعنا النظر بدقة نستنتج أن السمة الأولى هي الأثر المادي للسمة الثانية. ففي الواقع، قبل ابن الهيثم لم يعالج أي عالِم في بحثه هذا العدد من الميادين كما فعل هو، وهذه الميادين تعود إلى تقاليد علمية مختلفة، فلسفية ورياضية وطبية. وعناوين كتبه تدل على هذا التنوع الواسع: **ضوء القمر**، **وضوء الكواكب**، **وقوس قزح والهالة**، **والمرايا المحرقة الكروية**، **ومرايا القطع المكافئ المحرقة**، **والكرة المحرقة**، **وكتاب في صورة الكسوف**، **ونوعية الظلال**، **ومقالة في الضوء**، ناهيك عن كتابه الذائع الصيت **كتاب المناظر** الذي ترجم إلى اللاتينية في القرن الثاني عشر، والذي دُرِّس وعُقِّب عليه بالعربية واللاتينية حتى القرن السابع عشر. فقد تطرق، إذن، ابن الهيثم ليس فقط إلى المواضيع التقليدية في البحث البصري، بل أيضاً إلى مواضيع أخرى جديدة كعلم المناظر وعلم المناظر الأرصادي، والانعكاسيات، والمرايا المحرقة، وعلم الانكسار، والكرة المحرقة، وعلم المناظر الفيزيائي.

إن نظرة ثاقبة تكشف أن ابن الهيثم يتابع في أغلبية هذه الكتابات تحقيق برنامج إصلاحي في علم المناظر، وهذا البرنامج قاده بالتحديد إلى تناول مختلف المسائل كلٌ على حدة. إن العمل الأساس في هذا الإصلاح هو الفصل بوضوح، وللمرة الأولى في تاريخ

---

(٤٥) انظر: Rashed, *Dioptrique et géométrie au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī, et Ibn al-Haytham*, especially p. lxxiii.

الصورة رقم (١٩ ـ ١)

ابن الهيثم (٣٥٤ ـ ٤٣٠/ ٩٦٥ ـ ١٠٤٠)،

كتاب المناظر (اسطنبول، مخطوطة فاتح، ٣٢١٢).

يعتبر هذا الكتاب، وهو من سبع مقالات، إحدى الإضافات الأساسية في تاريخ العلوم في كل الأزمنة. ففي هذا الكتاب نجح ابن الهيثم في عزل دراسة انتشار الضوء عن دراسة الأبصار، مما مكنه من استخلاص قوانين المناظر الهندسية، وكذلك قوانين المناظر الفيزيولوجية، كما مكنه أيضاً من أن يلج موضوع المناظر الفيزيائية.

ولقد ترك هذا الكتاب بصماته على التاريخ بنتائجه العلمية وكذلك بأثره على علماء الحضارة الاسلامية وعلى الكتابات اللاتينية ومؤلفات عصر النهضة والقرن السابع عشر الخاصة بهذا الموضوع. فقد قرأ وتعلم على ترجمته اللاتينية منذ أواخر القرن الثاني عشر تقريباً كل من اشتغل بالمناظر أو بالفيزياء.

ونجد في هذه الصورة، صورة غلاف الكتاب.

هذا العلم، بين شروط انتشار الضوء وشروط رؤية الأجسام[٤٦]. لقد أوصل هذا الإصلاح، من جهة، إلى إعطاء مرتكز فيزيائي لقواعد انتشار الضوء ـ المقصود هنا هو مقارنة أقامها رياضياً بين نموذج ميكانيكي لحركة كرة صلبة ترمى على حاجز وبين حركة الضوء[٤٧] ـ كما أوصل، من ناحية أخرى، إلى العمل هندسياً في جميع الحالات وبواسطة الملاحظة الاختبارية. ولم يعد لعلم المناظر ذلك المعنى الذي عرف به منذ وقت قريب، وهو علم هندسة الإدراك البصري. فقد بات يشتمل من الآن وصاعداً على قسمين هما: نظرية للرؤية مقرونة بفيزيولوجيا العين وبسيكولوجيا الإدراك، ونظرية للضوء يرتبط بها علم المناظر الهندسي وعلم المناظر الفيزيائي، ومما لا شك فيه أنه لا تزال توجد هنا آثار من علم المناظر القديم، منها على سبيل المثال بقاء المصطلحات القديمة وكذلك وجود نزعة، أبرزها مصطفى نظيف[٤٨]، تتمثل في طرح المسألة بالنسبة إلى الرؤية، من دون أن يكون ذلك ضرورياً في الحقيقة. لكن يجب ألا تخدعنا هذه البقايا لأنه لم يعد لها الوقع نفسه ولا المعنى نفسه. إن تنظيم كتاب المناظر بات يَعكس الوضع الجديد. ففيه نجد فصولاً مخصصة بأكملها لانتشار الضوء (كالفصل الثالث من المقالة الأولى والمقالات ابتداء من الرابعة وصولاً إلى السابعة). وتعالج فصول أخرى الرؤية والمسائل المتعلقة بها. وقد توصل هذا الإصلاح، من بين ما توصل إليه، إلى إبراز مسائل جديدة لم تُطرح أبداً من قبل كمسألة (Alhazen) (الإسم اللاتيني لابن الهيثم) الشهيرة في الانعكاس وتفحص العدسة الكروية، والكاسر الكروي، ليس فقط كحراقات، بل كأجهزة بصرية في علم انكسار الضوء؛ كما توصل الإصلاح إلى المراقبة التجريبية ليس كتطبيق للتقصي فحسب، بل كمعيار للبرهان في علم البصريات أيضاً، وبشكل أعم في الفيزياء.

ولنتبع الآن تحقيق هذا الإصلاح في كتاب المناظر وفي بقية المقالات. يبدأ هذا الكتاب برفض وبإعادة للصياغة. يرفض ابن الهيثم على الفور جميع أشكال مذهب الشعاع البصري ليقف إلى جانب الفلاسفة المدافعين عن المذهب الإدخالي لأشكال المرئيات. لكن اختلافاً رئيساً يبقى بينه وبين هؤلاء الفلاسفة، كمعاصره ابن سينا: فابن الهيثم لا يعتبر أن الأشكال التي تراها العين هي «كليات» تنبعث من الجسم المرئي تحت تأثير الضوء، بل

---

(٤٦) انظر: Roshdi Rashed: «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, no. 4 (1969-1970), pp. 271-298, et «Lumière et vision: L'Application des mathématiques dans l'optique d'Ibn al-Haytham,» dans: René Taton, ed., *Roemer et la vitesse de la lumière* (Paris: Vrin, 1978), pp. 19-44.

(٤٧) Rashed, «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham,» pp. 281 et sqq.

(٤٨) انظر مثلاً: مصطفى نظيف، الحسن بن الهيثم: بحوثه وكشوفه البصرية، جامعة فؤاد الأول، كلية الهندسة؛ المؤلف رقم ٣، ٢ ج (القاهرة: مطبعة نوري، ١٩٤٢ ـ ١٩٤٣)، ص ٧٦٣.

يعتبرها أشكالاً قابلة للتحليل إلى عناصرها، أي أن هناك شعاعاً ينبعث من كل نقطة من الجسم المرئي نحو العين. وأصبحت هذه الأخيرة من دون روح، فهي أداة بصرية بسيطة. فالمسألة بأكملها، إذن، هي في تفسير الطريقة التي تسمح للعين برؤية الجسم المرئي بواسطة هذه الأشعة المنبعثة من كل نقطة من الجسم.

يخصص ابن الهيثم، بعد فصل تمهيدي قصير، فصلين متتاليين هما الثاني والثالث من كتاب المناظر لإرساء قواعد نظريته الجديدة. ويحدد في أحد هذين الفصلين شروط إمكانية الرؤية، في حين يحدد في الآخر شروط إمكانية الضوء وانتشاره. تبدو هذه الشروط في كلتا الحالتين كمفاهيم تجريبية، أي أنها ناتجة عن الملاحظة المنظمة والاختبار المراقَب، والشروط هذه هي ضوابط لإعداد نظرية الرؤية، وبالتالي لتأسيس نمط جديد في علم المناظر.

إن شروط الرؤية التي أحصاها ابنُ الهيثم ستة:

أ وب ـ يجب أن يكون الجسم المرئي مضيئاً بنفسه أو مضاء بمصدر ضوئي آخر.

ج ـ يجب أن يكون مواجهاً للعين، أي أننا نستطيع وصل كل نقطة منه بالعين بواسطة خط مستقيم.

د ـ أن يكون الوسط الفاصل بينه وبين العين شفافاً، من دون أن يعترضه أي عائق أكمد.

هـ ـ يجب أن يكون الجسم المرئي أكثر كمدة من هذا الوسط.

و ـ يجب أن يكون ذا حجم مناسب لدرجة الإبصار(٤٩).

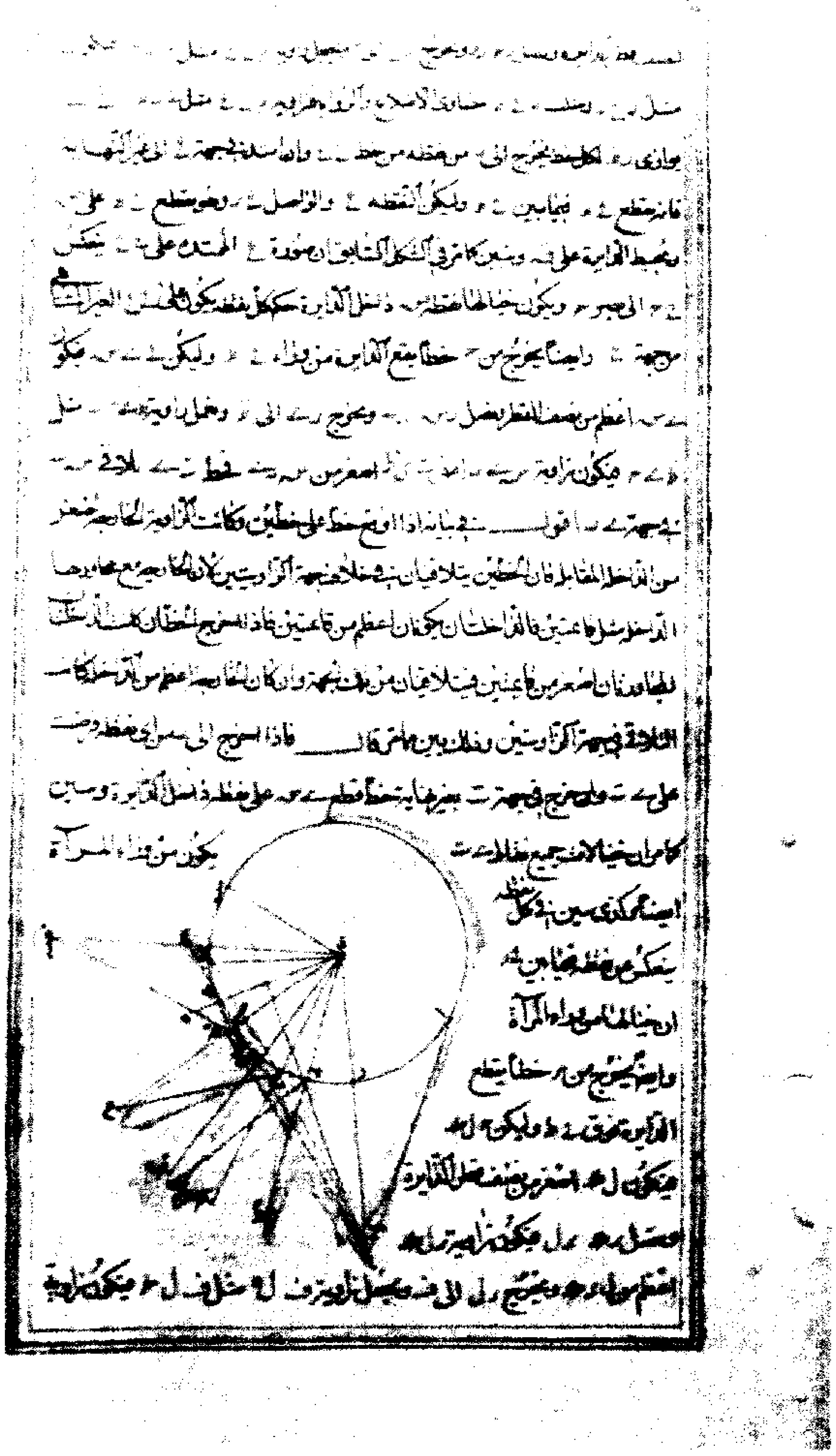
ويكتب ابن الهيثم ما معناه أن عدم توفر هذه الشروط يجعل الرؤية غير ممكنة.

نلاحظ، إذن، أن هذه الشروط لا تعود، كما هو الحال في علم المناظر القديم، إلى شروط الضوء وانتشاره. ومن أهم هذه الشروط القديمة التي وضعها ابن الهيثم ما يلي: يوجد الضوء بشكل مستقل عن الرؤية وخارجاً عنها؛ يتحرك الضوء بسرعة كبيرة جداً ولكنها ليست لحظية وفجائية؛ ويفقد من شدة وهجه بقدر ما يبتعد عن المصدر؛ إن ضوء المصدر جوهري ــ وضوء الجسم المضاء ثانوي أو عابر ــ وكلاهما ينتشران على الأجسام المحيطة بهما، ويدخلان الأوساط الشفافة، وينيران الأجسام الكمداء التي، بدورها، ترسل الضوء؛ وينتشر الضوء من كل نقطة من الجسم المضيء أو المضاء تبعاً لخطوط مستقيمة في الأوساط الشفافة وفي جميع الاتجاهات؛ هذه الخطوط الوهمية التي بموجبها تنتشر الأضواء تشكل معها الشعاعات؛ وتكون هذه الخطوط متوازية أو متقاطعة، ولا تندمج الأضواء في

---

(٤٩) أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، كتاب المناظر، تحقيق ونشر علي أ. صبرا (الكويت: معهد المخطوطات العربية، ١٩٨٣)، المقالات الأولى ـ الثالثة، ص ١٨٩.

أي من الحالتين؛ وتنتشر الأضواء المنعكسة أو المنكسرة وفق خطوط مستقيمة في اتجاهات معينة. ونستطيع أن نرى بسهولة من أنّ أياً من هذه المفاهيم لا يرتبط بالرؤية.



الصورة رقم (١٩ ـ ٢)

كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٢٥٩٨).

بحث ابن الهيثم في المقالة السادسة من كتاب المناظر في انخداع البصر نتيجة لعملية الانعكاس، كما أنه بحث في أخطاء البصر التي تحصل في المرايا المسطحة وفي المرايا الكروية والمرايا الأسطوانية والمرايا المخروطية من محدبة ومقعرة.

وهذه الصورة تبين حالة المرايا الكروية المقعرة، كما لخصها الفارسي.

ووفقاً لابن الهيثم توجد الألوان مستقلة عن الضوء في الأجسام الكمداء، ونتيجة لذلك فإن الضوء وحده المنبعث من هذه الأجسام ـ ضوء ثانوي أو عابر ـ يصحب الألوان التي تنتشر عندئذٍ حسب نفس المبادئ ونفس قوانين الضوء. وكما أوضحنا في مكان آخر، فإن مذهب الألوان هذا هو الذي فرض على ابن الهيثم تنازلات للتقليد الفلسفي، وأرغمه على الاحتفاظ بلغة «الأشكال» التي سبق أن أفرغها من محتواها عندما كان يعالج الضوء فقط.

يجب على نظرية الرؤية مستقبلاً أن تستجيب ليس فقط للشروط الستة للرؤية، بل أيضاً لشروط الضوء وانتشاره. ويخصص ابن الهيثم ما بقي من المقالة الأولى من كتاب المناظر والمقالتين اللتين أعقبتاها لصياغة هذه النظرية، حيث يستعيد فيزيولوجية العين وبسيكولوجية الإدراك كجزء متكامل من نظرية الإدخال الجديدة هذه. وسندرس هذه النظرية لاحقاً إذ لا نتطرق إليها هنا.

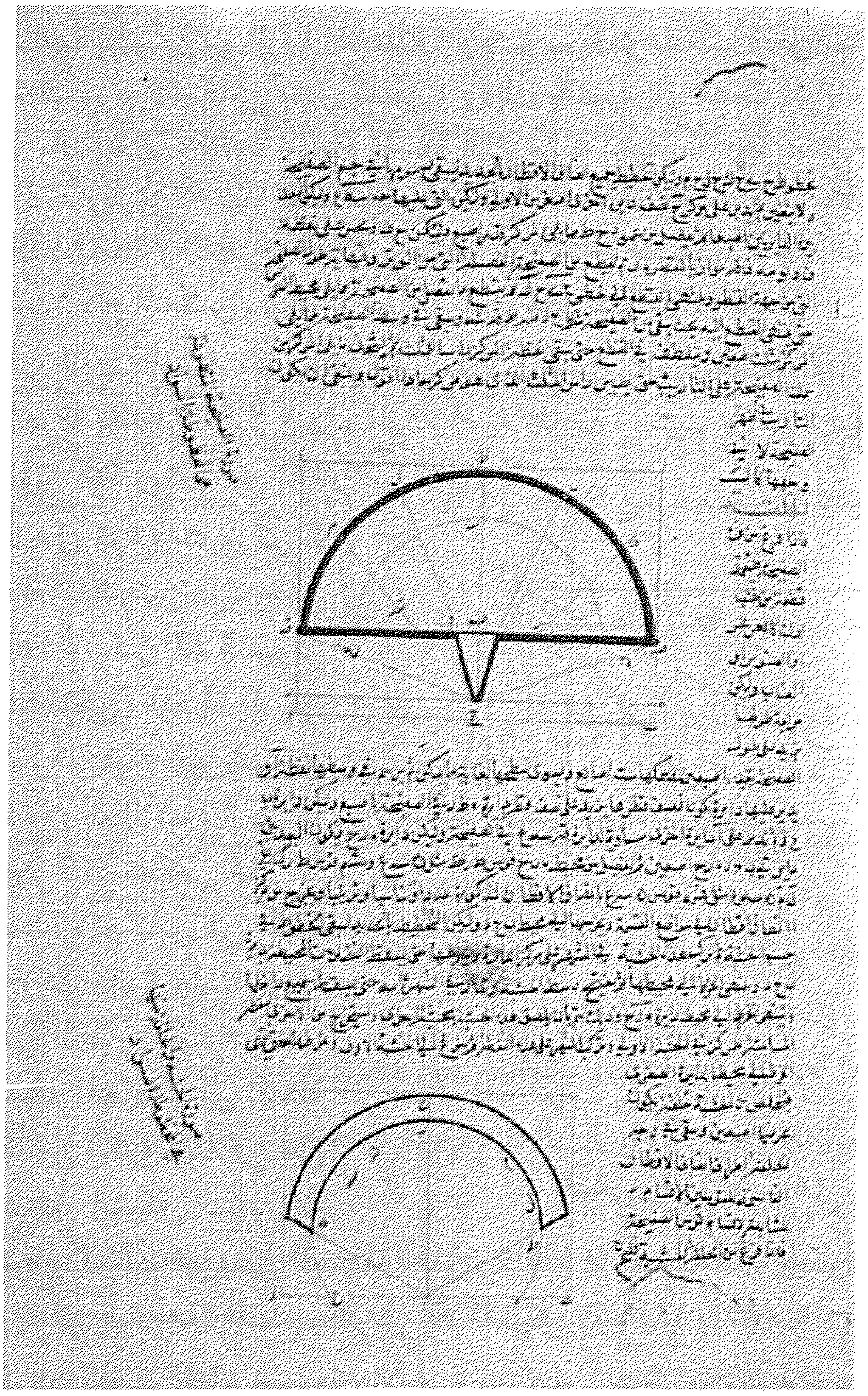
تعالج المقالات الثلاث من كتاب المناظر ـ من المقالة الرابعة وحتى السادسة ـ علم انعكاس الضوء. والواقع أن هذا المجال، قديم قدم علم المناظر نفسه، وقد درسه بطلميوس باستفاضة في مناظره، لكنه لم يكن في يوم من الأيام موضع دراسة موسعة كتلك التي قام بها ابن الهيثم. وإضافة إلى مقالاته الثلاث الضخمة في مؤلفه كتاب المناظر، خصص مقالات أخرى مكملة لها أثناء بحثه لمسائل تتعلق بعلم الانعكاس كمقالة المرايا المحرقة. وتتميز دراسة ابن الهيثم في الانعكاس، من بين سمات أخرى، بإدخال مفاهيم فيزيائية لتفسير مفاهيم معروفة، وفي نفس الوقت للإمساك بظواهر جديدة. وخلال هذه الدراسة يطرح ابن الهيثم على نفسه مسائل جديدة، كتلك المسألة التي تحمل تحديداً اسمه(٥٠).

لنأخذ بعض محاور بحثه هذا في الانعكاس. إنه يعطي القانون ويفسره بواسطة نموذج ميكانيكي ذكرناه سابقاً. ثم يدرس هذا القانون لمختلف المرايا: المستوية منها والكروية، والأسطوانية، والمخروطية. ويعير اهتماماً قبل كل شيء، وفي كل حالة منها، إلى تحديد المستوي المماس على سطح المرآة في نقطة السقوط، وذلك لكي يحدد المستوي المتعامد مع هذا السطح، والذي يحوي الشعاع الساقط والشعاع المنعكس والناظم في هذه النقطة. هنا وكما هو الأمر في دراساته الأخرى، ولكي يتحقق من النتائج بالتجربة، نراه يصمم ويصنع جهازاً استوحاه من الجهاز الذي أعده بطلميوس لدراسة الانعكاس، لكنه جاء أكثر تعقيداً(٥١) ويناسب جميع الحالات. ويدرس ابن الهيثم أيضاً صورة

---

(٥٠) المقصود هو «مسألة ابن الهيثم» الشهيرة والتي حلّلها ببراعة مصطفى نظيف. انظر: نظيف، المصدر نفسه، ص ٤٨٧ ـ ٥٢١.

(٥١) المصدر نفسه، ص ٦٨٥ ـ ٦٩٠.



الصورة رقم (١٩ ـ ٣)

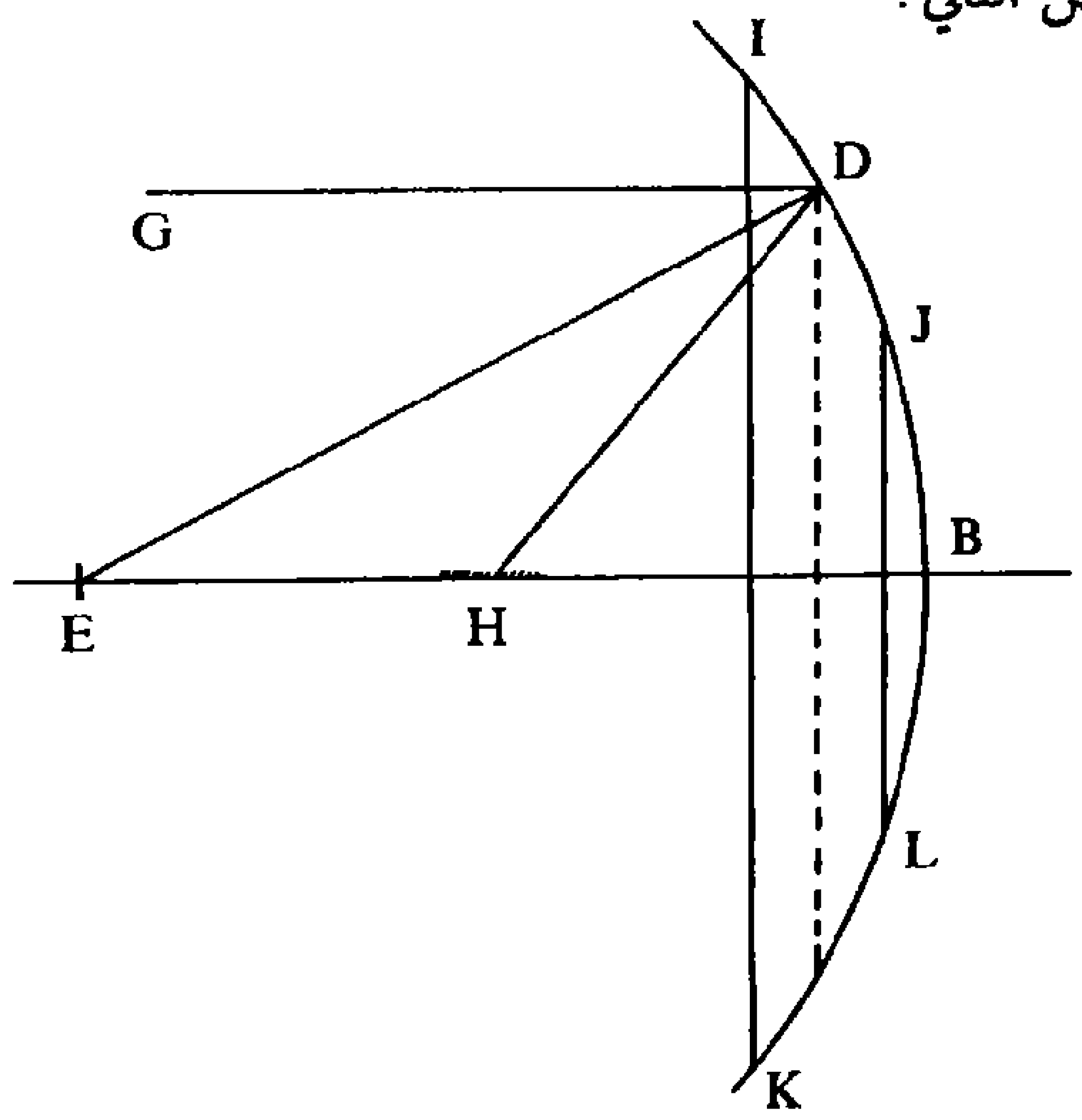
كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(طهران، مخطوطة سبهسلار، ٥٥١).

قام ابن الهيثم بعمل عدة آلات علمية لدراسة ظواهر انتشار الضوء، وذلك في المقالة الرابعة من كتابه في المناظر الذي يشرح فيه بالتفصيل كيف تعمل احدى هذه الآلات وكيف يكون استعمالها. وهذه الآلة هي كما يسميها «آلة الانعكاس» تُستخدم للتحقق من قانون الانعكاس في الأوضاع المختلفة. والجزء الأول منها ـ في أعلى الصورة ـ من نحاس، في حين أن الجزء الأسفل من خشب لدن.

الجسم وموضعها بالنسبة إلى المرايا المختلفة. ويهتم بمجموعة كبيرة من المسائل المتعلقة بتحديد زاوية السقوط لانعكاس معين مُعطى، وذلك بالنسبة إلى مختلف المرايا، وبالعكس. وطرح أيضاً، بالنسبة إلى مختلف المرايا، المسألة التي ارتبطت باسمه وهي التالية: لدينا مرآة وأمامها نقطتان، وينبغي تحديد نقطة ما على سطح هذه المرآة بحيث إن المستقيمين اللذين يصلان بين هذه النقطة والنقطتين المعطاتين سابقاً يكون أحدهما محدداً لاتجاه الشعاع الساقط والآخر لاتجاه الشعاع المنعكس. وقد توصل إلى حل هذه المسألة المعقدة(٥٢).

يتابع ابن الهيثم أبحاثه الانعكاسية في مقالات أخرى ألف بعضها بعد كتاب المناظر مثل **المرايا المحرقة بالدائرة**(٥٣). ولهذه المقالة أهمية خاصة، حيث يكشف فيها عن الزيغ الكروي الطولي؛ كما يبرهن فيها الافتراض التالي:



الشكل رقم (١٩ ـ ٨)

لنأخذ على كرة ذات مركز E منطقة محددة بدائرتين ذات محور مشترك EB؛ وليكن IJ القوس المولد لهذه المنطقة، والنقطة D هي منتصفه. برهن ابن الهيثم في افتراضين سابقين أن الأشعة الساقطة الموازية للمحور EB تنعكس على كل دائرة لتمر بعد الانعكاس في نقطة من المحور، وكل دائرة تملك نقطة خاصة بها على المحور. ويبرهن هنا أن جميع الأشعة، المنعكسة على المنطقة المذكورة سابقاً من الكرة، تتلاقى على المقطع المحدد على الشكل التالي: إذا كان GD الشعاع الساقط الوسطي للمنطقة، نقرن النقطة H بالنقطة D، ويكون المقطع على جانبي H. ويتعلق طول هذا المقطع بالقوس IJ (الشكل رقم (١٩ ـ ٨)).

يخصص ابن الهيثم المقالة السابعة والأخيرة من كتاب المناظر للانكسار. وكما فعل في دراسته للانعكاس، فإنه يُدخل في هذه المقالة عناصر تفسير فيزيائي ـ ميكانيكي ـ لعملية الانكسار. ثم يختم مقالته هذه برسائل مثل **الكرة المحرقة** و**مقالة في الضوء**، حيث يعود إلى

---

(٥٢) المقصود هو «مسألة ابن الهيثم». انظر: الهامش رقم (٥٠) السابق.

(٥٣) **المرايا المحرقة بالدائرة**، المقالة الرابعة في: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، **مجموع الرسائل** (حيدر آباد: [د.ن.]، ١٩٣٨ ـ ١٩٣٩)؛ انظر أيضاً: Eilhard E. Wiedemann, «Ibn al-Haythams Schrift über die Sphärischen Hohlspiegel,» *Bibliotheca Mathematica*, 3ème série, vol. 10 (1909- 10), pp. 393-407, and H. J. J. Winter and W. Arafat, «A Discourse on the Concave Spherical Mirror by Ibn al-Haytham,» *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, 3ème série (Science), vol. 16 (1950), pp. 1-6.

مفهوم الوسط على غرار ابن سهل.

يبدأ ابن الهيثم مقالته السابعة هذه من **كتاب المناظر** بالاستناد إلى قانونين نوعيين للانكسار، وإلى عدة قواعد كمية، مثبتة كلها بالتجربة بواسطة جهاز كان قد صممه وصنعه كما فعل في حالة الانعكاس السابقة. وينص القانونان النوعيان والمعروفان من سلفيه بطلميوس وابن سهل على ما يلي:

١ ـ إن الشعاع الساقط، والشعاع المنكسر، والناظم في نقطة الانكسار تقع جميعها في المستوي نفسه؛ يقترب الشعاع المنكسر من الناظم إذا نفذ الضوء من وسط أقل كمدة إلى وسط أكثر كمدة، ويبتعد عن الناظم إذا نفذ الضوء من وسط أكثر كمدة إلى وسط أقل كمدة.

٢ ـ مبدأ رجوع الضوء العكسي (العودة المتطابقة).

ولكنه بدل أن يتابع الخطوات التي سار عليها سلفه ابن سهل بفضل اكتشافه لقانون سنيلليوس، نراه يعود إلى النسب بين الزوايا ليصوغ قواعده الكمية:

أ ـ تتغير زوايا الانحراف بشكل مباشر مع زوايا السقوط: فإذا أخذنا في الوسط n_1، $i' > i$، يكون معنا في الوسط n_2، $d' > d$ (i هي زاوية السقوط، وr هي زاوية الانكسار، وd هي زاوية الانحراف، $d = |i - r|$).

ب ـ إذا زادت زاوية السقوط بمقدار ما، فإن زاوية الانحراف تزداد بمقدار أقل: إذا كانت $i' > i$، تكون $d' > d$، ونحصل على $d' - d < i' - i$.

ج ـ تزداد زاوية الانكسار بازدياد زاوية السقوط: فإذا كانت $i < i'$، نحصل على $r' > r$.

د ـ إذا نفذ الضوء من وسط أقل غلظاً (كمدةً) إلى وسط أكثر غلظاً، $n_1 < n_2$، يكون معنا في هذه الحالة $d < \frac{i}{2}$؛ وفي الانتقال العكسي، يكون معنا $d < \frac{i+d}{2}$، ونحصل على $2i > r$.

هـ ـ يعود ابن الهيثم إلى القواعد التي صاغها ابن سهل في مقالته **البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء**. ويؤكد أنه إذا دخل الضوء انطلاقاً من وسط n_1، بنفس زاوية السقوط، إلى وسطين مختلفين n_2 وn_3، عندها تختلف زاوية الانحراف لكل من هذين الوسطين وذلك تبعاً لاختلاف الغلظ (الكمدة). فمثلاً، إذا كان الوسط n_3 أشد غلظاً من الوسط n_2، عندها تكون زاوية الانحراف في n_3 أكبر منها في n_2. وبالعكس، إذا كان الوسط n_1 أشد غلظاً من n_2، وإذا كان n_2 أشد غلظاً من n_3، فتكون زاوية الانحراف في n_3 أكبر منها في n_2.

وخلافاً لما اعتقده ابن الهيثم، فإن هذه القواعد الكمية ليست جميعها صالحة في كل

الأحوال(٥٤). إلا أنها مثبتة في إطار الشروط الاختبارية التي عالجها ابن الهيثم في كتاب المناظر، أي في الأوساط التالية: الهواء والماء والبلور وبزوايا سقوط لا تتجاوز ٨٠ درجة.

يخصص ابن الهيثم جزءاً أساسياً من مقالته السابعة لدراسة صورة جسم ما بواسطة الانكسار، وبخاصة إذا كان السطح الفاصل بين الوسطين مستوياً أو كروياً. وخلال هذه الدراسة يتوقف عند الكاسر الكروي وعند العدسة الكروية لكي يتابع، بطريقة أو بأخرى، بحث ابن سهل، ولكن مع تعديل هذا البحث بعمق. إن دراسة الكاسر والعدسة هذه موجودة فعلاً في هذا الفصل المخصص لمسألة الصورة، وليست مفصولة عن مسألة الرؤية. وفيما يتعلق بالكاسر، فإن ابن الهيثم يميز بين حالتين للشكل، تبعاً لموقع المصدر الضوئي الذي يمثل نقطة والذي يقع على مسافة متناهية، أي تبعاً لوجوده من الجهة المقعرة أو من الجهة المحدبة لسطح الكاسر الكروي(٥٥).

ثم يدرس العدسة الكروية مولياً اهتمامه بشكل خاص للصورة التي تعطيها العدسة عن الجسم. إلا أن دراسته هذه تقتصر على حالة واحدة وهي عندما يكون الجسم والعين على نفس القطر. وبتعبير آخر، فهو يدرس من خلال عدسة كروية صورة جسم موضوع في مكان خاص على القطر الذي يمر بالعين. ومساره يذكرنا بمسار ابن سهل في دراسة العدسة محدبة الوجهين زائدية المقطع. ويأخذ ابن الهيثم كاسرين منفصلين، ويطبق عليهما النتائج التي حصل عليها سابقاً. ويستخدم خلال دراسته للعدسة الكروية الزيغ الكروي لنقطة ما على مسافة متناهية في حالة الكاسر، لكي يدرس صورة مقطع يشكل جزءاً من المقطع الذي يحدده الزيغ الكروي.

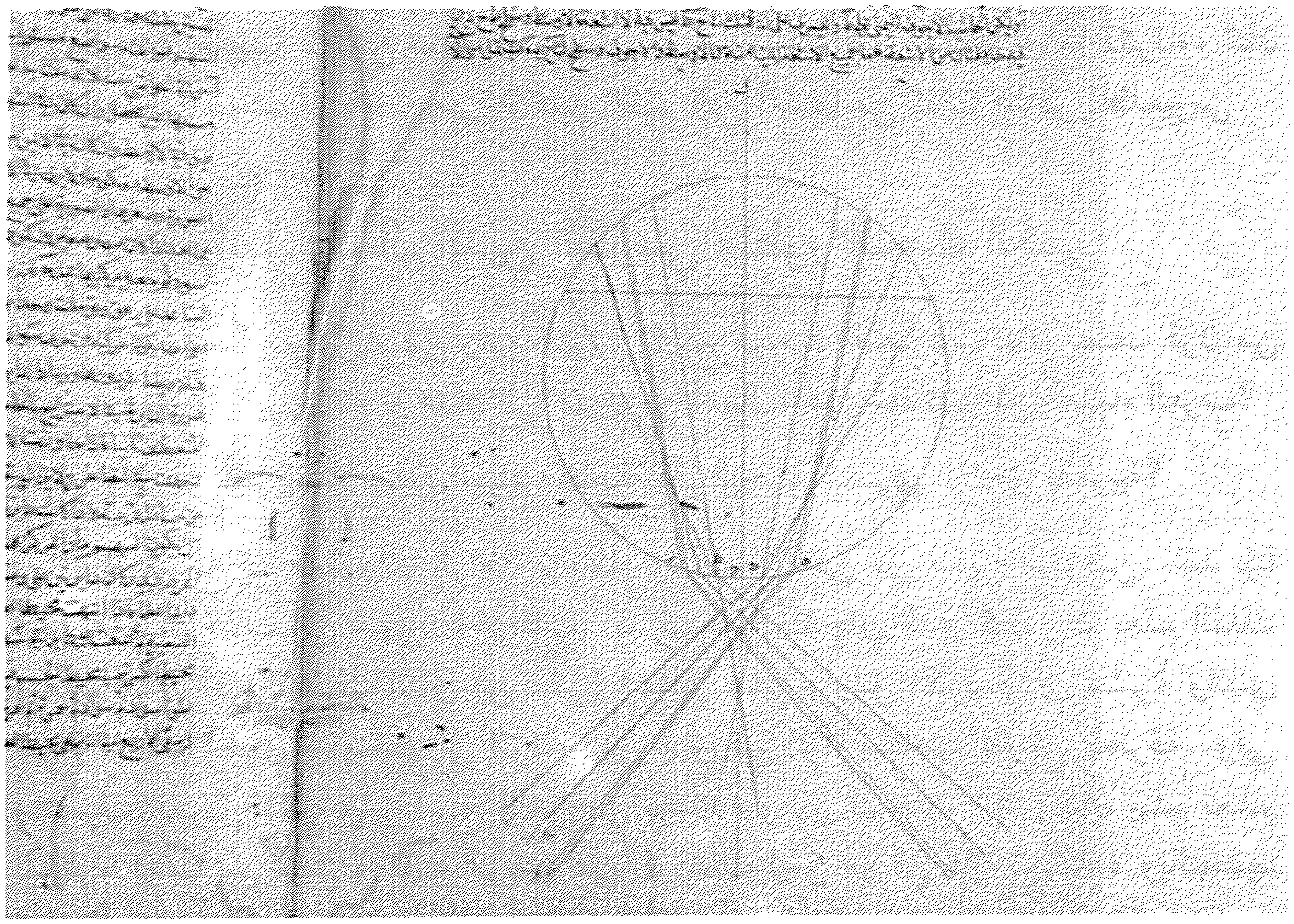
وفي مقالته **الكرة المحرقة**، التي تعتبر ذروة في البحث البصري الكلاسيكي، يوضح ابن الهيثم ويدقق بعض النتائج على العدسة الكروية التي حصل عليها في كتاب **المناظر**. ويرجع من جهة أخرى في كتابه إلى مسألة الإشعال بواسطة هذه العدسة. ففي هذه المقالة نجد أول دراسة مفصلة عن الزيغ الكروي للأشعة المتوازية والساقطة على كرة من البلور والمتعرضة لانكسارين. ويستعمل خلال دراسته هذه قيماً عددية مأخوذة من كتاب **المناظر** لبطلميوس لزاويتي السقوط ٤٠ و٥٠ درجة. ويعود إلى قيم الزوايا بدل أن يطبق قانون سنيلليوس المذكور ليفسر ظاهرة التركيز البؤري للضوء المنتشر وفق مسارات موازية لقطر الكرة.

وكما فعل ابن الهيثم في المقالة السابعة من كتاب **المناظر** أو في بعض الكتابات الأخرى حول الانكسار، فإنه يعرض في مؤلفه **الكرة المحرقة** بحثه بطريقة فيها شيء من

---

(٥٤) انظر: نظيف، المصدر نفسه، ص ٧٢٠ - ٧٢٣، و Roshdi Rashed, «Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham (Alhazen),» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 21 (1968), pp. 201-204.

(٥٥) انظر: Rashed, *Dioptrique et géométrie au X^e siècle: Ibn Sahl, Ibn al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, chap. 2.



الصورة رقم (١٩ ــ ٤)

كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(طهران، مخطوطة سبهسلار، ٥٥١).

من بين الظواهر الضوئية المهمة التي درسها ابن الهيثم ظاهرة انعطاف الأشعة الضوئية في الكرة الشفافة. ففي مقالته عن **الكرة المحرقة** استطاع أن يصل إلى مفهوم الزيغ الكروي ويكتشفه. هذه الصورة تبين تلك الدراسة التي استقاها الفارسي من ابن الهيثم.

المفارقة. ففي الوقت الذي يبذل فيه عناية كبرى لاستنباط وتركيب ووصف الأجهزة التجريبية التي تعتبر متقنة بالنسبة إلى ذلك العصر والتي بإمكانها تحديد القيم العددية، نراه يتجنب، في معظم الحالات، إعطاء هذه القيم. وعندما يضطر إلى استعمال هذه القيم، كما هي الحالة في **الكرة المحرقة** فإنه يستعملها بإيجاز واحتراز. أما هذا التصرف فربما يعود لسببين على الأقل. الأول هو نمط الممارسة العلمية نفسه آنذاك، إذ يبدو أن الوصف الكمي لم يكن بعد قاعدة ضرورية. والسبب الثاني يتعلق، من دون شك، بالسبب الأول، فالأجهزة التجريبية لم تكن تعطي سوى قيم تقريبية. لذلك، استناداً إلى ما ذكرناه، كان باستطاعة ابن الهيثم أن يأخذ بعين الاعتبار القيم التي أخذها من كتاب **المناظر** لبطلميوس.

رابعاً: كمال الدين الفارسي وتطور البحث الكمي

لقد تتبعنا مع ابن سهل وابن الهيثم تاريخ البحث البصري خلال نصف قرن من الزمن. فما هو تأثير ما قام به هذان الرياضيان من أعمال، على خلفائهما من العلماء العرب؟

وما هو تأثير إصلاح ابن الهيثم بخاصة على البحث البصري اللاحق بالعربية؟

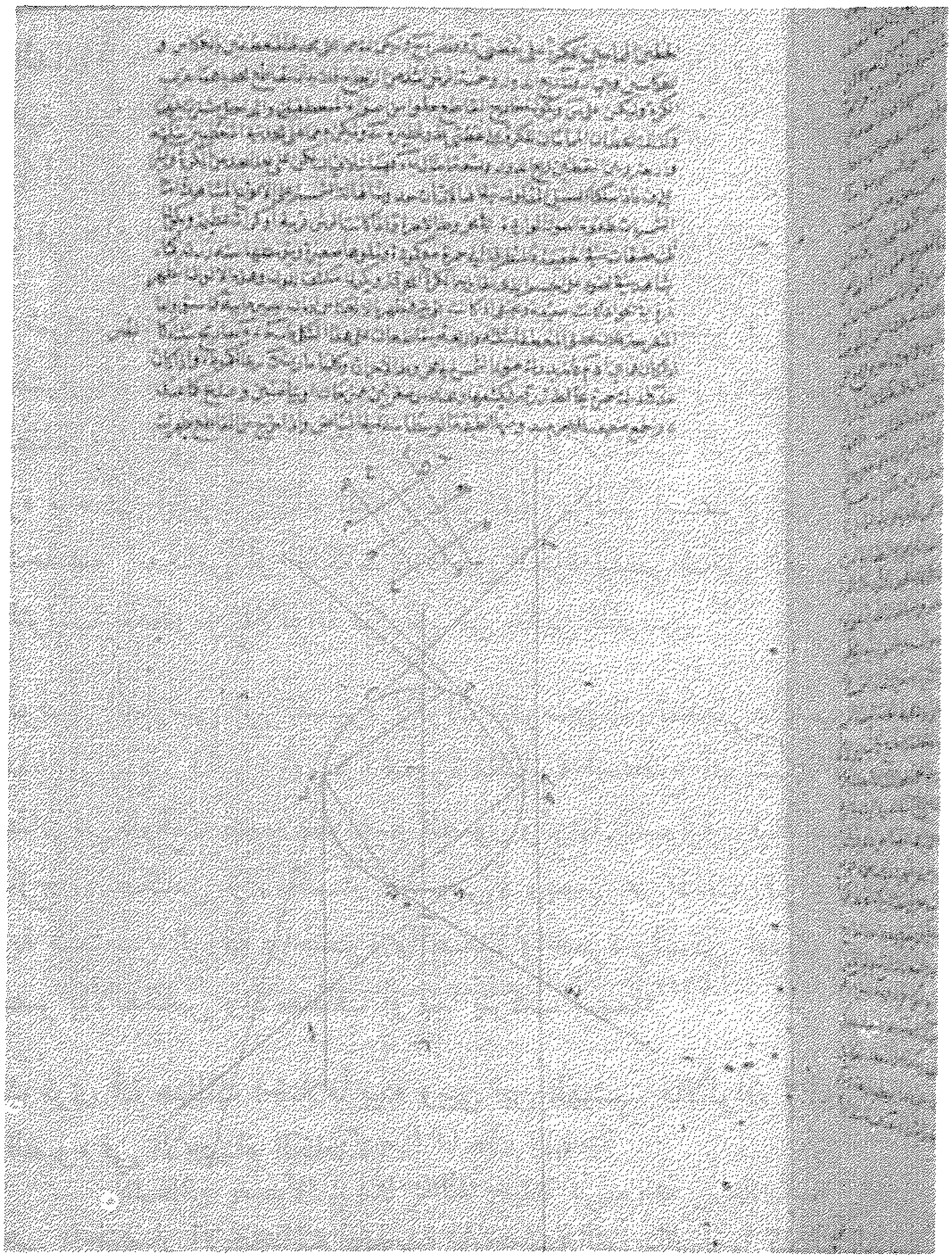
لا تسمح لنا معلوماتنا الراهنة بإعطاء الجواب الشافي على هذين السؤالين. لقد بيّنا فيما تقدّم أن كتاب ابن سهل، **الحراقات**، قد نسخه الخُندجاني الذي كان يهتم بعلم الفلك وبعلم المناظر في النصف الثاني من القرن الحادي عشر وأوائل القرن الثاني عشر، والذي شرح أعمالاً أخرى، كبحث أبي الوفاء البوزجاني في المرآة مكافئية القطع المحرقة. وفي منتصف القرن الثاني عشر نسخ قاضٍ من بغداد هو ابن المرخِّم، الذي كان يهتم بعلم المناظر، كتاب ابن سهل ومقالته **البرهان على أن الفلك ليس هو في غاية الصفاء**، وبالتحديد انطلاقاً من نسخة ابن الهيثم[٥٦]. إن إشارتنا إلى هذه الآثار تهدف إلى إظهار مدى خطورة الاستنتاج بأن كتابات ابن سهل وابن الهيثم كانت مهملة من قبل خلفائهما (نشير إلى أن اكتشاف مقالة ابن سهل لم يمر عليه أكثر من عشر سنوات). وتجدر الاشارة من جهة أخرى إلى أن بعض مؤلفي الكتب المخصصة للتعليم وليس للبحث، كنصير الدين الطوسي (ت١٢٧٠م)، قد استمروا في شرح إقليدس.

إن أول مساهمة وصلت إلينا من مدرسة ابن الهيثم تعود إلى كمال الدين الفارسي، المولود سنة ١٢٦٧م في بلاد فارس والمتوفى في ١٢ كانون الثاني/يناير ١٣١٩م. لقد كتب هذا الأخير «مراجعة» لـ كتاب **المناظر** لابن الهيثم[٥٧]، أي شرحاً تفسيرياً وناقداً أحياناً. كما فعل الشيء نفسه بالنسبة إلى مقالات أخرى للعالم نفسه ولا سيما **الكرة المحرقة** وقوس

(٥٦) المصدر نفسه، من ص cxxxix الى ص cxliii.

(٥٧) كمال الدين أبو الحسن الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**، ٢ج (حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف، ١٣٤٧ ـ ١٣٤٨ هـ/١٩٢٨ ـ ١٩٣٠م).

قزح. وقد تابع الفارسي في جميع هذه الكتابات تحقيق إصلاح ابن الهيثم، وتعارض معه أحياناً، ونجح حيث فشل سلفه: كما هي الحالة في تفسير قوس قزح. والى هذا النجاح المهم ـ إذ كان أول تفسير صحيح لشكل قوس قزح ـ يضاف تقدم في فهم ظاهرة الألوان. علاوة على ذلك، استعاد الفارسي البحث الكمي الذي أطلقه ابن الهيثم، ليعطيه مدى جديداً وليوصل مشروع سلفه إلى الهدف المنشود.



الصورة رقم (١٩ ـ ٥)

كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(طهران، مخطوطة سبهسلار، ٥٥١).

نجح كمال الدين الفارسي في شرح ظاهرة قوس قزح قبل أنطوان دو دومينيس (Antoine de Dominis) وديكارت، ودرس أيضاً مسألة الهالة.

وهذه الصورة تبين «الهالة البيضاء».

وقد أعطى الفارسي في شرحه لمقالة ابن الهيثم الكرة المحرقة دراسة كمية بقيت لفترة طويلة من الزمن الأكثر تطوراً. لقد بحث الفارسي عن خوارزمية تستطيع، من جهة، التعبير عن الارتباط الدالي بين زوايا السقوط وزوايا الانحراف، لكي يستنتج منها بالتالي قيم الانحراف لأي سقوط ينشأ بين وسطين محددين؛ ومن جهة أخرى، فإن هذه الخوارزمية انطلاقاً من عدد صغير من قيم القياسات ـ قيمتين ـ تستطيع استكمال جميع درجات الفسحة. كانت طريقة الفارسي التالية: إنه يقسم الفسحة $[0°, 90°]$ إلى فسحتين صغيرتين، ثم يقارب الدالة $f(i) = \frac{d}{i}$ بدالة أفينية على الفسحة $[40°, 90°]$ وبدالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية على الفسحة الباقية $[0°, 40°]$. ثم يصل ما بين الاستكمالين، فارضاً على الفرق الأول أن يكون نفسه في النقطة $i = 40°$، وبتعبير آخر، فارضاً على المنحنيين أن يكونا مماسين في هذه النقطة. ونلاحظ أن الفارسي قد استعار هذه الطريقة من الفلكيين(٥٨).

وبعد شرحه هذا حول الكرة المحرقة استعاد الفارسي تفسير قوس قزح. ولكي يُدخل المعايير الاختبارية، حيث فشل ابن الهيثم في ذلك، نراه يمتنع عن الدراسة المباشرة والكاملة للظاهرة، لكي يطبق بتأنٍّ طريقة النماذج: فالكرة الزجاجية المملوءة بالماء تمثل نموذج قطرة ماء في الجو. وبهذه المقارنة المؤكدة رياضياً استطاع الفارسي البدء بدراسة انكسارين يتخللهما انعكاس أو انعكاسان داخل الكرة ليفسر شكل القوس الرئيس والقوس الثانوي، والترتيب المعكوس للألوان في كل من هذين القوسين(٥٩).

وقد توصل الفارسي في تفسيره لألوان القوسين إلى تعديل مذهب ابن الهيثم، على الأقل في هذا الموضع. فأثناء تجربة الحجرة المظلمة استطاع أن يثبت أن حدوث وتعدد الألوان يرتبطان في الوقت نفسه بمواضع الصور وقوتها الضوئية. فبالنسبة إليه تتعلق ألوان القوس بتمازج الانعكاس والانكسار الضوئي، ويعبر عن ذلك بقوله: «التقازيح ألوان مختلفة متقاربة فيما بين الزرقة والخضرة والصفرة والحمرة والدكن تحدث من ضوء نيّر قوي واردة إلى البصر بالانعكاس والانعطاف أو بما يتركب منهما»(٦٠).

وبذلك نرى أن هنالك اختلافاً بينه وبين ابن الهيثم: فالألوان لم تعد موجودة بشكل مستقل عن الضوء في الأجسام الكامدة.

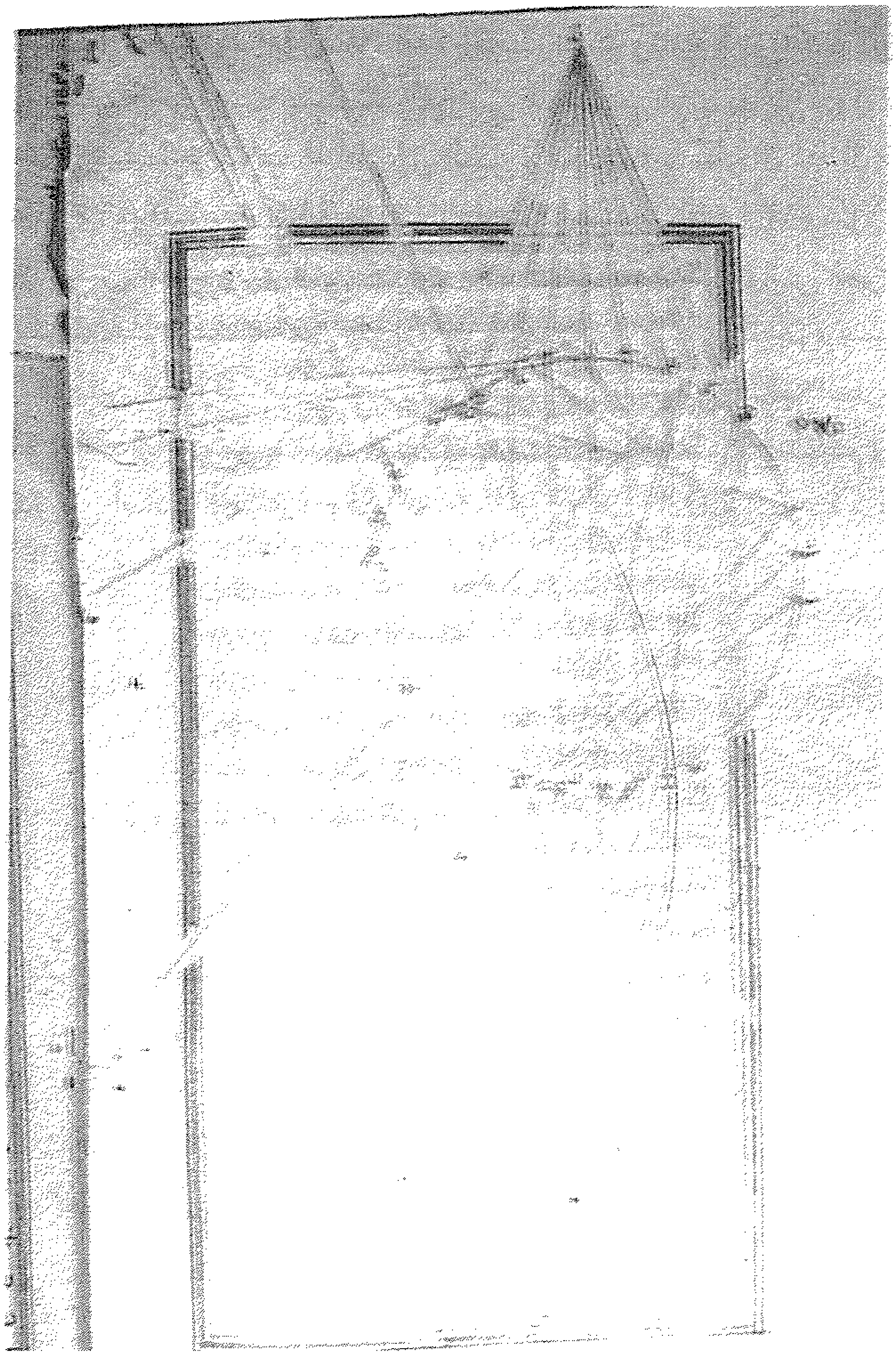
هذه هي باختصار الاتجاهات الجديدة للبحث والتي باشر بها كمال الدين الفارسي. وإلى هذه الإنجازات نضيف مجموعة من النتائج والرؤى الملائمة على امتداد «مراجعاته وشروحاته» لأعمال ابن الهيثم البصرية. فانتشار كتابه الضخم حيث يراجع ويفسر كتاب

---

(٥٨) انظر: Rashed, Ibid., pp. lx-lxviii.

(٥٩) انظر: Roshdi Rashed, «Le Modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel: Ibn al-Haytham, al-Fārisī,» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 23 (1970), pp. 110-140.

(٦٠) الفارسي، المصدر نفسه، ج ٢، ص ٣٣٧.



الصورة رقم (١٩ ــ ٦)

كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(اسطنبول، مخطوطة آيا صوفيا، ٢٥٩٨).

عرف كمال الدين الفارسي دراسة ابن الهيثم حول انعطاف الأشعة في الكرة، وابتداء من هذا قام بدراسة انتشار الضوء في كرة زجاجية مملوءة بالماء وذلك لشرح ظاهرة لم تكن قد شرحت من قبل، وهي ظاهرة قوس قزح: تكوينه وشكله وألوانه. ولأول مرة في التاريخ يستعمل «أنموذجاً» لشرح ظاهرة علمية.

ونرى في هذه الصورة الأشعة الساقطة تباعاً على زوايا سقوط 10°، 20°، . . . 90°. وفي هذه الدراسة يحاول الفارسي حقاً أن يضع نفسه خارج شروط تقريب «Gauss» حتى يظهر تعدد الخيالات، ولا يخفى على أحد أهمية هذه الدراسة.

المناظر لابن الهيثم، كما يشهد على ذلك عدد المخطوطات وتاريخها والمكان الموجودة فيه، وكذلك انتشار مؤلف آخر حيث يستعيد الفارسي المواضيع الرئيسة من دون برهان[٦١]، هذان الانتشاران لم يدفعا بـ كتاب المناظر إلى الظل، لكنهما يسمحان لنا أن نستشف أن دراسة علم المناظر لم تتوقف بعد كتابة مؤلَّف الفارسي حوالى سنة ١٣٠٠م. إلا أن الدراسة الوحيدة المتميزة بغنى المضمون، التي جاءت بعد كتاب الفارسي والتي نعرفها في هذا المجال تبقى كتاب عالم الفلك تقي الدين بن معروف، والذي أنجزه سنة ٩٨٢ هـ/ ١٥٧٤م[٦٢]. لكن ابن معروف هذا اقتصر في عمله على تلخيص كتاب الفارسي دون أن يقدم أية مساهمة خاصة به. ومع ذلك، فقد كانت استمرارية كتاب ابن الهيثم، وفي الحقبة نفسها، مؤكدة في أماكن أخرى، وفي لغات أخرى غير اللغة العربية، في أوروبا، وبخاصة باللغة اللاتينية.

(٦١) المقصود هو مؤلَّف كمال الدين أبو الحسن الفارسي، **البصائر في علم المناظر** (مخطوطة اسطنبول، عزت أفندي، ٢٠٠٦، سليمانية).

(٦٢) تقي الدين بن معروف، **كتاب نور حدَقات الأبصار ونور حدِقات الأنظار** (مخطوطة أوكسفورد، مكتبة بودلين، مارش ١١٩).

ـ ٢٠ ـ

نشأة علم البصريات الفيزيولوجي

غول أ. راسل[*]

«هناك أشياء كثيرة للرؤية أكثر مما يصل العين».

ن. ر. هانسون

سجل اكتشاف مونك (Munk) (١٨٣٩ ـ ١٩١٢)، الذي حدد بدقة موقع الإسقاطات انطلاقاً من الشبكية في قشرة الدماغ المخدّدة، نهاية عصر في تاريخ علم البصريات الفيزيولوجي. فقد تغيرت من جراء ذلك المهام الموكلة إلى هذا العلم، فلم يعد البحث يهدف إلى تعيين مراكز الإدراك، بل إلى تحديد طبيعة آليات الإدراك المركزية. كما لم يعد السؤال «أين» يقع في الدماغ ما يسمح لنا برؤية العالم، بل «ماذا يجري» في قشرة الدماغ البصرية[1]؟

وقد مهدت لمفهوم تنظيم مراكز الرؤية، القائم على تجميع النقاط في قشرة الدماغ، مقدمات فكرية عبر التاريخ. فقد نُسب إلى ديكارت (Descartes) (١٥٩٦ ـ ١٦٥٠) إعادة تنظيم الصورة الشبكية نقطة بنقطة على امتداد المسالك المركزية. وكان يعتقد أن الجهاز البصري يبرز في الغدة الصنوبرية، تلك «الزائدة المحيرة في الدماغ»، حيث يلتقي الروح والجسد. ووراء هذا الاعتقاد يكمن مفهوم إعادة الإسقاط المركزي[2].

(*) قسم العلوم الإنسانية في الطب، جامعة «A & M»، تكساس ـ الولايات المتحدة الأمريكية.

قام بترجمة هذا الفصل نزيه عبد القادر المرعبي.

(١) انظر: Stephen Lucian Polyak, *The Vertebrate Visual System*, 3 vols. (Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1957), vol. 3, especially pp. 147-152.

(٢) المصدر نفسه، مج ٢، بخاصة ص ١٠٠ ـ ١٠٤. انظر: ديكارت، «نظرية الرؤية،» في: المصدر نفسه، ص ١٥١ ـ ١٦٣.

أثبت كبلر (Képler) (١٥٧١ ـ ١٦٣٠) قبل ديكارت أن صورة معكوسة تتشكل في العين بفضل الجليدية التي تركز الأشعة الضوئية الصادرة من كل نقطة جسم ما على نقطة مقابلة من الشبكية. فبعد تحرره من النظريات السابقة، وصف الشبكية كسطح في العين حساس بالنسبة إلى الضوء (على أساس علم تشريح العين وفقاً لنظرية فيليكس بلاتر (Felix Platter)، بينما كان التشديد يتم سابقاً على الجليدية. كما فصل تحليل الآليات البصرية للعين عن المسألة الشائكة التي كانت تحاول التوفيق بين الصورة الشبكية المعكوسة والفكرة عن إدراك حقيقي للعالم[٣].

تملك صياغة مفهوم الصورة المسقطة أهمية أساسية من وجهة نظر تاريخية. فقد قدمت حلاً جذرياً للمشكلة القديمة المتعلقة بإدراك العالم الخارجي بواسطة حاسة النظر. كما سجلت، بجمعها لفيزياء الضوء وعلم تشريح العين، بداية علم البصريات الفيزيولوجي. إن ظهور هذا العلم في الحضارة الإسلامية سيعالَج تبعاً للفئات التالية:

أولاً: نظريات الرؤية ما قبل علم البصريات، وهي النظريات الموروثة عن العلوم اليونانية ـ الهلينستية؛

ثانياً: ظهور عناصر جديدة من خلال نقد هذه النظريات؛

ثالثاً: الابتعاد عن المقاربة التقليدية من خلال إعداد نظرية عن تطابق نقاط الصورة العينية ومن خلال وضع تركيبٍ لعلم البصريات وعلم التشريح[٤].

أولاً: نظريات الرؤية ما قبل علم البصريات

تأثر التصور اليوناني عن الرؤية بالتصور عن اللمس، الذي بموجبه ترتبط المعرفة الحاسية كلياً بتماس فيزيائي بين الجسم وجسد المراقب. إن «الإحساس» اللمسي بشيء ما، يعود إلى إقامة تماس ميكانيكي مع الأشكال المختلفة من الأسطح، حيث يحدد هذا التماس إحساسنا بالرطوبة، أو بالقساوة أو بالرخاوة. وبمجرد حصول التماس بين الجسم والجلد،

---

(٣) انظر: Johannes Képler, «De Modo Visionis,» traduit par A. C. Crombie, dans: *Mélanges Alexandre Koyré*, histoire de la pensée; 12-13, 2 vols. (Paris: Hermann, 1964), vol. 1: *L'Aventure de la science*, pp. 135-172; David C. Lindberg, «Johannes Kepler and the Theory of the Retinal Image,» in: David C. Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler* (Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1976), pp. 193-205.

(٤) بسيكولوجية الإدراك هي خارج موضوع هذه المقالة، وتستأهل دراسة على حدة. انظر: Gary C. Hatfield and William Epstein, «The Sensory Core and the Medieval Foundations of Early Modern Perceptual Theory,» *Isis*, vol. 70, no. 253 (September 1979), pp. 363-384.

يكون الإدراك الحاسي (الشعور اللمسي) فورياً وكاملاً في آن معاً[(٥)].

وبالمقارنة مع اللمس، فقد تم تحديد كيفية التماس بين عين المراقب والجسم بشكل سيئ. وقد كانت المسألة الأساسية، بالنسبة إلى اليونانيين، تتمثل في تحديد كيفية قدرة العين على إقامة تماس مع الجسم عن بعد، مع الأخذ بعين الاعتبار فقدان التواصل الفيزيائي الظاهر. لذلك كان الاستنتاج البدهي أن الرؤية تعمل باستخدام طريقة تماس غير مباشر مع الجسم من خلال عامل وسيط آخر.

وبالتالي، فقد بدت النظريات اليونانية كسلسلة من المحاولات لاكتشاف وسائل التماس بين عين المراقب والجسم المرئي، وذلك باستخدام التماثل مع حاسة اللمس. إن الإمكانيات المنطقية المأخوذة بعين الاعتبار تفرض وساطة: ١ ـ ردٌ ينقذف من الجسم نحو العين؛ ٢ ـ قدرة بصرية خفية أو شعاع يُقذف من العين نحو الجسم. وكما هو الأمر بالنسبة إلى اللمس، كان الإدراك البصري نتيجة فورية لأحد شكلي التماس[(٦)].

١ ـ نظرية نسخة الجسم: نظرية «إيدولا» (Eidola)

تقول النظرية التي طورها الذريون وبالأخص إبيقور (Epicure) (حوالى ٣٤١ ـ ٢٧٠ ق.م) إن الأجسام تبث بشكل متواصل ردودها في جميع الاتجاهات. وتقطع هذه الردود الهواء بخط مستقيم، في تكتلات أو تجمعات متماسكة من الذرات، محافظة على الاتجاه والشكل واللون الذي كانت تملكه على الجسم الصادرة عنه. وتدخل هذه الأغشية الدقيقة (المسماة إيدولا) عين المراقب. وبذلك تعود المعرفة أو الإحساس البصري إلى هذا التماس غير المباشر مع إيدولا متلاحقة تواكب كل الخصائص المرئية للجسم[(٧)].

---

(٥) بالنسبة إلى أرسطو، تأخذ حاسة اللمس اسمها من واقع أنها تعمل بالتماس المباشر، انظر: *De anima* (435a 17-18)؛ لمناقشة حول معيار التماس، انظر:
Richard Sorabji, «Aristotle on Demarcating the Five Senses,» in: Jonathan Barnes, Malcolm Schofield and Richard Sorabji, eds., *Articles on Aristotle*, 4 vols. (London: Duckworth, 1975-1979), vol. 4: *Psychology and Aesthetics*, especially pp. 85-92.

(٦) لمناقشة حول نظريات الرؤية في العصور القديمة ومراجع مفصلة، انظر: Alistair Cameron Crombie: *The Mechanistic Hypothesis and the Scientific Study of Vision: Some Optical Ideas as a Background to the Invention of the Microscope* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967), pp. 3-16; réed de «Proc. of the Royal Microscopical Soc», and «Early Concepts of the Senses and the Mind,» *Scientific American*, vol. 210, no. 5 (May 1964), pp. 108-116, and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 1-18.

(٧) لمناقشة حول الايدولا (eidola)، انظر: Edward N. Lee, «The Sense of an Object: Epicurus =

٢ ـ نظرية البث: عصا الأعمى

أ ـ الشعاع البصري

إن الموقف التصوري البديل عن نظرية الجسم يطرح مسلّمة تقول إن العين تبث أشعة غير مرئية تدخل في تماس مع الجسم، محدثة الإحساس البصري. وكان يُفترض بداهة أن الأشعة لا تقطع الفضاء إلا بخطوط مستقيمة تنتشر بشكل مخروط رؤية هندسي، يمتد انطلاقاً من العين إلى اللانهائي، بحيث يقع رأس المخروط في العين. وبمقدار ما تبتعد زاوية النظر، تكبر مساحة قاعدة المخروط بشكل مطابق. وبكلمات أخرى، كلما ازدادت المسافة التي تقطعها الأشعة البصرية، اتسع سطح حقل الرؤية. وتعمل هذه الرؤية عندما تلتقي الأشعة بجسم داخل حدود المخروط[٨].

يشكل الشعاع البصري، إذن، الوسيلة غير المباشرة التي تؤمن التماس بين العين والأجسام المرئية. وهناك تشابه ضمني لهذه النظرية، على الرغم من أنه لم يكن مبيّناً بوضوح، يتمثل في ذلك الأعمى الذي يستخدم عصا بمثابة امتداد لمسي له، ليشعر بالأشياء الواقعة خارج متناول يده[٩]. وفي الواقع، ان صورة الأعمى الذي يحمل حزمة عصي متجهة إلى الأمام، كأسلاك مظلة، تشكل استعارة أكثر دقة.

دعّمت هندسة إقليدس (Euclide) (حوالى العام ٣٠٠ ق.م.) هذا التصور بقوة. ثم تم تطويره بشكل خاص بواسطة علم البصريات الاختباري لبطلميوس (Ptolémée) (حوالى ١٢٧ ـ ١٤٨م)، حيث إن المخروط الإقليدسي بخطوط هندسية منفصلة يكتسب حقيقة فيزيائية بشكل حزمة متواصلة من الإشعاعات[١٠]. فمن خلال دمج المفهوم النظري للشعاع

on Seeing and Hearing,» in: Peter K. Machamer and Robert C. Turnbull, eds., *Studies in Perception: Interrelations in the History of Philosophy of Science* (Columbus, Ohio: [n. pb.], 1978), vol. 2, pp. 27-59. =

(٨) حول *Définitions* لإقليدس (١ ـ ٧) والقضايا الأولى ـ الثامنة، التي تثير بوضوح تحليلاً هندسياً للرؤية بالاستناد إلى مخروط منظوري، انظر: Morris Raphael Cohen and I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, Source Books in the History of Science (Cambridge, Mass.: Harvard University, 1948), pp. 257-258.

(٩) على رغم أن الرواقيين استخدموا بوضوح التشابه مع «عصا الأعمى»، إلا أن أحد تلامذة إقليدس، الفلكي الرياضي هيباركوس، عبّر عن فكرة الامتداد اللمسي بوضوح عندما قارن الأشعة البصرية بأيد تمتد نحو الجسم. انظر: D. E. Hahm, «Early Hellenistic Theories of Vision and the Perception of Color,» in: Machamer and Turnbull, eds., Ibid., vol. 3, p. 79.

(١٠) حول نظريات إقليدس وبطلميوس فيما يخص الأشعة البصرية، انظر: Albert Lejeune, *Euclide et Ptolémée: Deux stades de l'optique géométrique grecque*, université de Louvain, recueil de =

اللمسي / البصري مع النظام الاستدلالي الصارم للهندسة، تستطيع هذه النظرية في آن معاً تحديد وتعليل مسائل كانت غير قابلة للشرح بشكل آخر. فعلى سبيل المثال، لو أخذنا زاوية الرؤية في رأس المخروط، لكان ممكناً شرح إدراك القياس تبعاً إلى بعد الأجسام، وبالتالي تجنب معضلة الذريين الذين اصطدموا بمسألة رؤية الجبل (حتى ولو كان باستطاعتنا التصور أن شكل جسم بقياسات كبيرة للغاية، يضيق بمقدار كافٍ لكي يمر عبر الفتحة الصغيرة للعين، فكيف إذن يستطيع الشكل أن يحافظ على المعلومات عن قياسه الأول؟). غير أن القيمة الصغيرة لزاوية الرؤية تبين أهمية المسافة الفاصلة بين الجبل والمكان الذي يتم إدراكه منه(١١).

علاوة على ذلك، وبما أن خيوطاً مفتولة غير مرئية يُفترض بها أن تقطع المسافة بين العين والجسم المرئي بخط مستقيم، تماماً مثل مسار السهم، لذلك فقد تم وصف طريقة انتشارها وفقاً لقوانين الانحراف باستعمال تشابيه ميكانيكية، ووفقاً لعلم المرايا (علم انعكاس الضوء)(١٢). فكان الاعتبار أن الأشعة البصرية ترتد على جميع الأسطح المصقولة، أي على الأسطح الكثيفة غير المسامية، بالطريقة نفسها التي ينحرف فيها السهم بسبب درع برونزي. وقد قدم هذا الاعتبار الأساس الذي يسمح بشرح كيف أن الأجسام يمكن أن تكون مرئية بالانعكاس بفضل المرايا. والمبدأ العملي يقوم على تساوي زوايا السقوط والانحراف أو الارتداد(١٣). فعندما ننظر مثلاً في مرآة موضوعة في زاوية حادة، بالنسبة إلى اتجاه النظر، نرى الأشياء الواقعة على جانبنا. في حين عندما نمسك المرآة في زاوية قائمة بالنسبة إلينا، نرى أنفسنا. وقد تم شرح هذا الأمر انطلاقاً من انحراف الشعاع اللمسي ـ البصري في المرآة. بما أن زاوية الارتداد مساوية لزاوية السقوط، فإن الشعاع

---

travaux d'histoire et de philologie; 3. sér., 31-fasc. (Louvain: Bibliothèque de l'université, bureaux = du «Recueil», 1948).

والنشرة النقدية، في: Albert Lejeune, ed., *L'Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile*, université de Louvain, recueil de travaux d'histoire et de philologie; 4. sér., fasc. 8 (Louvain: Bibliothèque de l'université, bureaux du «Receuil», 1956).

وللملخص لها مع مراجع، انظر: David C. Lindberg, «The Mathematicians: Euclid, Hero, and Ptolemy,» in: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 11-18.

(١١) بخصوص نقد لنظريات الإدخال فيما يتعلق بمسألة القياس، انظر: Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*, édité et traduit par P. de Lacy, Corpus Græcorum Medicorum; VII (Berlin: Akademie Verlag, 1978), VII, 5.2-5; 7-8.

(١٢) فيما يتعلق بالانعكاس في المرايا، انظر: Hero, *«Catoptrics,»* 1-7, 10, 15, and Ptolemy, *«Optics,»* III, in: Cohen and Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, pp. 261-271.

(١٣) لمقارنة بين الرؤية والانحراف الميكانيكي، انظر: «*Problémato* des Péripatéticiens,» XVI, 13, 915b, in: Carl Benjamin Boyer, «Aristotelian References to the Law of Reflection,» *Isis*, vol. 36, no. 104 (1945-1946), p. 94.

يدخل في تماس مع الأجسام الموجودة على جانب المراقب. فالأمر يكون كما لو أن عصا الأعمى منحنية بزاوية حادة، من دون أن يعي الأعمى هذا الانحناء. وبمواجهته بشكل مباشر للمرآة، يرتد الشعاع البصري ويلمس وجه المراقب نفسه، وفي هذه الحالة تكون عصا الأعمى مطوية على نفسها. وعلى الرغم من القدرة المدهشة لهذه النظرية على معالجة مسائل مثل الانعكاس والقياس والمسافة، إلا أنها تبقى مع ذلك محدودة جداً. فالأشعة البصرية تصاب حتماً بالضعف مع اتساع المسافة، فكيف يتسنى لها أن تعانق السماوات بأسرها لتصل إلى النجوم؟ هذا السؤال بقي واحداً من أمهات مسائل النظرية(١٤).

ب ـ التغييرات حول الأشعة البصرية: أفلاطون والرواقيون

وفق النظرية الأولى لأفلاطون (حوالى ٤٢٧ ـ ٣٤٧ ق.م) يندمج البث الصادر عن العين، والذي كان يصور كنار داخلية، مع الضوء الخارجي المحيط ليشكل وسيطاً بين العين والجسم. وتتم الرؤية عندما يدخل هذا الاندماج بين «النار» البصرية وضوء النهار، والذي يشكل عنصراً بسيطاً متجانساً، في تماس مع إشراق جسم ما(١٥). إن الانصهار الحاصل بين الضوء البصري وضوء النهار هو الذي يحل مكان عصا الأعمى في نظرية أفلاطون. بالإضافة إلى ذلك، لا يحصل التماس البصري بين العصا والجسم نفسه، بل يحصل بين العصا والإشراق الصادر عن الجسم، والإشراق هذا ليس إيدولوناً (Eidelon)، بل لون(١٦). وقد اكتسب موقف أفلاطون قدرة تصورية إضافية بتقديمه شرحاً لواقع أن الرؤية لا يمكن أن تعمل إلا بوجود ضوء، وذلك على الرغم من الطبيعة اللمسية للتماس بين العين والجسم. ويستطيع هذا الموقف أن يعرض بنجاح مسألة إدراك الأجسام البعيدة من دون اللجوء إلى مفهوم غير مستساغ عن الأشعة القابلة للامتداد حتى اللانهاية.

أما الرواقيون فقد أدخلوا إلى النظريات اللمسية جوهراً فيزيولوجياً مع مفهوم بنوما (pneuma). ففي البدء تم تصور البنوما كمزيج من الهواء والنار، وبعد ذلك تم ربطها بأمزجة الجسم. وبوجود الضوء، تحث بنوما معينة عمود الهواء الواقع بين العين والجسم

---

(١٤) كمثال على هذا النقد، انظر: Galenus, Ibid., VII, 5.2-6.

(١٥) بخصوص نقاش لأفلاطون حول الرؤية في حواره، في: Platon: *Timée*, 45 b-d, traduction française (Paris: Les Belles lettres, 1925), p. 162, et *Théétète*, 156 d-e, traduction française (Paris: Les Belles lettres, 1924), p. 178,

انظر: Crombie, *The Mechanistic Hypothesis and the Scientific Study of Vision: Some Optical Ideas as a Background to the Invention of the Microscope*, pp. 6-7, note (9), and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 5-6.

(١٦) نوقش أيضاً الأساس اللمسي لنظرية البث لأفلاطون على يد: Hahm, «Early Hellenistic Theories of Vision and the Perception of Color,» pp. 71-75.

بدفعه إلى التوتر كعصا. وكان الرواقيون يعتبرون أن الهواء غير المضاء هو على درجة من الرخاوة، بحيث إنه لا يستطيع أن يتوتر تحت تأثير البنوما، ولا يقدر حتى على الاستجابة للضغط. وبهذه الطريقة، يشكل الهواء المتوتر بتأثير البنوما مخروطاً يقع رأسه في العين. ويتم إدراك الأجسام المرئية الواقعة في حقل قاعدة المخروط، وتُنقل إلى العين بواسطة ساق من الهواء المضغوط. وهذه العملية مماثلة للطريقة التي يستعمل فيها الأعمى عصاه ليشعر بالأجسام الواقعة خارج متناول يده(١٧). كما قارن الرواقيون أيضاً الرؤية، بواسطة اللمس، بصدمة تحدثها سمكة مكهربة، تنتقل من خلال الشبكة والعصا إلى يدي الصياد(١٨).

إن الضوء، وفقاً لهذه النظريات، هو الذي يسمح بإقامة صلة أو تماس لمسي بين العين والجسم. فمن دون ضوء لا تستطيع القدرة البصرية (سواء أكانت شعاعاً أو بنوما) أن تشد الهواء. وهكذا، فإن التماس في الظلام مستحيل، لأن الهواء يبطل استخدامه «كعصا» تسمح بلمس الجسم. ولدفع التشابه إلى الأمام، يبدو الأمر في هذه الحالة وكأن عصا الأعمى قد فقدت صلابتها.

ج ـ التركيب الجالينوسي

تظهر للمرة الأولى مع جالينوس (Galien) (حوالى ١٢٩ ـ ١٩٩/ ٢٠٠م) مقاربة طبية بحتة للرؤية، إذ أدخلت نظريته الانتقائية إلى هندسة المخروط المنظوري تشديداً واضحاً على علم تشريح العين(١٩). وقد أعطت النظرية الرواقية، حيث تشكل البنوما فيها عاملاً أساسياً في الرؤية، جالينوس وسيلة مثالية لاستخدام معرفته العميقة للعين. فبالنسبة إليه، تأخذ البنوما مصدرها في التجاويف الدماغية وتنتقل بدفق ثابت نحو العينين عن طريق الأعصاب البصرية، التي كانت تعتبر مجوفة. وفي العينين تملأ البنوما الجليدية، التي اعتبرها جالينوس العضو الرئيس للرؤية. وقد دعم هذه الفكرة بفضل معرفته لتأثير إعتام العين. وكان الاعتقاد السائد أن الإعتام يظهر بين الجليدية والقرنية، حاجباً بذلك الرؤية. وبما أن استئصاله يعيد الرؤية، فقد كان الاعتقاد أنه يمنع مرور البنوما عبر البؤبؤ بين رطوبة

---

(١٧) انظر: «Diogène Laerce,» VII, p. 157,

نقلاً عن: Crombie, Ibid., p. 8, note (11).

بخصوص أعمال الرواقيين، انظر: Samuel Sambursky, *Physics of the Stoics* (London: Routledge and Kegan Paul, 1959) pp. 21-29 and 124, and especially Hahm, Ibid., pp. 65-69.

(١٨) Hahm, Ibid., p. 85.

(١٩) Galenus: *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium,* translated by M. T. May, 2 vols., II (Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1968), X, 1, pp. 463-464, and *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*, VII, 6, pp. 28-29.

الجليدية والهواء الخارجي(٢٠).

لم يكن ضرورياً في نظرية جالينوس أن تُقذف البنوما بعيداً أمام العين، فبمجرد حدوث التماس بينها وبين الهواء، يتبدل هذا الأخير فوراً (بوجود الضوء) ليصبح امتداداً حاسياً مباشراً لجهاز الرؤية. ومن وجهة نظر هندسية، يتشكل مخروط من الحساسية، مؤلف من خطوط بصرية تمتد من رأس المخروط الواقع في البؤبؤ وصولاً إلى الأجسام المرئية عن بعد. وبالنسبة إلى جالينوس، لا يستبدل الهواء المضغوط بعصا الأعمى، بل يصبح بديلاً عن ذراع الأعمى نفسها، كنوع من عضو غير مرئي(٢١).

ويتم الإدراك عندما تلتقي قاعدة المخروط بجسم مرئي. إلا أن جالينوس أظهر أيضاً أن الانطباعات ترجع إلى رطوبة الجليدية التي تعتبر العضو الرئيس للنظر، ثم تنتقل عن طريق الشبكية والأعصاب البصرية «الجوفاء» لتصل إلى الدماغ، الحصن الأخير للإحساس والإدراك(٢٢).

٣ ـ نظريات الانتقال

ظهرت فيما بعد سلسلة نظريات، أخذت تبتعد تدريجاً عن النظريات اللمسية. وللوهلة الأولى، لا يبدو مسار أرسطو (Aristote) (٣٨٣ ـ ٣٢٢ ق.م) لمسياً. فبالنسبة إليه، لا تدخل العين بفعلها الخاص في تماس مع الأجسام المرئية، أي بإرسال شعاع لمسي أو بنوما. كما لا تستقبل أيضاً نسخات عن الأجسام بأشكال أغشية مثل إيدولا بل تمثل الرؤية، مثل أي إحساس آخر، عملية سلبية(٢٣). فما تستقبله أعضاء الحواس هو شكل

---

(٢٠) Galenus: *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium,* II, X, pp. 463-503, and *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon),* VII, 3.10-6, 4.17.

لدراسة كاملة عن جالينوس نسبة إلى أسلافه وحول أهمية تشريحه، انظر:

Rudolph E. Siegel, *Galen on Sense Perception* (Basel; New York: Karger, 1970);

فيما يتعلق بنظرية جالينوس كتركيب يجمع أفلاطون وأرسطو والرواقيين، انظر: Harold Cherniss, «Galen and Posidonius' Theory of Vision,» *American Journal of Philology,* vol. 54 (1933), pp. 154-161.

(٢١) بخصوص نقاش لتشابه «العصا التي تسير» بالنسبة إلى العصب في أعمال جالينوس، انظر:

Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon),* VII, 5.5-11, 5.40-41; 7.16-8.22.

(٢٢) بخصوص نقاش لهاتين وجهتي النظر عند جالينوس، انظر النقد من قبل روبرت ج. ريتشاردس (Robert J. Richards) لكتاب: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler,* Journal of the History of Behavioural Sciences, vol. 15 (1979), pp. 378-382. في:

(٢٣) بخصوص تحديد للإحساس عند أرسطو، انظر: Charles H. Kahn, «Sensation and =

الجسم المرئي دون المادة التي تشكله، بالطريقة نفسها التي ينطبع فيها الشمع بشكل خاتم، دون أن يحتفظ منه بالمعدن. إلا أن كل جهاز حاسي يتأثر بالانطباعات الصادرة عن الأجسام والموافقة أو المختصة به. وفي تجربة الإدراك فقط تصبح العين، القادرة على الرؤية بالقوة، عضواً حاسياً حقيقياً(٢٤).

يكتفي أرسطو في وصفه للحواس بتحديد الشروط الضرورية للتجربة البصرية. فقبل كل شيء، يحدد بدقة أن الخاصة الأساسية لجسم مرئي هي اللون، فهو صنف يُدرج فيه أرسطو قوة الضوء والظلمة، وبواسطة هذا الصنف يمكن للخصائص المرئية أن تدرَك. ثم يضع بعد ذلك الشفافية، كشرط أول لانتقال خصائص الجسم إلى العين. وهكذا، لكي تعمل الرؤية، إذن، يجب أن يكون الجسم المتمتع بلون ما، منفصلاً عن العينين بوسط شفاف. وما يسبب الشفافية هذه هو الضوء. وبالنسبة إليه، فليس الضوء جوهراً مادياً ولا حركة. إنه حالة شفافية الوسط (الهواء) الذي من خلاله يمكن للألوان أن تتم رؤيتها عن بعد. وبسبب شفافيتها أيضاً، تستطيع الأعين (أو «الهلام البصري») في آن واحد أن تنطبع بالألوان. وكمثل الخاتم، فإن جسماً أخضر يلون العين بالأخضر(٢٥). ونشير إلى أنه لم يتم تقديم أي شرح لهذه العملية ولا لما يجري داخل العين(٢٦).

شكلت أفكار أرسطو لاحقاً نواة للحجج ضد المقاربة اللمسية للرؤية. وعلى الرغم

= Consciousness in Aristotle's Psychology,» in: Barnes, Schofield, and Sorabji, *Articles on Aristotle*, vol. 4: *Psychology and Aesthetics*, especially pp. 3-5.

(٢٤) انظر: *De anima*, II, 6, 12, translated by R. D. Hicks, in: Cohen and Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, pp. 542-543.

(٢٥) لإيضاحات حول تعريف أرسطو للرؤية بالعلاقة مع الأجسام المرئية، انظر: Sorabji, «Aristotle on Demarcating the Five Senses,» pp. 76-99 and especially pp. 77-85.

(٢٦) كان جالينوس واعياً تماماً لواقع أن أرسطو لم يطور نظرية عن الرؤية، تسمح بتفسير «كيف نميز وضع، قياس أو بعد كل جسم مرئي»، انظر: Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*, VII, 7.4-15.

وهو في الواقع يعتمد نبرة لاذعة عندما ينتقد أرسطو لاستخدامه أشعة مبثوثة، وذلك في دراسته عن «أشياء مرئية من خلال المرايا». انظر: Galenus, Ibid., VII, 7.10-16.

بخصوص حسابات أرسطو بصدد الشعاع البصري في: Aristoteles, *Les Météorologiques*, traduction par J. Tricot (Paris: J. Vrin, 1941); english translation by C. Petraitis, *The Arabic Version of Aristotle's Meteorology*, a critical edition with an introduction and greek - arabic glossaries, université Saint Joseph, institut de lettres orientales de Beyrouth, recherches, série 1: Pensée arabe et musulmane; t. 39 (Beyrouth: Dar El-Machreq, 1967),

وبالتناقض مع تصوراته، في *De anima* وفي *De sensu*، انظر: Boyer, «Aristotelian References to the Law of Reflection,» pp. 94-95, and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, p. 217, note (39).

من أن مفهوم البث انطلاقاً من العين هو نفسه قابل للنقد، إلا أن الإنجازات المدهشة التي حققتها نظريات البث في حل مسائل الانعكاس وإدراك المسافة والقياس والوضع، ليست قابلة للنقد بدورها. ونتيجة لذلك، ظهر بعض شراح أرسطو الذين حاولوا تبني منهج انتقائي، مستخدمين في الوقت نفسه مبادئ هندسية وميكانيك الشعاع البصري للدفاع عن فرضياته ولاحقاً لإعادة النظر فيها(٢٧).

دعم بعض الشراح، مثل إسكندر الأفروديسي (Alexandre d'Aphrodise) في القرن الثالث، فكرة مفادها أن لا شيء يتم بثه من العين نحو الجسم. ومع ذلك، فقد استخدم إسكندر المخروط البصري ومبدأ الانتشار المستقيم كما جاء في النظريات اللمسية، وذلك عندما تفحص انتقال الخصائص المرئية (الألوان) بواسطة وسط شفاف. وتكون الأجسام مرئية آنذاك من خلال مخروط على امتداد خطوط مستقيمة. ومع أن إدراك قياس الأجسام يتحدد بزاوية النظر التي تأخذ مكانها انطلاقاً من العين، فإن المخروط نفسه يتحدد في قاعدته بواسطة الجسم ولا يتحدد ببث ما من العين(٢٨).

كانت وجهة نظر جان فيلوبون (Jean Philopon) (القرن السادس) واضحة. فلو أن الأشعة الضوئية تُبث بخط مستقيم وتنحرف على الأسطح الملساء تبعاً لقانون الزوايا المتساوية، فإنه باستطاعتنا آنذاك الافتراض أن تأثير (energia) الأجسام الملونة والمضيئة على العين يتم بخطوط مستقيمة وينعكس في المرايا وفقاً لقانون الزوايا المتساوية. وفي الواقع، إن استبدال مفهوم الأشعة البصرية بفرضية أرسطو، يسمح بتجنب المفهوم غير المنطقي عن البث مع الحفاظ على الظاهرة نفسها. وقد تجاوز فيلوبون أرسطو في هذه المسألة، عندما عالج الضوء واللون بشكل متواز. فعدل مفهوم الضوء، إذ حوله من تغير حالة إلى «حركة» نوعية (أو «قفزة») تحدث بطريقة فورية، كما هو الأمر عند أرسطو بالنسبة إلى تأثير اللون على العين(٢٩).

---

(٢٧) فيما يتعلق باختلافات وجهات النظر بين أرسطو والشراح المشائيين، انظر: Samuel Sambursky, «Philoponus' Interpretation of Aristotle's Theory of Light,» *Osiris*, vol. 13 (1958), pp. 114-126.

انظر أيضاً نقد سورابجي (Sorabji) الذي سيرد لاحقاً في الهامش رقم (٢٩).

(٢٨) Alexander of Aphrodisias, *«De Anima Libri Mantissa,»* translated by Robert J. Richards, *Journal of the History of Behavioural Sciences*, vol. 15 (1979), p. 381.

انظر أيضاً: Sambursky, Ibid., p. 116.

(٢٩) انظر: Philoponus, *De anima*, quoted in: Sambursky, Ibid., pp. 117-118 and discussed in pp. 118-126.

لا يقبل سورابجي الفكرة التي مفادها أن فيلوبون «يرفض تماماً» نظرية أرسطو بتغيير تصوره عن الضوء، متنقلاً من ظاهرة سكونية إلى ظاهرة حركية، مبدلاً معنى «energia» الأرسطية. انظر: Richard Sorabji, «Directionality of Light,» in: Richard Sorabji, *Philoponus and the Rejection of Aristotelian Science* (London: Dukworth, 1986), pp. 26-30.

وهكذا فقد ارتسم في العصور القديمة المتأخرة اتجاه جديد، جاء كرد على الأفكار الأرسطية. وتكشف انتقائية هذا الاتجاه أيضاً تأثير مبدأ الأفلاطونية المحدثة عن الإشراق (مثله الملموس هو الإشعاع الصادر عن الشمس)، وتأثير أفكار الذريين الأكثر دقة عن الفضاء والحركة(٣٠). فالرؤية تعود إلى حركة نوعية (أو «قفزة متقطعة») للضوء انطلاقاً من الأجسام المرئية، وتواكب هذه الحركة (عن طريق الألوان) الخصائص المرئية للأجسام وصولاً إلى العين. بالإضافة إلى ذلك، فإن هذا الانتقال يستطيع أن يخضع للتحليل الهندسي(٣١).

٤ ـ ميكانيك الرؤية في النظريات اليونانية

ترجع الشروحات التي أعدها اليونانيون إلى نموذجين أساسيين من النظريات:

أ ـ النظريات المسماة «نسخة الجسم»، التي بموجبها تستقبل العين رداً من الجسم، يسمى إيدولون.

ب ـ النظريات «اللمسية» الأكثر كمالاً، والتي لقيت نجاحاً أكبر.

وبموجب هذه النظريات، تمد العين قدرتها بشكل مخروط من الإشعاع وصولاً إلى الأجسام المرئية. أما المقاربة غير اللمسية، التي بدأها أرسطو، فإنها لا تشكل نظرية قائمة بذاتها، علماً أنها استخدمت لاحقاً لنقض هاتين النظريتين.

وعلى الرغم من الاختلافات الظاهرة فيما بينها، فإن النظريات اليونانية عن الرؤية قد أُعدت انطلاقاً من الفرضيات نفسها. فقبل كل شيء، تم اعتبار الوعي الحاسي كتسجيل حقيقي للواقع. فما يُنقل إلى العين ومنها إلى الروح، يمثل نسخة نوعية عن العالم الخارجي. وقد تم تبرير هذا التصور تجريبياً، باللجوء إلى ظاهرة التجلي الفعلي لوجه شخص في بؤبؤ شخص آخر، كما في المرآة(٣٢). ونتيجة لذلك، كانت أجسام الإحساس البصري تعتبر ككيانات متماسكة. وإدراك هذه الكيانات يتم بطريقة إجمالية، إما بواسطة نسخة مادية

---

(٣٠) إن التصور عن الضوء كـ «نشاط» للجسم المضيء في «اتجاه خارجي» يظهر أيضاً في: Plotin, *Ennéades*, IV, 5.7 (ت حوالى ٢٧٠). انظر: Sambursky, Ibid., p. 116.

(٣١) بخصوص إعادة تعريف للضوء، بالنسبة إلى جدالات الذريين حول انقسامية الفضاء وعدم انقسامية الوقت، كامتداد لفكرة التغير أو «القفزة» النوعية، للانتقال إلى فكرة الحركة، انظر:
Richard Sorabji, *Time, Creation and the Continuum: Theories in Antiquity and the Early Middle Ages* (Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1983), pp. 52-62 and 384-390.

(٣٢) حول العلاقة بين الصورة على البؤبؤ واشتقاق محتمل لكلمة «pupil»، انظر:
Siegel, *Galen on Sense Perception*, pp. 49-50, and Galenus, *On Anatomical Procedures, the Later Books*, translated by W. L. H. Duckworth (Cambridge, [Eng.]: University Press, 1962), X, 3, 40.
انظر لاحقاً الهامش رقم (٨٠).

(إيدولون)، وإما بانطباع يحس به أو أيضاً بتصوير أو بشكل للجسم المحسوس(٣٣).

يفرض مفهوم «النسخة» أن تكون التجربة الحاسية الوسيلة الوحيدة لبناء نظرية عن الرؤية، والنموذج الوحيد القادر على شرح الإدراك. فقد كان معروفاً بوضوح وفي الوقت نفسه، أن الحواس ليست معصومة عن الخطأ، وأنه يمكن حصول اختلاف بين صفات الأجسام وإدراكنا لهذه الأخيرة. وقد تمت معالجة مسألة القمر والشمس والنجوم، كما لو كانت جميعها تقع على مسافة واحدة، في حين أن مسافاتها النسبية تبعاً للمراقب تختلف كثيراً(٣٤). ويشكل «الخداع القمري» توضيحاً لمثال على محاولة تسوية هذه المسألة. فقد لوحظ أن القمر يبدو في الأفق أكبر حجماً، بالمقارنة مع وضعه على خط عمودي، على الرغم من أن قياسه الفيزيائي هو نفسه في الوضعين(٣٥). وقد تم تطبيق هذا الاكتشاف في فن التصوير (رسم الزخرفة) وفي العمارة، حيث كانت تبنى بإتقان أعمدة غير متوازية أو معقوفة قليلاً إلى الداخل، لكي تبدو متوازية للمراقب. وفي الواقع، كان علم البصريات آنذاك فرعاً من الرياضيات، يدرس الأجسام المدركة بالحواس. كما كان هذا العلم يبحث خداع النظر، مثل التقارب الظاهر للخطوط المتوازية، أو واقع أن الأجسام المربعة تبدو عن كثب وكأنها مكورة(٣٦).

ومع ذلك، فقد اعتبر كبديهية واقع أن التجربة الحاسية تتحدد بالحواس. وهكذا، على الرغم من أن النسخات قد تتكشف غير دقيقة في بعض الأحيان، إلا أن النسخات التي تنقلها الحواس تبقى حقيقية، كاملة وغير قابلة للتجزئة.

وانطلاقاً من فرضية وجود تماثل في الشكل بين ما يصل العين ومصدره في العالم الخارجي، كانت النظريات تسأل عن الوسيلة، التي تستطيع العين والروح بواسطتها أن تحصلا على نموذج نوعي عن الواقع المرئي. وكانت «نسخة» الجسم تعتبر وسيلة تماس، سواء تم إدراكها بواسطة «إيدولون» أو قدرة بصرية. وبكلمات أخرى، تتميز النظريتان بمقاربة «لمسية»، تشرح الرؤية بمصطلحات التماس الميكانيكي.

---

(٣٣) من أجل مفهوم الرواقيين عن «تصوير» نسخة متماسكة، انظر: Hahm, «Early Hellenistic Theories of Vision and the Perception of Color,» p. 88.

(٣٤) انظر: A. I. Sabra, «Psychology Versus Mathematics: Ptolemy and Alhazen on the Moon Illusion,» in: Edward Grant and John E. Murdoch, eds., *Mathematics and Its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages* (Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 1987), pp. 217-247.

(٣٥) Nicholas Pastore, *Selective History of Theories of Visual Perception, 1600-1950* (New York: [n. pb.], 1971), pp. 4-6.

(٣٦) انظر: Proclus, «Commentary on Euclid's Elements I,» in: Cohen and Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, pp. 3-4.

كان وجود الضوء هو الذي يسمح بقيام التماس بين العين والجسم. فبدون ضوء مثلاً، لا تملك القدرة البصرية (شعاع أو بنوما) أية وسيلة لإقامة تماس مع الجسم(٣٧). ولا يملك أي طراز من هذه النظريات علاقة تصورية مع فيزياء الضوء في معالجته للرؤية. فلم تكن «النسخة» الحاسية النوعية صورة بصرية. وبما أن العين لم تكن تعتبر عضواً يستخدم «لتشكيل» الصور، لذلك كانت المعرفة التفصيلية لتشريحها مستقلة عن أساس النظريات التي تعالج الرؤية، بالطريقة نفسها حيث لا توجد للتشريح التفصيلي لليد أية علاقة مع بعض النظريات، حتى تلك التي تشرح الإحساس اللمسي. فكان دور العين يتحدد بالفرضية الغائية، التي تقول إن تركيبها يعكس وظيفتها.

أخيراً، فإن العين كانت عيناً تدرك. إن فرضية «النسخة» تجعل مستحيلة الفكرة التي مفادها أن ما يصل إلى العين يمكن أن يكون مختلفاً عما يدرك. فبمجرد حدوث التماس، يكون الإدراك مباشراً وكاملاً. إن مفهوم الإدراك، بصفته عملية متميزة لتفسير التسجيل الحاسي، بمعنى إعادة بناء عالم بصري ثلاثي الأبعاد انطلاقاً من صورة مسطحة محرّفة ومعكوسة موجودة داخل العين، إن هذا المفهوم لم يكن ممكناً تصوره. هذا، وقد شكلت هذه المفاهيم الموحدة قاعدة المقاربة الإسلامية للرؤية. وبقيت دون تغيير جوهري حتى إدخال فرضية الصورة المرئية المسقطة بصرياً.

ثانياً: الرواية العربية للنظريات اليونانية: استمرارية أم تحول؟

استخدم إرث نظريات الرؤية في الإسلام، وفي آن واحد، التغيرات النظرية للمواقف الهلينستية الكلاسيكية والحجج الموجودة في الشروحات الأرسطية والأرسطية الزائفة، العائدة إلى العصور القديمة المتأخرة. وكانت هذه الحجج تستند إلى تصورات عن تطور الفضاء والحركة والزمن(٣٨). وبالإضافة إلى نظريات الرؤية، فإن معارف اليونانيين الرياضية والاختبارية في علم البصريات والميكانيك، وكذلك التشريح التفصيلي للعين واتصالاتها مع الدماغ، أصبحت جميعها متوفرة بفضل الترجمات التي نقلت إلى العربية(٣٩).

---

(٣٧) يقارن جالينوس إزالة الضوء بالعصب الذي نقطعه فيفقد بذلك كل إحساس. انظر:
Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*, VII, 5.5-13.

(٣٨) من أجل تأثير نظرية «impetus»، كتيار نقدي أكثر شمولاً للعلم الأرسطي، انظر: Richard Sorabji, «John Philiponus,» in: Sorabji, *Philiponus and the Rejection of Aristotelian Science*, pp. 11-40.

(٣٩) لا نملك حتى الآن دراسات مقارنة ونقدية عن المصادر الهلينستية والمشائية للجدل الإسلامي بصدد الرؤية. فيما يتعلق بالعلاقات بين النظريات اليونانية والإسلامية من أجل المعايير الرياضية والفيزيائية والطبية، انظر: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 18-58.
إنه لا يستعرض شراح أرسطو.

وفي هذا السياق، من الضروري الإشارة إلى أن هدف الرياضيين ـ الفلكيين والفلاسفة الطبيعيين والأطباء المسلمين لم يكن فقط الحفاظ على هذا الإرث، بل تعداه أيضاً إلى تدارك إغفال بعض الأمور وتصحيح ما كانوا يعتبرونه تناقضات وأخطاء عند إقليدس وبطلميوس وجالينوس على سبيل المثال، وذلك بالإلحاح أكثر فأكثر على الملاحظات الاختبارية(٤٠). وكانت هنالك محاولات أعدت لتأمين الانسجام عند أفلاطون وللتوفيق بين جالينوس وأرسطو حول مسائل مختصة تثيرها نقاشات حول الرؤية(٤١). وفي الواقع، فإنه من خلال هذه الانتقادات تسنى ظهور تعديلات مرفقة بإيضاحات، للمسائل المتعلقة بالرؤية. إلا أن أصالة واستقلالية الأبحاث في تطوير هذه الأعمال في العالم الإسلامي تستند إلى حد كبير إلى

---

(٤٠) فيما يتعلق بالإشارة الواضحة إلى أهداف كهذه وتطبيقها في بعض المؤلفات، انظر: أبو يوسف يعقوب بن إسحق الكندي، رسائل الكندي الفلسفية، تحقيق وتقديم محمد عبد الهادي أبو ريدة، ٢ ج (القاهرة: دار الفكر العربي، ١٩٥٠ ـ ١٩٥٣) بخاصة «في الفلسفة الأولى،» ج ١، ص ١٠٣، و«في الشعاعات» المرايا المحرقة، ٣، نقلاً عن:

Jean Jolivet and Roshdi Rashed, «Al-Kindī, Abū Yūsuf Ya'qūb Ibn Isḥāq al-Sabbāḥ,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 15, p. 264.

انظر أيضاً: أبو بكر محمد بن زكريا الرازي، «الشكوك على جالينوس،» في:

Shlomo Pines, «Razi Critique de Galien,» papier présenté à: *Actes du VII^e congrès international d'histoire des sciences, Jérusalem, 1953* (Paris: [s. n., s. d.]), pp. 480-487, réimprimé dans: Shlomo Pines, *The Collected Works of Shlomo Pines: Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science* (Jerusalem: [n. pb.], 1986), vol. 2, pp. 256-258;

أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، الشكوك على بطليموس، تحقيق عبد الحميد صبره ونبيل الشهابي؛ تصدير إبراهيم مدكور (القاهرة: مطبعة دار الكتب، ١٩٧١)، الورقة ١٦٢ظ، نقلاً عن:

Shlomo Pines, «Ibn al-Haytham's Critique of Ptolemy,» in: Shlomo, *The Collected Works of Shlomo Pines: Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science*, pp. 547-548.

أما الأجزاء المتعلقة بالبصريات فقد أعاد نقلها: A. I. Sabra, «Ibn al-Haytham's Criticisms of Ptolemy's *Optics*,» *Journal of the History of Philosophy*, vol. 4, no. 2 (April 1966), pp. 145-149.

حول النص العربي، انظر: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، كتاب في حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه، صورة فوتوغرافية عن مخطوطة اسطنبول (فرنكفورت ـ أم ـ مان: [د.ن.]، ١٩٨٥). يمثل كتاب المناظر لابن الهيثم في علم البصريات ذروة المقاربة النقدية، التي يعبر عنها بشكل مباشر والمطبقة كبرنامج أبحاث، انظر: ابن الهيثم، كتاب المناظر (مخطوطة، اسطنبول، فاتح، ٣٢١٢)، الورقة ٤و.

(٤١) انظر: B. Musallam, «Avicenna between Aristotle and Galen,» in: *Encyclopaedia Iranica*, edited by Ehsan Yarshater (London: Routledge and Kegan Paul, 1986-1987), vol. 3, fasc. 1, pp. 94-99; Bruce S. Eastwood, «Al Fārābī on Extramission, Intromission, and the Use of Platonic Visual Theory,» *Isis*, vol. 70, no. 253 (September 1979), pp. 423-425, reprinted in: Bruce S. Eastwood, *Astronomy and Optics from Pliny to Descartes* (London: Variorum Reprints, 1989), and Franz Rosenthal, «On the Knowledge of Plato's Philosophy in the Islamic World,» *Islamic Culture*, vol. 14, no. 4 (October 1940), pp. 386-422 and especially pp. 412-416.

طبيعة الإرث، وبالأخص ذلك الإرث الوافد من العصور القديمة المتأخرة(٤٢).

١ ـ الدفاع عن النظريات اللمسية: الكندي وحنين بن إسحق

قدم الكندي (حوالى ٨٦٦م)، وهو أحد المبادرين الكبار في نقل العلم اليوناني، مجموعة من الحجج ضد نظريات الإدخال في أعماله حول البصريات (المناظر)، التي شكلت أيضاً نقداً لنظرية الرؤية العائدة لإقليدس. فقد أوضح، مستخدماً حججاً لم تكن دائماً جديدة تماماً، بعض الاختلافات المهمة بين نظريات «نسخات» الأجسام والنظريات اللمسية(٤٣).

تتعلق صحة أية نظرية عن الرؤية، بالنسبة إلى الكندي، بقدرتها على معالجة مسائل، كمثل إدراك بعد الأجسام وموضعها ووضوحها، وكذلك شكلها واتجاهها في الفضاء، بطريقة يمكن في الوقت نفسه التحقق من صحتها بالملاحظة وإثباتها بالمنطق الهندسي. ولا تستطيع نظرية الإدخال أو نظرية نسخات الأجسام تلبية هذه الشروط(٤٤).

تملك نظرية الإدخال قوة ملازمة لها، تتمثل في قدرتها على تحليل ميزة عادية لكنها أساسية في الإدراك اليومي. وهذه الميزة قوامها أننا ندرك فوراً أن جسماً يبقى هو نفسه دائماً في رسومه المنظورية الكبيرة الاختلاف. ففي الواقع تملك المنضدة دائماً ثلاث أرجل،

---

(٤٢) من أجل تقدير التطورات الحاصلة في العالم العربي، من الضروري في البداية معرفة الاستدلالات، بوضوح وجدية، التي قدمها اليونانيون سابقاً حول الرؤية، وصولاً إلى العصور القديمة المتأخرة. هذا ما تم التشديد عليه في نص كامل آخر لـ: Richard Sorabji «Atoms and Divisible Leaps in Islamic Thought,» in: Sorabji, *Time, Creation and the Continuum: Theories in Antiquity and the Early Middle Ages*, chap. 25, p. 384.

وقد أثبت سورابجي أن الاستدلالات اليونانية الموازية للعربية (عندما نستطيع أن نقارن حجة بحجة) بمقدورها المساعدة في إعادة بناء الاستدلالات العربية، وأحياناً «تسلط عليها ضوءاً جديداً وتعيد إحياء معانيها»، بالأخص بالنسبة إلى المرحلة القديمة من الفكر العربي.

(٤٣) حول الكندي، انظر: Jolivet and Rashed, «Al-Kindī, Abū Yūsuf Ya'qūb Ibn Isḥāq al-Sabbāḥ,» pp. 261-267,

الذي يحتوي على مراجع مفصلة. إن بصريات الكندي موجودة في ترجمة من العربية إلى اللاتينية، في: Axel Anthon Björnbo and Seb Vogl, «Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid: Drei Optische Werke,» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. 26, no. 3 (1912), pp. 3-41.

(٤٤) حول إعادة بناء مفصلة ودراسة لحجج الكندي، انظر: David C. Lindberg, «Al-Kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision,» *Isis*, vol. 62, no. 214 (December 1971), pp. 469-489, reprinted in: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, vol. 2, pp. 18-32.

وحول نسخة مختصرة، انظر: David C. Lindberg, «The Intromission-Extramission Controversy in Islamic Visual Theory: Al-Kindi Versus Avicenna,» in: Machamer and Turnbull, eds., *Studies in Perception: Interrelations in the History of Philosophy and Science*, pp. 137-159, reprinted in: David C. Lindberg, *Studies in the History of Medieval Optics* (London: Variorum Reprints, 1983).

سواء أنظرنا إليها جانبياً أم من عل. ومع مفهوم النسخة (أكانت مثلاً سلسلة إيدولا أم سلسلة أشكال للجسم) والتي تنفذ إلى العين، تصبح إمكانية معالجة مسألة الرؤية بالمنظور خارج دائرة البحث.

يعطي الكندي فيما يتعلق بمسألة الاتجاه في الفضاء وإدراك الشكل، مثال الدائرة المرئية جانبياً. فلو أن الرؤية هي نتيجة دخول شكل تام إلى العين، لوجب آنذاك إدراك شكل الدائرة بكاملها، في حين إنه عندما ننظر إلى هذه الدائرة جانبياً، فما نراه عندها ليس دائرة، بل خط مستقيم[٤٥]. وبالتالي، فإن ما يدرك هو بوضوح محصور بزاوية المنظور الذي يحدد مظهر الجسم الداخل في تماس مع الشعاع البصري. (يبقى السؤال المطروح التالي: إذا كان ما يدرك من الدائرة المرئية جانبياً هو خط مستقيم، فكيف نعرف هذا الشيء بصفته دائرة؟). إنها لمفارقة أن الكندي عندما يدعو إلى الاحتكام إلى الاختبار، فإن ما يفكر به هو بالتأكيد اختبار مثالي أكثر مما هو تجريبي. فمن السهل إيضاح الصعوبة الفائقة في رؤية جانب الدائرة بمظهر خط مستقيم عند استخدام دائرة من شريط حديدي (شبيه بالدوائر التي تحدث فقاقيع الصابون). فإن أقل حركة من الرأس أو من اليد تحرفه جانباً، فتسبب فوراً إدراك الدائرة. كما أن مجموعة كبيرة من الرسوم المنظورية الماثلة تجعلنا نرى قطوعاً ناقصة. وفي الواقع، نرى دائرة في العديد من حالات الرسوم المنظورية، في حين أن ذلك مستحيل فيزيائياً. وقد مثل هذا الثبات في إدراك الشكل، والذي لم يبينه الكندي، مسألة غير قابلة للحل في نظرية الشعاع البصري[٤٦].

قدم الكندي، انطلاقاً من فرضية أن الأجسام المدركة هي متماسكة وغير قابلة للتجزئة، تفنيداً آخر. فإذا كانت الرؤية تعمل بالإدخال، دون أن تأخذ، إذن، في الاعتبار وضع الأجسام في حقل الرؤية، ولا شيء سوى قربها أو بعدها، فإن هذه الأجسام تدرك في آن واحد وبقدر متساوٍ من الوضوح، بغض النظر عن معالمها (Paramètres). لذلك لا تحتاج الأعين إلى تعيين موضع الأجسام، وهذا الأمر مناف بوضوح لطبيعة الحال. وبالنسبة إلى الكندي، في تجربتنا اليومية لا تدرك الأجسام في الوقت نفسه، بل في تعاقب زمني كما هو الحال أثناء القراءة[٤٧]. وقد حاول بذلك أن يفسر وضوح الأجسام المرئية التي تقع، من

---

(٤٥) انظر: «De Aspectibus,» prop. 7, in: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler*, p. 23,

بخصوص مصادر هذه الحجة وكذلك غيرها في «مقدمة» ثيون الإسكندري لبصريات إقليدس، انظر ص ٢٠ و٢٢.

انظر أيضاً: Lindberg, «Al-Kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision,» p. 476, note (27) and p. 477.

(٤٦) حول معرفة ابن الهيثم لهذه المسألة، انظر: Gary C. Hatfield and William Epstein, «The Sensory Core and the Medieval Foundations of Early Modern Perceptual Theory,» *Isis*, vol. 70, no. 253 (September 1979), p. 368.

(٤٧) انظر: Prop. 9, in: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler*, p. 22.

جهة، قريبة، وباتجاه مركز حقل الرؤية، بالمقابلة مع تلك الأجسام التي تقع، من جهة أخرى، بعيدة أو في محيط حقل الرؤية، وذلك بضعف قدرة الرؤية بمقدار ما يبتعد الحقل عن العين، حيث يأخذ مصدره. وفي شرحه لم يربط الكندي بين قوة الشعاع المركزي للمخروط المنظوري وطول هذا الشعاع الذي كان أصغر طولاً بالمقارنة مع الأشعة الواقعة في محيط الحقل. وعوضاً عن ذلك، فقد انطلق شرحه من الضوء، معتبراً أن المخروط هو كتلة من الإشعاع المتواصل. لذلك فإن الأجسام الموجودة قرب المركز مرئية بوضوح أكثر، بسبب تركيز أكبر للأشعة في هذا الموضع. تماماً كما تنير شمعتان المكان نفسه بشكل أفضل من شمعة واحدة(٤٨).

وتستند حجج الكندي حول الأشعة البصرية، بشكل معبر، إلى اعتبارات هندسية من الاختبارات التجريبية والمثالية مع مصادر ضوئية. فانطلاقاً من الفرضية الضمنية عن تماثل بين الشعاع الضوئي والضوء نفسه، ابتدأ الكندي بإثبات مسلمة إقليدس، والتي بموجبها يكون انتشار الشعاع بمسار مستقيم. إلا أنه أثبت عند قيامه بهذا العمل، الطبيعة الثلاثية الأبعاد والطبيعة الفيزيائية للأشعة الضوئية (بالمقابلة مع الخطوط الهندسية الإقليدسية)، كذلك أثبت انتشارها المستقيم انطلاقاً من مصادر ضوئية(٤٩). وعلى سبيل المثال، يذكر تجربة ممكنة، حيث توضع شمعة كمصدر ضوئي مقابل فتحة يوجد خلفها ستارة. فإذا رسمنا عند ذاك خطاً مستقيماً من الحد الخارجي للمنطقة المضاءة على الستارة، لَمسَّ الخط رأس الفتحة ليمس من ثم رأس الشمعة(٥٠).

افترض الكندي بعد ذلك في نظريته عن البث أن أشعة تنطلق من كل نقطة في سطح العين وتتبع اتجاه كل خط مستقيم ينطلق من هذه النقاط. واستندت فرضيته هذه أيضاً إلى تماثل بين الإشعاعات والمصادر الضوئية. وهكذا نجد عنده ليس فقط سلسلة براهين عن الانتشار المستقيم للأشعة الضوئية، بل أيضاً وصفاً واضحاً للتشتت الشعاعي للضوء في جميع الاتجاهات انطلاقاً من كل نقطة من سطح جسم مضيء، وبذلك ينير الضوء كل ما يقع أمام الجسم على خط مستقيم(٥١). إلا أن هذا الوصف، بصفته تماثلاً لكيفية انتشار الشعاع البصري، يشكل بالنسبة إلى الكندي أساساً لتحديد أكثر دقة لوضع الجسم المرئي داخل مخروط الإشعاع. فهو يفرض فوراً انقساماً كمياً إلى نقاط لمفهوم الإشعاع البصري، الذي كان يعتبر حتى ذلك الوقت غير قابل للتجزئة في آن معاً على سطح العين وعلى سطح

---

(٤٨) انظر القضية ١٤، في: المصدر نفسه، ص ٢٦ ـ ٢٨.

(٤٩) انظر القضية ١١، في: المصدر نفسه، ص ٢٤ ـ ٢٥. يدعم ليندبرغ فكرة أن الأشعة بالنسبة إلى الكندي ليست كيانات جوهرية بل «انطباع الأجسام المضيئة على الأجسام المعتمة».

(٥٠) انظر القضية ١ ـ ٣، في: المصدر نفسه، ص ٢٠، و Lindberg, «Al-Kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision,» pp. 474-475.

(٥١) Prop. 13, in: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 28-30.

الجسم الذي يحصل معه التماس. وتعدل، بالتالي، مخروط إقليدس وبطلميوس وتحول إلى مجموعة مخروطات تشع من كل نقطة في سطح العين. والنتيجة الحاصلة هي «شبكة» ثلاثية الأبعاد من المخروطات، لا تترك أي جسم يفلت من الرؤية دون أن تكتشفه، مهما كان بعد الأشعة. وقد شكلت هذه المسألة سابقاً معضلة كبرى لنظريات المخروط البسيط(٥٢). ومع أن الكندي كان قادراً على تصور وتحليل انقسام الإشعاع الضوئي هندسياً، إلا أن الانقسام هذا لا ينطبق على عالم الإدراك، حيث تبقى الكيانات غير قابلة للتجزئة.

وعندما اتجه الكندي لدراسة العين نفسها لتقوية موقفه، لم يلزمه إلا القليل من الوقت ليبين أن العين ليست بجوفة كالأذن لكي تستطيع التقاط الانطباعات. فالعين كروية ومتحركة بطريقة تستطيع معها توجيه نظرتها وانتقاء الجسم وإرسال أشعتها إليه(٥٣). ويحتوي هذا المنطق على فرضية غائية ضمنية تربط ما بين تركيب العين ووظيفتها. وقد استخدم أحد معاصري الكندي، حنين بن إسحق (حوالى ٨٧٧م)، الذي يعتبر من أهم ناقلي الأعمال عن اليونانية والسريانية، العين ليرفض في آن معاً نظريات الإدخال ونظريات الشعاع البصري(٥٤). وقد تبنى في مؤلفاته العشرة عن تراكيب العين وأمراضها ومعالجتها (**كتاب العشر مقالات في العين**) نظرية جالينوس، التي بمقتضاها تحوّل البنوما الهواء، بوجود الضوء، إلى امتداد لعضو الرؤية(٥٥). ووصف هذا التحول بمصطلحات ميكانيكية، فالبنوما

---

(٥٢) يجد مخروط الإشعاع المتواصل مصدره في بصريات بطلميوس. فيما يتعلق بالاختلاف بين مخروطات الكندي ومخروطات بطلميوس وإقليدس، انظر الشكل رقم (٣٧)، في: المصدر نفسه، ص ٢٢٦. وضعت الترجمة العربية لبصريات بطلميوس انطلاقاً من مخطوطة للكتاب الأول المفقود حالياً (حول نظرية الرؤية بشكل عام) وانطلاقاً من نهاية الكتاب الخامس، حول الانكسار.

(٥٣) انظر القضية ١٠، في: المصدر نفسه، ص ٢٢. يصدر هذا أيضاً عن: Théon d'Alexandrie, *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolémée,* traduction française par N. Halma (Paris: [s. n.], 1821).

(٥٤) انظر: Ḥunayn Ibn Isḥāq, *Kitāb al-'ashar maqālāt fī al-'ayn al-mansūb li-Ḥunayn Ibn Isḥāq: The Book of the Ten Treatises on the Eye, Ascribed to Ḥunain Ibn Isḥāq (809-877 A.D.),* edited and translated by Max Meyerhof (Cairo: Government Press, 1928).

إن ترجمة حنين بن اسحق مستوحاة من بعض أعمال جالينوس، ومن بينها: *De usu partium* et *De placitis Hippocratis et Platonis.*

بخصوص ترجمات عربية لأعمال جالينوس، انظر: G. Bergsträsser: *Ḥunayn b. Isḥāq und seine Schule* (Leiden: [n. pb.], 1931), pp. 15-24, and *Neue Materialen zu Ḥunayn b. Isḥāq's Galen Bibliographie* (Lichtenstein: Neudeln, 1966), pp. 95-98, and Max Meyerhof, «New Light on Ḥunain Ibn Isḥāq and His Period,» *Isis,* vol. 8, no. 28 (1926), pp. 685-724.

(٥٥) حول نظرية حنين عن الرؤية، انظر: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler,* pp. 33-42;

بخصوص تحليل لبعض الاختلافات بين حنين وجالينوس، انظر: Bruce S. Eastwood, «The =

بعد خروجها من العين «تضرب» الهواء المحيط كما في «التصادم». ويبدو الطابع اللمسي لتصوره عن الرؤية واضحاً عندما يستخدم المقارنة مع عصا الأعمى: «مثال ذلك أن يكون إنسان يمشي في ظلمة وبيده عصا قد نصبها بين يديه طولاً فتلقى العصا دفعة شيئاً يمنعها من الذهاب إلى قدام. فيعلم قياساً من ساعته أن المانع لعصاه من الذهاب إلى قدام إنما هو جسم مصمت مدافع لما يلقاه، والذي يدعوه إلى هذا القياس إنما هو أنه قد علم متقدماً أن الذهاب والسعي في الهواء ليس منه مانع والذهاب والسعي في جسم صلب مما هو ممتنع. وللبصر أيضاً مع هذه الأشياء أنه إذا وقع على جسم أملس براق خالص الملاسة والبريق رجع منعكساً عنه إلى الحدقة التي خرج منها بانكسار المناظر ورجوعها على زوايا مساوية للزوايا التي عليها كان خروج خطوط البصر من العينين».

وقد حاول حنين أن يشرح، بالتوافق مع هذه المقاربة، كيف أن الرؤية ممكنة في المرايا وفي الأجسام الأخرى الملساء على قاعدة الانحراف. وطبق على نظرية جالينوس مبدأ تساوي زوايا السقوط والانعكاس الصادر عن النظريات اللمسية للرؤية(٥٦). إننا نمتلك مع «المقالات العشر» لابن إسحق ومع مؤلفه تركيب العين ليس فقط ترجمة أكثر منهجية لنظرية جالينوس، بل أيضاً تشريحاً تفصيلياً واسعاً للعين، نُقل على هذا الشكل في العالم العربي(٥٧).

غير أنه لم يتم إثبات أي تقارب بين مبادئ الكندي ووصف تشريح العين لابن إسحق في القرن التاسع، على الرغم من الانتشار الواسع لتأثيرهما. مع ذلك، وبفضل الانتشار الذي حققه حنين لأعمال جالينوس، أصبح تشريح العين جزءاً مكملاً للنقاشات حول الرؤية، ليس فقط بين الأطباء وأطباء العيون الذين استندوا إلى الشرح الجالينوسي، بل أيضاً بين هؤلاء الذين كانوا يرفضون فكرة شكل ما من البث انطلاقاً من العين. وفي الواقع، فقد شكل تشريح العين لاحقاً جزءاً مهماً من نقد النظريات اللمسية لمصلحة نظريات الإدخال.

Elements of Vision: The Micro-Cosmology of Galenic Visual Theory according to Ḥunayn Ibn = Isḥāq,» *Transactions of the American Philosophical Society,* vol. 72, no. 5 (1982), pp. 1-59, reprinted in: Eastwood, *Astronomy and Optics from Pliny to Descartes.*

أما فيما يتعلق بمصدر وطبيعة بنوما، فانظر: Manfred Ullmann, *Islamic Medicine,* Islamic Surveys; 11 (Edinburgh: Edinburgh University Press, 1978), especially pp. 62-63, الذي يستند إلى الموسوعة الطبية الكلاسيكية لعلي بن العباس المجوسي (المتوفى حوالى ٩٨٢ ـ ٩٩٥ واسمه باللاتينية Haly Abbas).

(٥٦) انظر: Ḥunayn Ibn Isḥāq, Ibid., fols. 108.19-111.29 and especially fols. 108.19-110.6, وفي الترجمة، ص ٣٥ ـ ٣٩.

(٥٧) انظر: المصدر نفسه، الأوراق ١٠٩، ١ ـ ١١٠، ٦، وفي الترجمة، ص ٣٦ ـ ٣٧.

٢ ـ نقض النظريات اللمسية: الرازي وابن سينا

أثار أبو بكر محمد بن زكريا الرازي (ت نحو ٩٢٣/ ٩٢٤م) في مؤلفه كتاب في الشكوك على جالينوس المسألة التالية: لو أن سبب تمدد البؤبؤ، عندما تكون إحدى العينين مغمضة، هو أن البنوما البصرية تنتقل إلى العين الأخرى، فكيف يكون باستطاعتنا، إذن، أن نشرح واقع أن العينين تتمددان وتضيقان سوية في ظروف مختلفة؟[٥٨] فتبعاً للرازي، لا يعود التغيير أبداً إلى الضغط الداخلي للبنوما المتمددة، كما فسر ذلك جالينوس، بل يعود إلى انخفاض في الضوء الخارجي[٥٩]. وقد أكد الرازي أن الضوء القوي يلحق الضرر بالعين إلى درجة التسبب في جرحها وإحداث الألم فيها، في حين أن العيون لا تستطيع الرؤية أبداً في الظلام. لذلك كان لا بد من إيجاد تسوية تجمع ما بين الضدين، وقد تم تقديمها بواسطة تركيب العين. فإذا كان الجسم في مكان مضاء بقوة، فإن البؤبؤ يضيق حتى يسمح بمرور ما يكفي من الضوء تماماً لكي تعمل الرؤية، ويمنع مع ذلك أي ضرر يلحق بالبصر. أما إذا كان الجسم مضاءً بدرجة أقل، فإن البؤبؤ يتسع لتأمين الضوء الكافي الذي يسمح بالرؤية. إن ما يصفه الرازي ليس التقلص العضلي وتمدد البؤبؤ، إنما قدرة العين على تغيير قياسات فتحتها تبعاً للضوء. ويوضح الرازي الطابع الميكانيكي لهذه العملية، بالتماثل مع عوامة أو صمام يتحكم بمنسوب الماء في نظام الري، وذلك بتوسيع وتضييق مدخل الخزان، ليسمح بتغذية ثابتة ومنتظمة للحديقة[٦٠]. وهكذا، فإن الرازي يعتبر حركة البؤبؤ

---

(٥٨) فيما يتعلق بتأثير مناظر الكندي، انظر: Eilhard E. Wiedemann, «Über das Leben von Ibn al Haitham und al Kindī,» *Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik*, Bd. 25 (1911), pp. 6-7, and Max Meyerhof, «Die Optik der Araber,» *Zeitschrift für Ophthalmalogische Optik*, Bd. 8 (1920), p. 20.

وحول حنين بن إسحق، انظر: J. Hirschberg, J. Lippert and E. Mittwoch, *Die Arabischen Lehrbücher der Augenheilkunde* (Berlin: Verlag der Konigl, Akademie der Wissenschaften, 1905), pp. 19-20, and Max Meyerhof, «Eine Unbekannte Arabische Augenheilkunde des 11. Jahrunderts n. Chr.,» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, Bd. 20 (1928), pp. 66-67.

أما فيما يتعلق بدوره في انتقال المعرفة الطبية اليونانية إلى العربية، انظر: G. Anawati and A. Z. Iskandar, «Ḥunayn Ibn Isḥāq,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, sup. 1, pp. 230-249.

(٥٩) تستند المناقشة التي تلي إلى الفصل من كتاب في الشكوك على جالينوس (ملّي مالك، مخطوطة ٤٥٥٤/٢٣، طهران)، في: A. Z. Iskandar, «Critical Studies in the Works of al-Rāzī and Ibn Sīnā,» paper presented at: *Proceedings of the First International Conference on Islamic Medicine, 2* (Koweit: [n. pb.], 1981), pp. 149-150.

(٦٠) قارن مع شروحات جالينوس، في: Galenus: *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium*, p. 476, and *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*, VII, 4.15. =

كآلية تنظّم كمية الضوء النافذ إلى العين.

يبدو الرازي أكثر دقة في الجزء المتعلق بالتشريح من مؤلفه كتاب **المنصوري**، حيث يصف كيف يضيق البؤبؤ في ضوء وهاج ويتسع عندما يقل الضوء لكي يقدم تماماً ما تحتاجه الجليدية(٦١). وقد لاحظ جالينوس وآخرون في العصور القديمة الخطر الجلي، الذي يحدث عندما ننظر مباشرة إلى الشمس. إلا أننا نجد عند الرازي هذه المرة ارتباطاً واضحاً بين كمية الضوء الذي يصل إلى العين، انطلاقاً من جسم مرئي، وبين تغير قياسات البؤبؤ، وبين الرؤية. ولسوء الحظ، لم يصلنا مؤلفه المكرس خصيصاً لحركة البؤبؤ، والأعمال المنسوبة إليه حول الرؤية(٦٢). ومن غير الممكن، استناداً إلى أجزاء المعلومات المتوفرة لدينا، تقدير مدى تميز الرازي عن الأفكار الهلينستية والمشائية حول دور الضوء كوسيلة لمواكبة (من خلال اللون) الشكل المتماسك لجسم مرئي، وحول النقل المباشر لهذا الشكل(٦٣).

وقد استعاد ابن سينا (٩٨٠ - ١٠٣٧م) العلاقة المثبتة بين الضوء وتشريح العين والرؤية، واستخدمها لنقض النظريات اللمسية سواء في صيغها الهندسية أو المتعلقة بالبنوما. كما جمع أصنافاً مدهشة من الحجج في أعمال كثيرة له، وبالأخص في موسوعته كتاب **الشفاء** وفي نسختها الموجزة كتاب **النجاة**، وذلك ليثبت أن فكرة البث من العين نحو

= انظر أيضاً: Pines, *The Collected Works of Shlomo Pines: Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science.*

يوحي پاينز أن وجهات نظر الرازي تختلف عن وجهات نظر جالينوس حول معرفة ما إذا كان العصب البصري «أجوفاً» أم لا، وحول مسار البنوما، وحول واقع أن شكل الجسم المرئي ينقل بواسطة الهواء، من خلال العصب البصري، وصولاً إلى التجاويف الدماغية الأمامية التي تحتوي على البنوما، وتسمح هذه الأخيرة بالإدراك الحاسي. فيما يتعلق بالمذهب الذري للرازي بالنسبة إلى ديموقريطس، انظر:
Shlomo Pines, *Beiträge zur Islamischen Atomenlehre* (Berlin: Gräfenhainichen, Gedruckt bei A. Heine, 1936).

(٦١) حول أمثلة عن الصمامات والفواشات الأوتوماتيكية في المراقبة الهيدرولية عند معاصري الرازي، انظر: محمد بن موسى بن شاكر، كتاب الحيل، نشرة نقدية للنص العربي من قبل أحمد يوسف الحسن بالتعاون مع محمد علي خيّاطة ومصطفى تعمري، مصادر ودراسات في تاريخ العلوم العربية الإسلامية، سلسلة تاريخ التكنولوجية؛ ٣ (حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١)، والترجمة الإنكليزية له، في: Mohammed Ibn Musa Ibn Shākir, *The Banū (Sons of) Mūsā Ibn Shākir: The Book of Ingenious Devices (Kitāb al-ḥiyal)*, translated by Donald Routledge Hill (Dordrecht; Boston; London: Reidel Publishing Company, 1979).

(٦٢) انظر: Abū Bakr Muhammad Ibn Zakariyyah al-Rāzi, «Kitāb al-Manṣūr,» dans: Abū Bakr Muhammad Ibn Zakariyyah al-Rāzi, *Trois traités d'anatomie arabes, par Muhammed Ibn Zakariyyā' al-Rāzī, 'Alī Ibn al'Abbās et Abū 'Ali Ibn Sīnā*, édité et traduit par P. de Koning (Leiden: Brill, 1903), livre 1, chap. 8, p. 53.

(٦٣) كان الرازي مطلعاً على *De anima*، المقالة الثانية، الذي ينسب إلى إسكندر الأفروديسي، انظر: Pines, «Razi Critique de Galien,» p. 487, note (7).

الجسم هي محال منطقياً، ولا تتفق مع الواقع والتجربة اليومية ومع هندسة المخروط البصري نفسها في تحليل إدراك قياس الأجسام وبعدها(٦٤).

كما أكد، بعد تدعيم مواقفه مرتكزاً على النقض الهلينستي والمشائي، أنه إذا حصل تماس مع أجسام مرئية في قاعدة مخروط الرؤية، فإنه ينتج عن ذلك بالضرورة أن قياساتها بالإضافة إلى خصائصها المرئية ستصل دون أن يكون لها علاقة مع بعدها. ومن جراء ذلك، لا يمكن تطبيق قوانين المنظور(٦٥). في حين أن إدراك القياس الظاهري يتحدد، بالنسبة إلى ابن سينا، بالبعد نسبة إلى زاوية رأس مخروط الرؤية في العين. فكلما ابتعد الجسم، ضاقت الزاوية وصغرت المنطقة التي يحتلها شكل الجسم على سطح الجليدية. وبالتالي، فإن هندسة مخروط الرؤية لا معنى لها، إلا إذا اعتبرت الجسم، وليس العين، كنقطة انطلاق(٦٦). ويوضح ابن سينا هذا الأمر، عندما يشرح أن جسماً ما موجوداً قرب العين يشكل زاوية تصغر باستمرار بمقدار ما يبتعد هذا الجسم عن العين؛ وهكذا نراه أصغر. وفي الواقع، فإن الزاوية تكون أحياناً صغيرة لدرجة أنه لا يمكن معها رؤية الجسم، حتى ولو كان منطقياً في تماس دائم مع قاعدة المخروط وكان بإمكان الشعاع اللمسي أن يلمسه (يشعر به). وهكذا، فإن زاوية المخروط تستخدم كإشارة إلى قياس الجسم بالنسبة إلى المسافة، إذا افترضنا أن «الشكل» يأتي من الجسم إلى العين(٦٧).

---

(٦٤) انظر: Abū 'Ali Husain Ibn 'Abd Allah Ibn Sīnā: *Kitāb al-Shifā'(Avicenna's De Anima: Being the Psychological Part of Kitāb al-Shifā')*, edited by F. Rahman (London; New York: Oxford University Press, 1970), 115:20-150:19; *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, translated by F. Rahman (Oxford: [n. pb.], 1952), books II, VI, ii, and

أبو علي الحسين بن عبد الله بن سينا، **الشفاء ـ الطبيعيات**، نشر ج. قنواتي وس. زايد (القاهرة: [د. ن.]، ١٩٧٠)، الفصل ٦: «كتاب النفس».

(٦٥) فيما يتعلق بحجج ابن سينا، انظر: Lindberg: «The Intromission - Extramission Controversy in Islamic Visual Theory: Al-Kindi Versus Avicenna,» and *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 43-52.

(٦٦) انظر: Ibn Sīnā: *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, II, 27: 23-29, and *Kitāb al-Shifā' (Avicenna's De Anima: Being the Psychological Part of Kitāb al-Shifā')*, 115: 20-150: 19.

مع أن ابن سينا قد صُنّف كـ «أرسطي»، انظر: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 43-52,

إلا أن صلات مقاربته لمسألة الرؤية مع مقاربة أرسطو أو الشراح الأرسطويين، مثل توميستيوس وفيلوبون وغيرهم، الذين يبتعدون عن أرسطو حول بعض المسائل المحددة، لم تُدرس حتى الآن. أما فيما يتعلق بمصادر بعض حجج ابن سينا، المأخوذة من أرسطو وإسكندر الأفروديسي، فانظر:

Ibn Sīnā, *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, pp. 76-77.

(٦٧) انظر: Ibn Sinā, *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, 29: 3-15; Lindberg, Ibid., figure 6, p. 50, and Abū 'Ali Husain Ibn 'Abd Allah Ibn Sīnā, *Le Livre de Science*, traduit par =

إن نقض ابن سينا لنظريات الشعاع البصري ولنظريات البنوما لا يلفت النظر لأصالته، إذ إنه باستطاعتنا أن نجد معظم هذا النقض بدءاً بأعمال أرسطو ووصولاً إلى الأعمال العائدة إلى العصور القديمة المتأخرة، بقدر ما هو بارز بحججه المعروضة التي تثير الدهشة لكثرتها وتنوعها واتساعها، بالإضافة إلى فعاليتها.

يشكل التصور الخاص لابن سينا عن الرؤية مخططاً لنقاشه حول الإحساس، الذي يعتبر انطباعاً لشكل الأجسام على عضو الحاسة المعنية. إنه يدقق شروط هذه الرؤية، فعندما يلتقي الضوء بالجسم المرئي (جسم ملون) المعزول عن العين بوسط شفاف (غير ملون)، ينتقل شكل هذا الجسم إلى البؤبؤ، حيث ينطبع على سطح الجليدية. ويتابع مبرراً نظرية الإدخال، استناداً إلى تشريح العين، فيقول إنه إذا لم تكن وجهة النظر هذه صحيحة، فلم تكن العين لتخلق بهذه الغلافات وبهذه الأخلاط المتنوعة والتي تتنوع في الأشكال والتراكيب(٦٨). إلا أنه لا يتوسع في هذا الموضوع. إن ما يبرز في وصفه لتشريح العين في القانون في الطب هو التشديد على دور الضوء، كما في أعمال الرازي. فمن جهة، على هذا الضوء أن يستطيع الوصول إلى الجليدية دون عائق، وهذا ما يفسر شفافية الرطوبة المائية، كما يفسر شفافية الغلاف الدقيق للغاية والسابق للجليدية. وفي الوقت نفسه، فإن الجليدية تقع في وسط الكرة العينية، بهدف حمايتها من فائض الضوء. وهكذا، فإن شفافية غلافات العين المختلفة، المشابهة لشفافية الوسط الواقع بين الجسم والعين، تسمح ببساطة للضوء أن ينقل فوراً، من خلال الألوان، الخصائص المرئية للأجسام الكمداء وصولاً إلى الجليدية. وما يتم إدراكه يبقى مرة أخرى نوعياً وغير قابل للتجزئة. إن الإسنادات المكررة لابن سينا إلى ظواهر المرآة كتشابه، تكشف تقليدية تصوره. وهو يملك نظرية معدة عن الإحساس يميز فيها الحواس الداخلية والحواس الخارجية. فالشكل المتماسك، الذي تقدمه الرؤية، يجد تفسيراً له في تدخل «حواس داخلية» تتركز في الدماغ(٦٩).

= Mohammad Achena et Henri Massé (Paris: Société d'édition «Les Belles lettres», 1955-1958), 2:61.

حول حجة مماثلة أدلى بها إسكندر الأفروديسي، انظر: Alexander of Aphrodisias, *«De Anima Libri Mantissa,»* p. 381.

(٦٨) انظر: Ibn Sīnā, *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, II, 27: 20; 29: 31.

لمقارنة نصوص حول تشريح العين في «القانون» مع جالينوس، انظر: Al-Rāzī, *Trois traités d'anatomie arabes, par Muhammed Ibn Zakariyyā' al-Rāzī, 'Alī Ibn al'Abbās et Abū 'Alī Ibn Sīnā*, pp. 660-666, et notes M à O, pp. 799-802.

(٦٩) بخصوص «تماثل المرآة»، انظر: Crombie, *The Mechanistic Hypothesis and the Scientific Study of Vision: Some Optical Ideas as a Background to the Invention of the Microscope*, p. 6, note (9), and Lindberg, Ibid., p. 3.

انظر أيضاً: G. A. Russell, «The Rusty Mirror of the Mind: Ibn Tufayl and Ibn Sina's Psychology,» in: *The World of Ibn Tufayl: Interdisciplinary Perspectives on Hayy b. Yaqzan* (London: Oxford University Press, [Under Press]).

وقد استغنى ابن سينا عن الاستعارة بعصا الأعمى في نقضه، وبخلاف ذلك فإنه دعم الفكرة القائلة إن الضوء يواكب فوراً المعلومات البصرية وصولاً إلى العين. إلا أنه لم يقدم أي شرح للطريقة التي تتم بها هذه الظاهرة. وتجدر الملاحظة أن ابن سينا رفض التماثل الميكانيكي للانحراف فيما يتعلق بالضوء. أما معاييره للرفض فهي معبرة، فلو أن الضوء ينعكس بقفزة كما تقفز الطابة، فإنه سيرتد على جميع الأسطح غير النافذة، حتى ولو كانت هذه الأخيرة غير مصقولة. وهذا ما كان مرفوضاً بالنسبة إليه من وجهة نظر منطقية(٧٠).

وهكذا لم يقدر ابن سينا أن يقدم بديلاً نظرياً قابلاً للحياة عن مفهوم الشكل المتماسك. لكن مسيرته تكشف عن براعة تكتيكية محضة في إعادة صياغة المسائل، دون أن يقدم مع ذلك حلولاً ناجعة لها. ففي الوقت الذي يثبت فيه أن بعض النظريات لا تفي بالغرض، نراه يتملك عناصر منها ليستخدمها ببراعة فائقة. وينتج عن ذلك عمل يمتاز بغنى موسوعي، يجمع في انتقائيته على سبيل المثال: التصور الأرسطي «للأشكال» في الأحساس؛ كما يجمع التشريح الجالينوسي للعين واتصالاتها مع الدماغ، بالإضافة إلى الموقع المهم الذي تحتله الجليدية في الرؤية؛ والمفهوم المشائي للضوء كحركة نوعية من الجسم المضيء نحو العين؛ وأخيراً التحليل الهندسي للمخروط البصري.

ثالثاً: تركيب علم البصريات وعلم التشريح

أجرى ابن الهيثم في كتاب المناظر دراسة تجريبية في غاية الدقة لخصائص الضوء، الذي اعتبره كياناً فيزيائياً متميزاً للرؤية(٧١). كما قدم في الوقت نفسه وصفاً واسع التفصيل لتركيب العين مع دراسة منفصلة لوظيفتها. ثم دمج بعد ذلك هاتين الدراستين، في محاولة لشرح الرؤية كنتيجة لتشكل صورة في العين آتية من الضوء المبثوث والمنحرف(٧٢).

---

(٧٠) انظر: A. I. Sabra, *Theory of Light from Descartes to Newton* (London: [n. pb.], 1967), p. 72, note (13).

(٧١) قدمت نسخات الميكروفيلم لمخطوطات كتاب المناظر (أحمد الثالث ـ ١٨١٩ وفاتح ٣٢١٢ ـ ١٦) بلا مقابل من مكتبات توبكابي والسليمانية. نشر صبرا (Sabra) المخطوطات الباقية للمقالات الثلاث الأولى من المقالات السبع لـ مناظر ابن الهيثم. انظر: «Ibn al-Haytham, Abū ʿAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan,» in: *Dictionary of Scientific Biography,* vol. 6, pp. 189-210.

(٧٢) إن المسألة المعقدة حول اللون تقع خارج موضوع هذه المقالة. بالنسبة إلى ابن الهيثم، يكون اللون مصحوباً دائماً بالضوء. حول تحليل الاختلاف في معالجة اللون والضوء عند هذا المؤلف، انظر: Roshdi Rashed, «Lumière et vision: L'Application des mathématiques dans l'optique d'Ibn al-Haytham,» dans: René Taton, ed., *Roemer et la vitesse de la lumière* (Paris: Vrin, 1978), pp. 19-44, et surtout pp. 34-35.

وتكمن أصالة أسلوبه في قدرته على تحويل المواضيع المعقدة إلى مسائل بسيطة، مستقلة على الرغم من أنها مرتبطة بشكل وثيق، وعلى إخضاع متغيرات كل مسألة لتحاليل كمية في شروط من التدقيق الصارم. ونستطيع أن نجد تعبيراً عن هذه المسيرة في مجموعة تجارب عن انتشار الضوء. فهو يستخدم حجرة سوداء يحمل أحد جدرانها فتحة لتقديم مصدر الضوء. ويسمح الغبار أو الدخان الموجود في الحجرة برؤية حزمة الضوء للتحقق من استقامة الأشعة. عندما تكون هذه الحجرة فارغة، فإننا نرى أن المصدر الضوئي يُسقط نقطة ضوء على الحائط المقابل. ويتم تدقيق موقع النقطة بمسطرة، ثم يتبع ذلك تدقيقات أخرى باستخدام عملية تداخل. ومرة أخرى، تكون الخلاصة أن الضوء ينتقل بخط مستقيم، طالما أننا لا نستطيع حجب النقطة المضاءة إلا على امتداد مسار مستقيم. ويبقى التداخل على امتداد مسارات أخرى (مقوسة مثلاً) دون أي أثر على النقطة المضاءة(٧٣).

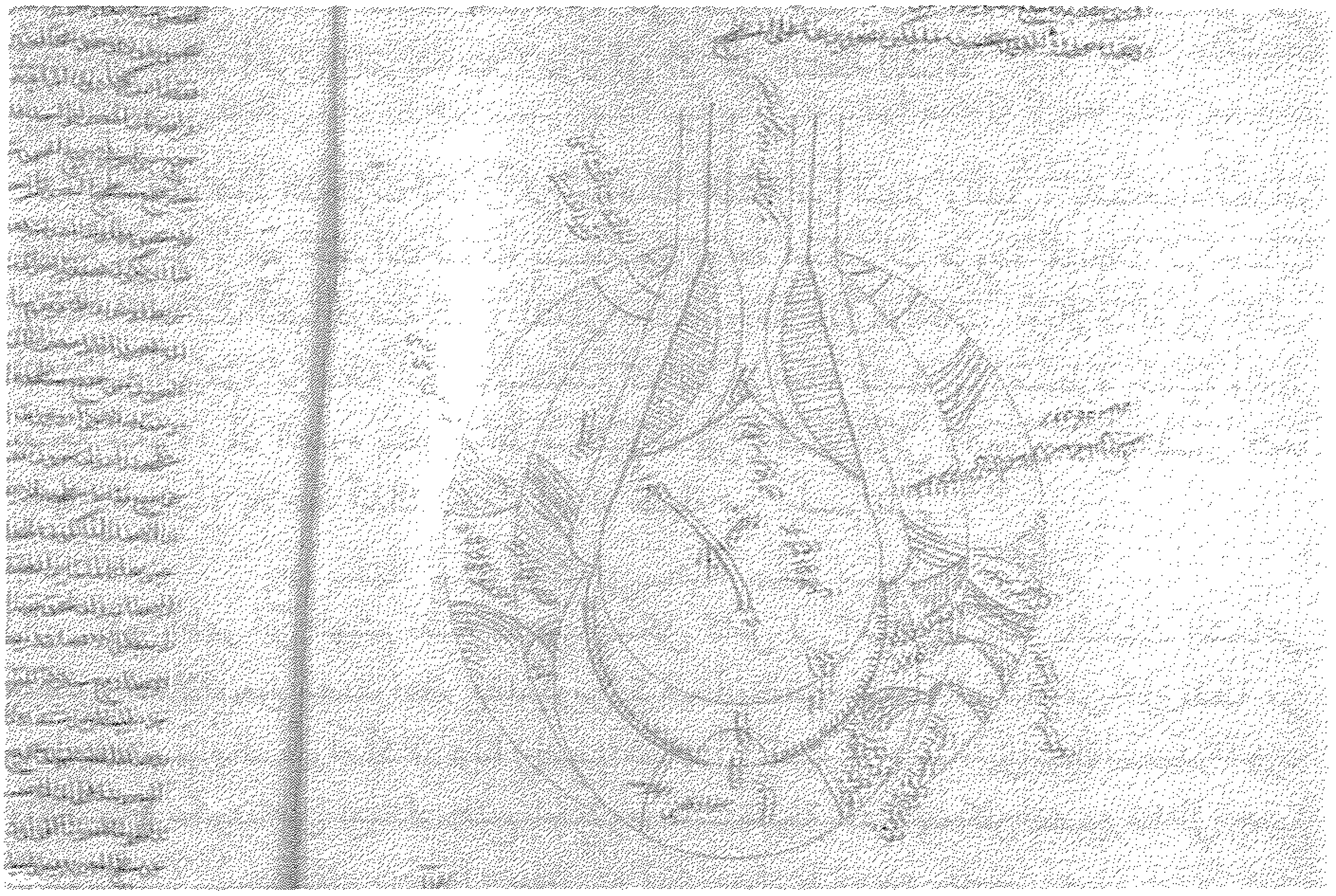
طُبقت هذه التجارب تكراراً في ساعات مختلفة من النهار والليل، باستخدام مصادر مختلفة للضوء، مع حجرات سوداء بسيطة ومزدوجة الحجيرات مزودة بفتحات تم حسابها بعناية. كما تمت أيضاً دراسة الدور المتعلق باتساع وبعد هذا الفتحات. وبالإضافة إلى ذلك، أثبت ابن الهيثم، بواسطة أنبوب يستخدم كجهاز مراقبة، مثبت على مسطرة خشبية ومجهز بفتحة متغيرة، أن الضوء ينتقل بخط مستقيم ما بين الجسم المرئي والعين. ومع تضييق فتحة الجهاز تدريجياً، يلاحظ آنذاك اختفاء أجزاء مقابلة من الجسم المرئي(٧٤).

كما أظهر ابن الهيثم نفسه منهجياً بشكل كامل في أعماله المتعلقة بالتشتت الشعاعي للضوء انطلاقاً من مصدر ما. فقد درس كيف أن الضوء يشع انطلاقاً من كل نقطة من سطح جسم ما، سواء أكان هذا الجسم مضيئاً بنفسه أم مضاءً بواسطة مصدر آخر، والإشعاع يكون على امتداد جميع الخطوط المستقيمة التي يمكن تصورها في جميع

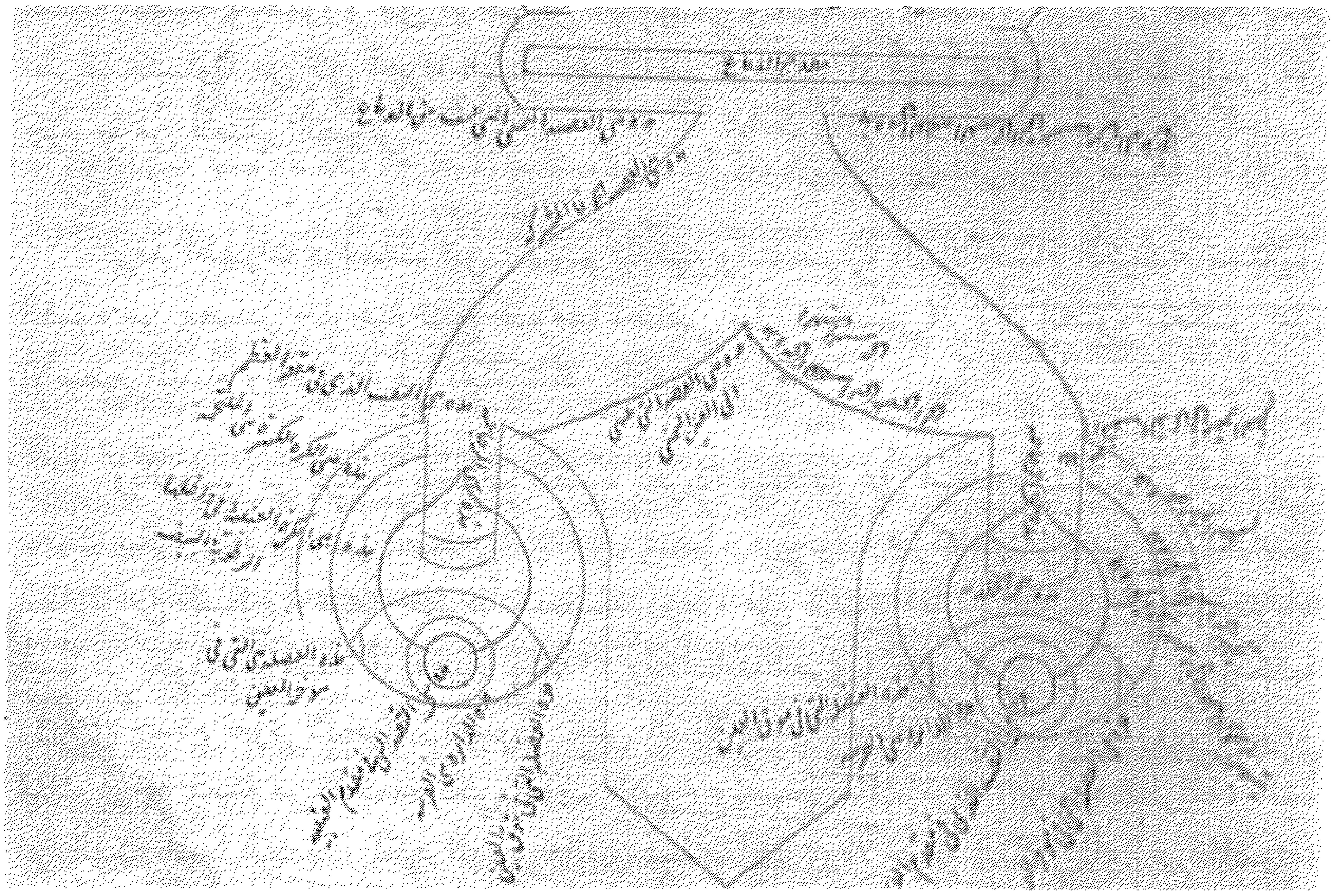
---

(٧٣) انظر: أبو علي محمد بن الحسن بن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والثالثة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقتان ١٤ ظ - ١٥ و. وضعت التجارب اللاحقة في كتاب المناظر، المقالة الثانية، «خصائص الضوء» والمقالة الثالثة، «خصائص الأشعة الضوئية وكيف يحصل إشعاعها». حول النظريات الفيزيائية عن ابن الهيثم، انظر: Roshdi Rashed, «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham,» *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 6, no. 4 (1969-1970), pp. 271-298 and especially pp. 274-276, and A. I. Sabra, «The Physical and the Mathematical in Ibn al-Haytham's Theory of Light and Vision,» paper presented at: *The Commemoration Volume of al-Biruni International Conference in Tehran* (Tehran: [n. pb.], 1976), pp. 439-478 and especially pp. 457-459.

(٧٤) انظر: ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والثانية، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الأوراق ٥ ظ - ٨ و. هناك براهين تجريبية أخرى لهذا المبدأ باستخدام جهاز مراقبة خاص بفتحتين متغيرتين (أفقية وعمودية) في «الرسالة حول ضوء القمر». انظر: Matthias Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik,* Bœthius; Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Exakten Wissenschaften; Bd. 1 (Wiesbaden: F. Steiner, 1963), pp. 164-200.



كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**
(طهران، مخطوطة سبهسلار، ٥٥١).
غيّر ابن الهيثم تماماً مفهوم «الأبصار»، فقبله كان الاتجاه الأهم عند الرياضيين خاصة هو فكرة الشعاع البصري، أي الشعاع الخارج من البصر إلى المبصر، إلا أن ابن الهيثم عكس الأمر وبيّن خروج الأشعة من المبصر الى البصر. وتطلّب هذا الموقف الجديد معرفة العين بصورة أفضل لفهم كيفية قبولها للضوء وكيفية تكوّن الصورة فيها.
ولكن علم التشريح، في ذلك الوقت، لم يكن على مستوى
يمكن معه معرفة العين على نحوٍ تام.
نرى في هذه الصورة التي نقدمها كيفية هذا التصور
عند ابن الهيثم كما نقلها الفارسي.



الصورة رقم (٢٠ ــ ٢)

كمال الدين الفارسي، **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**

(طهران، مخطوطة سبهسلار، ٥٥١).

غيّر ابن الهيثم تماماً مفهوم «الأبصار»، فقبله كان الاتجاه الأهم عند الرياضيين خاصة هو فكرة الشعاع البصري، أي الشعاع الخارج من البصر إلى المبصر، إلا أن ابن الهيثم عكس الأمر وبيّن خروج الأشعة من المبصر الى البصر. وتطلّب هذا الموقف الجديد معرفة العين بصورة أفضل لفهم كيفية قبولها للضوء وكيفية تكوّن الصورة فيها.

ولكن علم التشريح، في ذلك الوقت، لم يكن على مستوى يمكن معه معرفة العين على نحوٍ تام.

نرى في هذه الصورة التي نقدمها كيفية هذا التصور عند ابن الهيثم كما نقلها الفارسي.

الاتجاهات[٧٥]. ثم أثبت بعد ذلك أن الضوء يصيب العين بهذه الطريقة. ولتحديد ما إذا كان الضوء يشع انطلاقاً من سطح المصدر الضوئي كله، فقد استخدم ليس فقط الحجرات السود، بل أيضاً جهازاً يسمح بأخذ قياسات دقيقة. نذكر منها، على سبيل المثال، قنديل زيت مزوداً بفتيل عريض جداً، لكي يشكل مصدر ضوء ثابت وحاد، وموضوعاً أمام طرف أنبوب من النحاس، بحيث يمر القنديل عبر المركز لكي يشكل النحاس ما يشبه الغطاء الذي يمنع مرور أضواء طفيلية محتملة. كما توضع ستارة في مقابل الطرف الثاني من الأنبوب. وعندما نحرك المصدر الضوئي حول فتحة الأنبوب، تبقى النقطة الضوئية المسقطة على الستارة ثابتة بالنسبة إلى ٣٦٠ درجة دوران. وعندما نضيق فتحة الأنبوب، تستمر النقطة المضيئة بالظهور، على الرغم من أنها تصغر وتضعف. وهكذا، أثبت أن الضوء يشع بطريقة متساوية من كل أجزاء الفتيل ذي المقطع الواحد، أو أيضاً من كل النقاط وليس من جزء ما من المصدر الضوئي[٧٦].

وقد أظهرت دراسات ابن الهيثم المدققة والتفصيلية أن الأجسام الكمداء تستقبل الضوء من مصادر خارجية تنتج ضوءها الخاص بها (كالشمس)، وأن الضوء ينعكس على الأسطح الملساء والمصقولة في اتجاه يمكن التكهن به.

وبالعكس من ذلك، ينحرف الضوء بطريقة متفككة على أسطح خشنة وغير مستوية، بحيث يبقى جزء منه على السطح «ثابتاً» أو ممتصاً، وينحرف جزء آخر في جميع الاتجاهات، انطلاقاً من السطح، متبعاً خطوطاً مستقيمة. وبناء على ذلك، «فإن كل جسم يدرك بصرياً، يجب أن يكون إما مضاءً أو مضيئاً بذاته». وبكلمات أخرى، فإنه يشرح بوضوح أن إمكانية رؤية الأجسام تعود لانحراف الضوء. حتى ان الأجسام الشفافة التي تسمح بمرور الضوء، تملك درجة معينة من الكمدة لكي تحرف الضوء وتصبح بذلك مرئية. وبهذه الطريقة، أنشأ ابن الهيثم المبدأ البسيط، لكن المهم، والذي بمقتضاه نرى الأجسام العادية (أي غير المضيئة) فقط بواسطة الضوء المنحرف. هذا هو المبدأ الذي يشكل قاعدة نظريته عن النقاط المقابلة، مما يجعل مسألة الأشعة البصرية اللمسية و«النسخات المتماسكة» باطلة تماماً[٧٧].

وقد شرح ابن الهيثم الانكسار (سواء بالنسبة إلى الأسطح المستوية أو المقوسة)، استناداً إلى مبدأ مفاده أن سرعة الضوء تتأثر بكثافة الوسط الذي يمر به. فيأخذ في الاعتبار

---

(٧٥) هناك تجارب عديدة وضعت في: ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والثالثة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، انظر مثالاً عنها واضحاً، بوجه خاص في الورقتين ٢٥ظ - ٢٦و.

(٧٦) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والثالثة، الأوراق ٢٢و - ٢٥و.

(٧٧) وصف ابن الهيثم في مقالته «في الضوء» المبادئ المستندة إلى التجارب من كتاب المناظر، انظر الترجمة النقدية، في: Roshdi Rashed, «Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham (Alhazen),» *Revue d'histoire des sciences*, vol. 21 (1968), pp. 197-224.

عنصرين في حركة الضوء: العنصر الأول وهو عمودي متعامد مع السطح الذي يفصل الوسطين ويملك سرعة ثابتة، والعنصر الثاني وهو أفقي متوازٍ مع السطح ويملك سرعة متغيرة. وعند الانتقال من وسط إلى آخر أكثر كثافة (من الهواء إلى الماء مثلاً)، تنقص السرعة، في حين إنها تزداد عند الانتقال إلى وسط أقل كثافة (من الزجاج إلى الماء مثلاً). وقد استخدم ابن الهيثم هذا المبدأ لدراسة دور الأسطح الشفافة للعين في تشكل الصور(٧٨).

١ ـ من نسخات الأجسام إلى الصور المضيئة المسقطة

تقع تجارب ابن الهيثم عن الصور المضيئة المسقطة في قلب فرضياته عن العين والرؤية. فقبله كانت الصور تقترن بالمرايا وبالأسطح الأخرى الملساء بما فيها أجزاء العين(٧٩). وكان يتم شرحها إما بمصطلحات انحراف الأشعة البصرية، وإما بوجود

(٧٨) إن النتائج التجريبية لابن الهيثم حول الانكسار، والتي بيّنها في ثماني قواعد، قد أحصاها صبرا في: A. I. Sabra, «Ibn al-Haytham,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 6, p. 194.

وتمت مناقشتها، في: A. I. Sabra, «Explanation of Optical Reflection and Refraction: Ibn al-Haytham, Descartes, Newton,» paper presented at: *Actes du X^e congrès international d'histoire des sciences, Ithaca, 1962* (Paris: [s.n.], 1964), vol. 1, pp. 551-554; Rashed: «Lumière et vision: L'Application des mathématiques dans l'optique d'Ibn al-Haytham,» pp. 30-44, et «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham,» pp. 293-296.

(٧٩) فيما يتعلق «بالصور» في المرايا وكذلك في العين، انظر: Galenus: *On Anatomical Procedures, the Later Books*, X, 3, 40; *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium*, X, 6, 479.

إن البحث الذي قام به جالينوس من أجل موضعة صورة البؤبؤية على السطح الأمامي للجليدية (على الغشاء العنكبوتي) قد تابعه: Hunayn Ibn Ishāq, *Kitāb al-'ashar maqālāt fī al-'ayn al-mansūb li-Hunayn Ibn Ishāq: The Book of the Ten Treatises on the Eye, Ascribed to Hunain Ibn Ishāq (809-877 A. D.)* 109, pp. 36-37.

بخصوص التعبير عن نظريات الادخال، انظر أيوب الرهاوي (Job d'Edesse)، توفي بعد العام ٨٣٢، في: Ayyūb Al-Ruhāwī, *Book of Treasures*, edited and translated by A. Mingana (Cambridge: Heffer, 1935), disc. 3, chap. 4, p. 134.

يدعم أيوب الرهاوي فكرة أنه مثلما يسقط ضوء الشمس على حائط انطلاقاً من أجسام نحاسية ملساء أو من أطباق فضية أو من سطح الماء أيضاً، «بنفس الطريقة عندما يصل ضوء الشمس إلى العين، فإنه يسبب في العين انعكاساً للأجسام أو للأشكال الخارجية». انظر أيضاً:

Abū 'Ali Husain Ibn 'Abd Allah Ibn Sīnā: «On the Soul,» in: Ibn Sīnā: *Kitāb al-Najāt (Avicenna's Psychology)*, II, 27, fol. 30; *Le Livre de science*, p. 60, et *A Compendium on the Soul*, translated by Edward Abbott Van Dyck (Verona: Stamperia di N. Paderno, 1906), pp. 51-52, and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, p. 49.

نسخات للأجسام[٨٠] وبتحديده لمفهوم الصورة البصرية، كتنظيم لمصادر نقاط ضوئية، فقد أحدث قطعاً مع تلك المقاربة التي تعتبر الرؤية كعملية نوعية. وللمرة الأولى، فإن مفهومه عن الأشعة البصرية المسقطة انطلاقاً من كل نقطة من سطح جسم على نقطة مقابلة من الستارة، يقدم لنا شرحاً نوعياً بسيطاً عن تشكل صورة.

ونحن لا نملك قبل ابن الهيثم أي إثبات أو معرفة مباشرة عن جهاز إسقاط صورة من خلال «ثقب إبرة» في حجرة مظلمة[٨١]. ومع أنه فصّل بوضوح أسس هذه الحجرة المظلمة، إلا أن التجارب مع ثقب الإبرة لم يتم وضعها في كتاب المناظر. وقد استخدم بخاصة في أبحاثه حول الضوء أجهزة يمكن تسميتها بشكل أفضل «الحجرات بالأشعة»، وكانت تتألف من حجرات سوداء مجهزة بفتحات تسمح بإسقاط أشعة الضوء على حائط أو سطح أكمد. كما يمكن تضييق هذه الفتحات، المصممة وفقاً لقياسات دقيقة، حسب الرغبة[٨٢].

إن تجربة ابن الهيثم هذه، التي تقترب أكثر ما تقترب من الحجرة المظلمة، هي عبارة عن جهاز لإسقاط الضوء من خلال شق يمكن تضييقه، مؤلف من باب بمصراعين. وقد وضع عدة قناديل بشكل منفصل على مستوٍ أفقي مقابل الفتحة التي تطل على الحجرة السوداء (البيت المظلم). ووصف ظهور بقع ضوء على الحائط القائم وراء الأبواب، عندما يتم تضييق الفتحة إلى الحد الأدنى. كما لاحظ أنه إذا غُطّيت شعلة أحد القناديل، فإن البقعة المقابلة هي التي تختفي وحدها على الحائط وراء الفتحة. أما إذا رفعنا الغطاء عن الشعلة، فإننا نجد مرة أخرى بقعة الضوء في المكان نفسه تماماً.

---

(٨٠) يعود الترابط بين ظاهرة الرؤية وظهور «نسخة» على البؤبؤ إلى ديموقريطس، انظر: Crombie, *The Mechanistic Hypothesis and the Scientific Study of Vision: Some Optical Ideas as a Background to the Invention of the Microscope*, p. 6, note (9), and Lindberg, Ibid., p. 3.

(٨١) حول أول ظهور في مصدر عربي لـ «البيت المظلم» في القرن التاسع قادم من أعمال اليونانيين حول المرايا المحرقة، انظر: A. I. Sabra, «Ibn al-Haytham and the Visual Ray Hypothesis,» in: S. H. Nasr, ed., *The Ismaili Contributions to Islamic Culture* (Tehran: [n. pb.], 1977), p. 204, note (19).

كان الواقع، أن الضوء المار عبر فتحة يُسقط صورة عن مصدره، معروفاً ووُصف، على سبيل المثال، في *Problemata* الأرسطية المزعومة وفي وصف عن الأعمال الإسلامية *De Speculis* لإقليدس المزعوم. انظر: David C. Lindbreg, «The Theory of Pinhole Images from Antiquity to the Thirteenth Century,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 5 (1968), pp. 154-176, reprinted in: Lindberg, *Studies in the History of Medieval Optics*.

هنا يُستخدم مصطلح «ثقب الإبرة» بمعنى أكثر شمولاً عن فتحات باتساع وأشكال مختلفة معدّة لتشكيل الصور.

(٨٢) فيما يتعلق باللحظة التي توصل فيها ابن الهيثم إلى مفهوم الشعاع أو «أصغر عنصر من الضوء»، بالعلاقة مع الفتحات، انظر: Sabra, Ibid., pp. 191-192.

أ ـ الاستشهاد الأول: «. . . في موضع واحد عدة سرج في أمكنة متفرقة وكانت جميعها مقابلة لثقب واحد وكان ذلك الثقب ينفذ إلى مكان مظلم وكان مقابل ذلك الثقب في المكان المظلم جدار لو قوبل الثقب بجسم كثيف فإن أضواء تلك السرج تظهر على ذلك الجسم أو ذلك الجدار متفرقة وبعدد تلك السرج وكل واحد منهما مقابلاً لواحد من السرج على السمت المستقيم الذي يمر بالثقب. وإذا سُتر واحد من السرج، بطل من الأضواء التي في الموضع المظلم الضوء الذي كان يقابل ذلك السرج الذي ستر فقط وإن رُفع الساتر عن السراج عاد ذلك الضوء إلى مكانه»(٨٣).

سنلاحظ أن التجربة قد وضعت مباشرة من جديد، بشكل تعليمات تشير إلى كيفية تكرارها بسهولة. وفي هذا المثل الثاني، عندما يكون الشق بين البابين مغلقاً، تاركاً فقط ثقباً صغيراً جداً مقابل القناديل، يتنبأ ابن الهيثم أن بقعاً ضوئية منفصلة ستظهر مجدداً على الحائط بشكل مطابق لعدد القناديل، كما أن كل بقعة تتعلق بمدى اتساع «الثقب».

ب ـ الاستشهاد الثاني: «وإنْ ستر المعتبِر الفرجة التي انفرجت من الباب وبقي منها ثقباً صغيراً فقط وكان الثقب مقابلاً للسرج فإنه يجد على حائط البيت أضواء متفرقة أيضاً بعدد تلك السرج وكل واحد منها بحسب مقدار الثقب. . .»(٨٤).

إن إلحاحه على إثبات أن الإسقاط يتعلق باتساع الفتحة ذو مغزى كبير، على الرغم من أنه لا تظهر سوى بقع ضوئية وليس صورة واضحة ونقية (أي القنديل). ومع ذلك، فإن هذه التجربة لا تشكل مثالاً حقيقياً عن الحجرة المظلمة. إنها أيضاً شكل آخر للحجرة بالأشعة، مجهزة هذه المرة بشق متغير عوضاً عن الفتحة. وفي الواقع، فقد استخدمت الحجرة لإظهار أن الأشعة الضوئية المنفصلة تمر من خلال فتحة، بخطوط مستقيمة، دون أن تتداخل أو تمتزج حتى وإن تقاطعت، ودون أن تؤثر على الوسط الشفاف (الهواء) الذي تجتازه. وقد اهتم ابن الهيثم بتبيان أن المبدأ نفسه ينطبق على كل الأوساط الشفافة بما فيها الغلافات المختلفة للعين.

ج ـ الاستشهاد الثالث: «فالأضواء، إذن، ليس تمتزج في الهواء بل كل واحد منها يمتد على سموت مستقيمة ويتميز بالسموت التي يمتد عليها. . . ولا تمتزج صور الألوان

---

(٨٣) انظر: ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والسادسة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقتان ١١٥و ٩ ـ ١١٥ظ ٦.

(٨٤) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الورقتان ١١٥ظ ٧ ـ ١١٦و ٤.

ولا ينصبغ الهواء بها بل تكون كل صورة من صور الألوان المختلفة المتفرقة متميزة سموتها... وكذلك حال جميع الأجسام المشفة تمتد صور الأضواء والألوان فيها ولا تمتزج ولا تنصبغ الأجسام المشفة بها وكذلك طبقات البصر المشفة تنفذ فيها صور جميع الألوان والأضواء التي تقابل البصر في وقت واحد ولا تمتزج الصور فيها ولا تنصبغ هي بها فأما العضو الحاس الذي هو الرطوبة الجليدية فليس قبوله لصور الألوان والأضواء كقبول الهواء والأجسام المشفة غير الحساسة...»[(٨٥)].

ويتمثل ابتكاره في استخدام عدة قناديل، لا واحداً فحسب، وهي تشكل عدة مصادر منفصلة للضوء في الفضاء. وبفضلها استطاع بدقة تحديد تقابل وتعاكس الإسقاط بالنسبة إلى محور أفقي. وكان من المنطقي تكرار حساب هذا المحور الأفقي وتعميم هذا الحساب على كل المحاور الأخرى. لقد كان ابن الهيثم قادراً بدون أدنى شك، انطلاقاً من تجربة كهذه، على تكوين مفهوم واضح للمبادئ الأساسية حول الإسقاط من خلال ثقب الإبرة. فدراسته اللاحقة عن تعاكس الصورة في العين توحي أنه، في لحظة ما، قد أجرى تعميماً من هذا النوع[(٨٦)].

وقد قدم إسقاط المصادر الضوئية المتعددة، من خلال شق بفتحة متغيرة، حقلاً تجريبياً إلى ابن الهيثم بالحدود الدنيا، لكنه مع ذلك كان كافياً لتأسيس نظرية انطلاقاً من هذا الحقل. وتقول نظرية ابن الهيثم إن إسقاط الضوء المنعكس بواسطة سطح جسم والمنطلق لتكوين صورة على ستارة، يكون بالتقابل نقطة بنقطة. إن المقارنة الضمنية بين العين وحجرة الأشعة هي التي قادته إلى إجراء تركيب لعلم البصريات ولعلم التشريح.

٢ ـ العين كجهاز بصري

وكما درس ابن الهيثم، بطريقة منهجية، انتشار الضوء بمعزل عن تأثيره على العين، فإنه وصف تشريح العين بشكل تفصيلي قبل أن يصوغ فرضيته عن تشكل الصورة في الرؤية. ولم يظهر أهمية العين الوظيفية كنظام بصري إلا بعد أن وضح تنظيمها التركيبي. وهكذا عالج، وللمرة الأولى بشكل منفصل، ما يمكن تسميته تخصيصاً التشريح «الوصفي»

---

(٨٥) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الورقتان ١١٦ و ٤ ـ ١١٦ ظ ١٣.

(٨٦) في الرسالة «مقالة في صورة الكسوف،» التي كتبت بعد كتاب المناظر، يظهر ابن الهيثم دون غموض فهمه لمبادئ «الحجرة المظلمة» بثقب إبرة ولإسقاط صورة واضحة، آخذاً بعين الاعتبار قطر الفتحة والمسافة بين الستارة والجسم المسقط. كانت هذه الرسالة موضوع عدد كبير من الدراسات، انظر:
Sabra, Ibid., pp. 195-196, and Matthias Schramm, «Die Camera Obscura Effektes,» in: Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik*, pp. 202 - 274.

والتشريح «الوظيفي» للعين[٨٧]. وبما أن أعماله في وصف العين غالباً ما نقلت بشكل سيئ، لذلك لا بد من تقديم وصف مفصل عنها وقريب من النص العربي[٨٨].

أ ـ التشريح الوصفي

ابتدأ ابن الهيثم، وبعد اعتباره العين زائدة مباشرة للدماغ، بوصف الأعصاب البصرية كقناتين منفصلتين تأتيان من أغشية الدماغ. وتبرز هذه الأغشية من جوانب الجزء الأمامي للدماغ وتتلاقى لتشكل التصالب البصري (العصب المشترك أو المفصل الموجود على الخط المتوسط). وبعد افتراقها من جديد، تلتحق بمحجر كل عين، بحيث يدخل العصب البصري «المجوف» إلى هذا المحجر من خلال الثقب، ثم يتوسع ليصبح العين ذاتها. وتقع المقلة في التجويف العظمي المحجري. ويكون الحيز الواقع بين هذا التجويف والمقلة مملوءاً بطبقة دهنية مغذية[٨٩].

وقد درس ابن الهيثم كل جزء من العين، آخذاً بالارتقاء بطريقة منظمة صارمة. فقبل كل شيء، تفحص امتداد القناة الخارجية للعصب البصري الذي يشكل الصلبة بالإضافة إلى القرنية. وسجل ثانياً أن القناة الداخلية تشكل «العنبة» أو الغلاف «العنقودي»، التي تتضمن الجسم الهدبي والقزحية وغلاف المشيمة. وعلى الرغم من أن هذا الوصف مطابق بأمانة لتشريح جالينوس الأولي، إلا أنه توجد اختلافات مهمة تتعلق بالمقاربة[٩٠]. وعلى سبيل

---

(٨٧) التشريح الوصفي موجود في الفصل الخامس، والتشريح الوظيفي في الفصل السابع من: ابن الهيثم، **كتاب المناظر**.

(٨٨) يلفت مصطفى نظيف الانتباه إلى وصف ابن الهيثم التفصيلي للعين، في دراسته المهمة بمجلدين حول أبحاث ابن الهيثم البصرية. انظر: مصطفى نظيف، **الحسن بن الهيثم: بحوثه وكشوفه البصرية**، جامعة فؤاد الأول، كلية الهندسة؛ المؤلف رقم ٣، ٢ج (القاهرة: مطبعة نوري، ١٩٤٢ ـ ١٩٤٣)، ج ١، القسمان ٤٨ ـ ٤٩، ص ٢٠٥ ـ ٢١٧. إن تفسيره لتشريح العين عند ابن الهيثم، المصور على شكل رسم بياني (ص ٢١١)، والذي أخذ كمرجع، هو لسوء الحظ مغلوط.

(٨٩) للحصول على تفسير صحيح لتشريح ابن الهيثم الوصفي، من الضروري الأخذ بعين الاعتبار أنه يستخدم المصطلحات نفسها لتسمية عدة تراكيب مختلفة. مثلاً، إن مصطلح الملتحمة، بالإضافة إلى المعنى الخاص به، يشير كذلك إلى الدهن المحجري (الذي أُخذ، بشكل خاطئ، على أنه غلاف في التفسيرات الحديثة)، ويشير إلى الصلبة (التي يشير إليها أحياناً بمصطلح بياض الملتحمة). في كل حالة، إن الاستخدام أو الإسناد المعين للمصطلح يمكن تحديده انطلاقاً من وصفه، الذي هو دقيق وتفصيلي، ومن المضمون دون أي غموض.

(٩٠) ما نعلمه عن معرفة ابن الهيثم بنصوص جالينوس (وعن الموجزات المفقودة التي أنجزها حول النصوص)، يصلنا من العمل التأريخي الطبي لابن أبي أصيبعة (١٢٠٣ ـ ١٢٧٠). انظر: أبو العباس أحمد بن القاسم بن أبي أصيبعة، **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**، تحقيق ونشر أ. مولر (القاهرة؛ كونغسبرغ: [د. ن.]، ١٨٨٢ ـ ١٨٨٤)، ج ٢، ص ٩٠ ـ ٩٨. كان له مدخل إلى المخطوطة الأصلية من السيرة الذاتية =

المثال، فإن منطقة العين الواقعة خلف القزحية، والتي تطابق الحجرتين الخلفية والزجاجية للعين، تشكل ما يسميه ابن الهيثم بمجموعه «كرة العنبة»[٩١]. والسطح الأمامي من هذه الكرة الكمداء مغطى بالقزحية التي يشكل بؤبؤها المركز، والبؤبؤ هو الفتحة المدورة الواقعة بالضبط أمام قمع العصب البصري. كذلك فإن البؤبؤ والقزحية مغطيان بالقرنية، وهي غلاف قاس وشفاف يشكل امتداداً للصلبة[٩٢]. وقد تم وصف السطحين الداخلي والخارجي لهذه القرنية بعناية تامة، كما تم اعتبارهما متوازيين بسبب سماكتهما الثابتة. وأما الحيز الواقع أمام القزحية، وكذلك الحيز الواقع خلفها، فهما ممتلئان بسائل مائي شفاف يملك كثافة الزلال. وهذا السائل هو في تماس مع السطح الداخلي المقور للقرنية وكذلك في تماس في البؤبؤ مع الجانب الداخلي للجليدية. ويظهر هذا الشرح أن ابن الهيثم قد

= لابن الهيثم، وإلى لائحة بأعمال هذا الأخير، انظر: G. Nebbia, «Ibn al-Haytham nel millesimo anniversario della nascita,» *Physis*, vol. 9, no. 2 (1967), pp. 179-180,

حيث توجد لائحة بثلاثين عنواناً تحت باب «الطب». فيما يتعلق بالرابط بين السيرة الذاتية لابن الهيثم و *De libris propriis* وكذلك «De methodo medendi» (الموجودة بالعربية في ترجمة حنين بن إسحق)، انظر: Franz Rosenthal, «Die Arabische Autobiographie,» *Studia Arabia* (Analecta Orientalia; 14), Bd. 1 (1937), pp. 3-40; G. Strohmaier, «Galen in Arabic: Prospects and Projects,» in: V. Nutton, ed., *Galen: Problems and Prospects* (London: [n. pb.], 1981), pp. 187-196, and Matthias Schramm, «Zur Entwicklung der Physiologischen Optik der Arabischen Literatur,» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, Bd. 43 (1959), p. 292.

حول تقويم للمصادر ومراجع أكثر أهمية، انظر: Sabra, Ibid., pp. 189-190 and 209.

(٩١) انظر: ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والخامسة، مخطوطة فاتح (٣٢١٢)، الورقة ٧٣ ظ - ٥.

(٩٢) هنا أيضاً يستخدم المصطلح نفسه (العنبية) للإشارة إلى عدة تراكيب مختلفة: القزحية والغشاء العنبي (أي الجسم الهدبي ومشيمة العين التي اعتبرت كامتداد للقناة الداخلية للعصب البصري)، والحجرة العنبية التي هي في المصطلحات الحديثة اتحاد الحجرات الخلفية والزجاجية. هذا لا يتطابق مع الاستخدام الجالينوسي، الذي بموجبه لا تعني العنبة، أو الغلاف «بشكل عنقود»، سوى القزحية والجسم الهدبي وليس مجموع غلاف مشيمة العين. انظر: Galenus, *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium*, p. 475.

يستخدم ابن الهيثم مصطلح «القمع» ليصف انتشار العصب البصري. تجدر الإشارة إلى أن القمع العربي كان مخروطياً بشكل مدوّر، كما نرى ذلك في رسائل بنى موسى في الميكانيك (القرن العاشر): انظر: Ibn Shākir, *The Banū (Sons of) Mūsā Ibn Shākir: The Book of Ingenious Devices (Kitāb al-ḥiyal)*,

ونرى ذلك أيضاً عند الجزري (القرن الثاني عشر)، انظر: Abu al-Izz Ismail Ibn al-Razzaz al-Jazarī, *A Compendium on the Theory and Practice of the Mechanical Arts*, critical edition by Ahmad Y. al-Hasan (Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1979); english translation: *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices*, translated with notes by Donald Routledge Hill (Dordrecht; Boston: Reidel Publishing Company, 1974),

أدين بهذا التأكيد لدونالد هيل (Donald Hill).

تعرّف بشكل جيد للغاية على حجرات العين الأمامية والخلفية[٩٣].

ووراء البؤبؤ بالضبط تقع عدسة، وصفت كجسم بحجم صغير، كما نعتت كجسم «مشابه للجليد» بسبب طبيعتها الشفافة[٩٤]. أما سطحها الأمامي الشبيه بظاهر عدسة، فهو مسطح تبعاً لتقوس العنبة أي القزحية[٩٥]. ووراء الجليدية تقع الرطوبة الزجاجية أو «سائل شبيه بالزجاج». والعصب، الذي يمتد على شكل قمع والذي يحتوي على الرطوبة الزجاجية، موصول بالجسم الهدبي وبالجليدية وذلك على مستوى محيطه الاستوائي. ويعتبر ابن الهيثم أيضاً الجليدية والرطوبة الزجاجية كجسم واحد مؤلف من جزءين متمتعين بشفافية مختلفة. وترتكز حجته هذه على الشكل الكروي المركب للجسمين[٩٦].

يضاف إلى ذلك أن الأجزاء السائلة كمثل الرطوبة المائية والجليدية والرطوبة الزجاجية، هي محصورة بأغشية العين المختلفة التي تحدد وتحافظ على الأشكال الكروية لهذه الأجزاء. وعلى سبيل المثال، فإن السائل المائي ليس محصوراً في القرنية والعنبة (الجسم الهدبي والقزحية) فحسب، بل كذلك إلى الوراء في غلاف دقيق للغاية يسمى «العنكبوتية». وهذه الأخيرة تغطي بدورها الجليدية والسائل الزجاجي. أما المقلة فهي مثبتة في المحجر بواسطة الصلبة[٩٧].

وفي الوقت نفسه، فإن بعض العناصر من التشريح الجالينوسي تبدو موجودة، كالعصب البصري «الأجوف»، والثقب البصري الواقع مقابل البؤبؤ بدل أن يكون منحرفاً

---

(٩٣) إن وصف ابن الهيثم لحجرات العين الأمامية والخلفية لم يؤخذ به أيضاً. لا يُظهر رسم نظيف البياني حجرة أمامية بين القرنية والقزحية. انظر النسخة عن هذا الرسم، في: Sabra «Ibn al-Haytham and the Visual Ray Hypothesis,» p. 192.

(٩٤) يستخدم مصطلح «العدسة» هنا ببساطة للإشارة إلى البنية، دون تماثل مع المفهوم الحديث لآلة التركيز البؤري، التي لا تملك أية علاقة مع استخدام ابن الهيثم.

(٩٥) انظر: ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والخامسة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقتان ٧٣ظ ـ ٧٤و.

(٩٦) المصدر نفسه، المقالة الأولى: المقالة الخامسة، الورقة ٧٤و-ظ، والمقالة السابعة، الورقة ١٣٠و ١٠ ـ ١٣.

(٩٧) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسابعة، الورقتان ١٣٠ظ ١١ ـ ١٣١ظ ١ ـ ٥. اعتبرت «العنكبوتية» في أعمال حنين بن إسحق، ولاحقاً في أعمال وصف التشريح العيني كأعمال علي بن عيسى، كغلاف دقيق يغطي الجزء الأمامي من الرطوبة الجليدية. لكن ابن الهيثم يستخدم المصطلح بشكل مختلف. تحافظ العنكبوتية على الشكل الكروي المركب من الجليدية والرطوبة الزجاجية وتشكل الغلاف الداخلي الأخير في مؤخر العين. على أساس دراسته للغلافات التي تحافظ على الشكل الكروي للأجزاء السائلة من العين، يمكن اعتبار أن العنكبوتية هي امتداد للشبكية. مع ذلك لا توجد عند ابن الهيثم أية إشارة إلى الشبكية أو إلى المشيمية. وبما أن الشبكية تشكل جزءاً متمماً في وصف تشريح العين لجالينوس، يمكن فقط الاستنتاج بأن ابن الهيثم لم يسقطها سهواً، بل أبعدها عمداً، مثل أي شيء آخر يبدو له دون علاقة مع التشريح الوظيفي. كذلك لا توجد أية إشارة إلى عدد الغلافات أو السوائل الموجودة داخل العين، ولا إلى «غذاء» الجليدية، خلافاً للوصف التقليدي.

قليلاً نحو الأنف بالنسبة إلى البؤبؤ، والجليدية المتصلة مباشرة مع السائل الزجاجي، وأخيراً وجود غلاف «عنكبوتي»(٩٨). ويقدم لنا ابن الهيثم، بالإضافة إلى بعض الاختلافات النوعية، عرضاً خالياً من التنميق، متجنباً اتباع نموذج الشرح الغائي حول تركيب النظرية النوعية للرطوبات وأمزجتها. فقد كان هذا الشرح ملازماً للتشريح التقليدي(٩٩). إن ابن الهيثم يتميز بتركيز فكره بقوة على شكل ووضع وحالة أجزاء العين، وإصراره بحزم على أن هذه الأجزاء ثابتة وأن العلاقات المتبادلة بينها مستقرة(١٠٠).

ثم بعد أن شرح كيفية تركيب العين، قدم مساهمته الأكثر أصالة، وهي دراسة مفصلة عن الأهمية الوظيفية لهذا التشريح بصفته نظاماً بصرياً. ونجد الدليل على هذه المساهمة في وصفه للجليدية ولمحور العين.

ب ـ التشريح الوظيفي

وبخلاف شروحاته السابقة عن الجليدية التي اعتبرها ببساطة «مسطحة» أو «بشكل عدسة»، قدم ابن الهيثم وصفاً دقيقاً للشكل «ثنائي التحدب» لهذا الغشاء، وذلك بالاستناد إلى اختلاف الطول الشعاعي لسطحيه الأمامي والخلفي(١٠١). وقد عبر بوضوح أن السطح

---

(٩٨) للمقارنة، انظر: Galenus, *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium,* X, pp. 643-503,

وحول وصف الأعصاب بالعلاقة مع الدماغ، انظر: Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon),* VII, pp. 3-8,

وحول «العين» انظر بشكل خاص: Galenus, *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon),* VII, 5.22-30.

(٩٩) يظهر هذا الاختلاف واضحاً انطلاقاً من تعريف الجليدية كـ«شبيهة بالجليد». عند ابن الهيثم، يعود ذلك إلى طبيعة شفافيتها، بحيث إن جزءاً منها كثيف (غليظ)، وإن جزءاً آخر صافٍ (شفيف)؛ بينما يتم الإرجاع عند علي بن عيسى إلى طبيعتها «الباردة» و«الجافة». انظر: J. Hirschberg and J. Lippert, *'Alī b.'Isā* (Leipzig: [n. pb.], 1904), pp. 8-10, and Casey Albert Wood, *Memorandum Book of a Tenth Century Oculist for the Use of Modern Ophthalmologists,* a translation of the Tadhkirat of Ali Ibn Isa of Baghdad (Evanston, Ill.: Northwestern University Press, 1936), book 1, chap. 20.

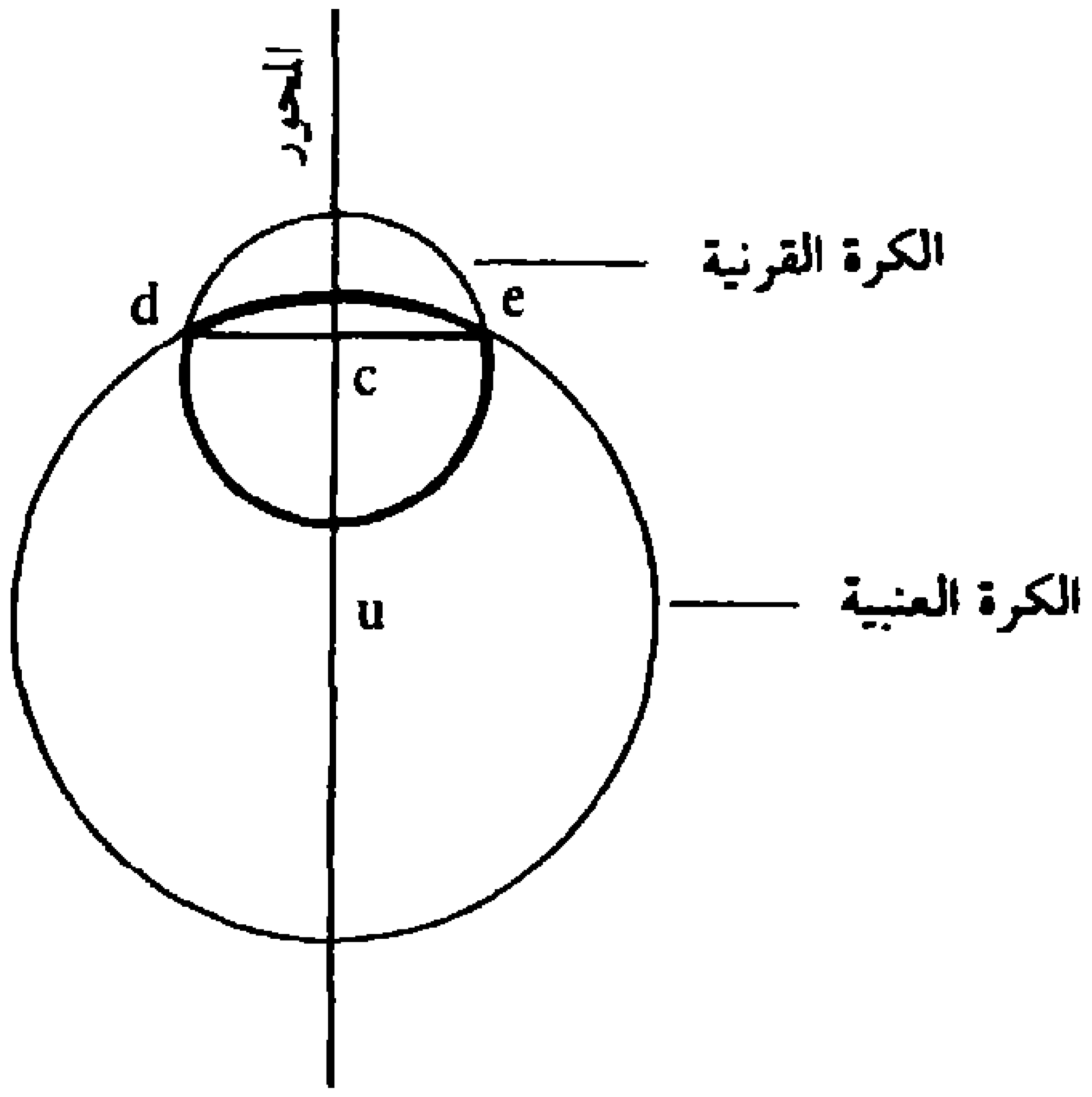
العمل الأول هو وصف موضوعي للميزات التي يمكن ملاحظتها، في حين أن العمل الثاني هو دراسة نوعية مستندة إلى مذهب نظري يكشفه عنوان الفصل، «عن طبيعة العين وأمزجتها». عن هذه المقاربة بالذات يبتعد ابن الهيثم بوضوح.

(١٠٠) لا نملك أي أثر يسمح بمعرفة ما إذا كانت العلاقات الحيّزية بين تراكيب العين، قد درست قبل ابن الهيثم. وكما لاحظ شرام بدقة، فإن ما ينقص وصف جالينوس، بالرغم من المعنى الكبير فيما يخص التفصيل، هو إشارات دقيقة إلى العلاقات الحيّزية بين هذه التراكيب. انظر:

Schramm, «Zur Entwicklung der Physiologischen Optik der Arabischen Literatur,» p. 290.

(١٠١) في الوصف التقليدي، يشار إلى شكلها الكروي «المسطح» بالعلاقة مع «واقع أنها أقل تعرضاً للجرح، وأنها تملك سطحاً أكبر للتماس مع انطباعات الأجسام، والتي تواكبها البنوما». انظر: =

الأمامي للجليدية يشكل جزءاً من سطح كروي أكثر امتداداً من السطح الكروي للجزء الباقي (أي السطح الخلفي للجليدية): «وفي مقدم هذه الكرة تسطيح يسير يشبه تسطيح ظاهر العدسة، فسطح مقدمها قطعة من سطح كري أعظم من السطح الكري المحيط ببغيتها وهذا السطح مقابل للثقب الذي في مقدم العينية ووضعه منه وضع مشابه وهذه الرطوبة تنقسم بجزءين مختلفي الشفيف أحدهما يلي مقدمها والجزء الآخر يلي مؤخرها»[١٠٢]. واعتبر أن سطحي الجليدية ينتميان إلى كرتين مختلفتين، إحداهما أكبر من الأخرى (الشكل رقم (٢٠ ـ ١)). وهذا يعني أن التقوس الأمامي للجليدية إذا امتد، فإنه سيحيط آنذاك بمؤخر العين وسيمثل محيط الكرة الكبرى، متضمناً بذلك الجليدية والرطوبة الزجاجية. تحتوي الكرة الكبرى، إذن، على الجليدية والرطوبة الزجاجية. إن تحليلاً كهذا يأتي مترابطاً تماماً مع وصفه السابق الذي يطرح مسلمة مفادها أن الجليدية والرطوبة الزجاجية، عندما يتم جمعهما في جسم واحد، فإنهما يملكان شكلاً كروياً. كما أنه أيضاً موافق لتصوره عن وحدانية «الكرة العنبية»، التي تمثل في العين كل المنطقة الواقعة وراء القزحية، وتتضمن هناك أيضاً الجليدية والرطوبة الزجاجية[١٠٣].



الشكل رقم (٢٠ ـ ١)

يمثل عين ابن الهيثم التي تشتمل على: تقاطع كرتين بحجمين مختلفين، واحدة صغيرة وأخرى كبيرة، حيث تشكل منطقة التقاطع الجليدية. يشكل العمود على وتر التقاطع المحور البصري. تعني (c) المركز القرني و(u) المركز العنبي.

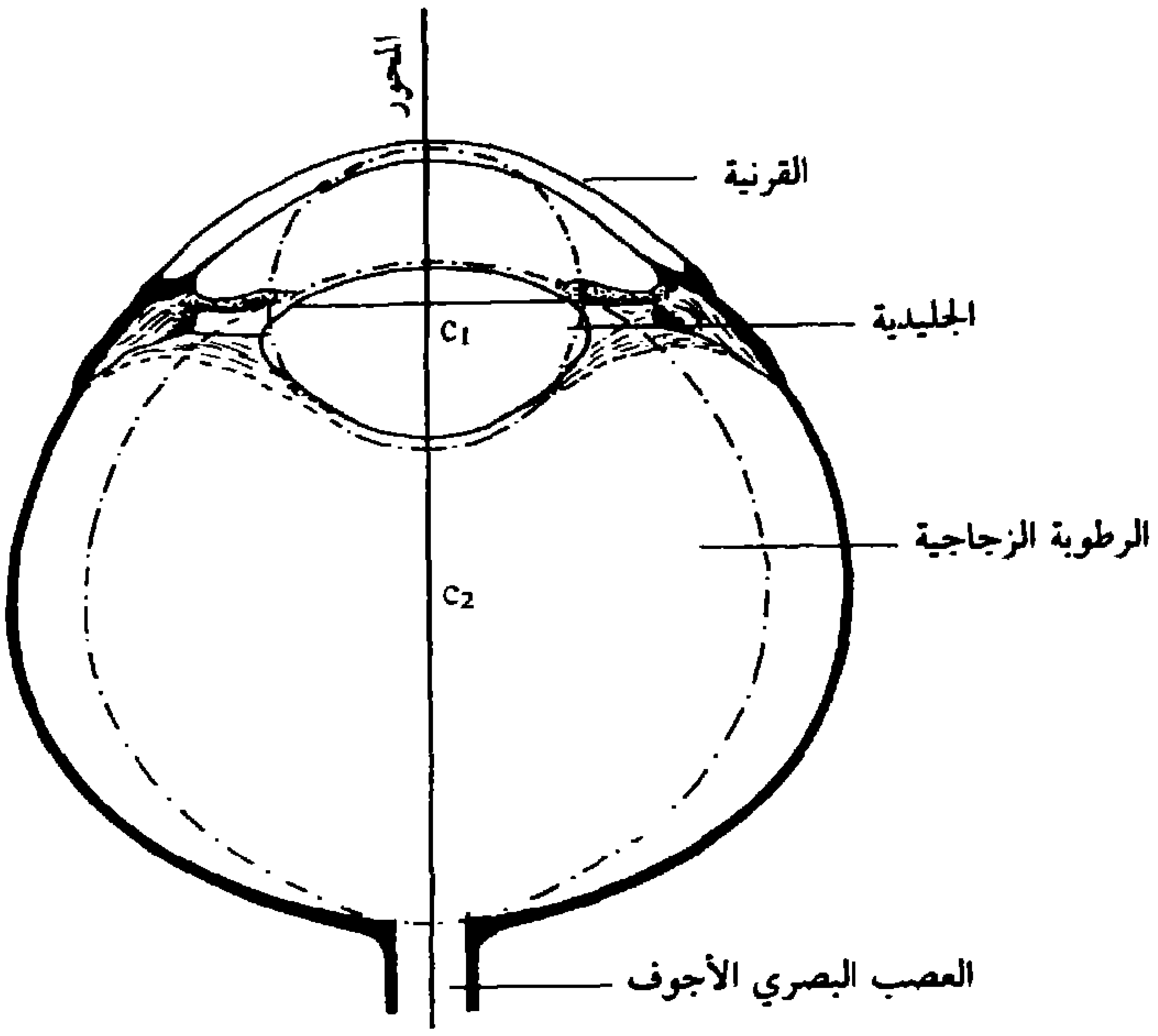
Galenus, *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium,* X, 6, 15, and Hunayn = Ibn Ishāq, *Kitāb al-'ashar maqālāt fī al-'ayn al-mansūb li-Hunayn Ibn Ishāq: The Book of the Ten Treatises on the Eye, Ascribed to Hunain Ibn Ishāq (809-877 A.D.)*, pp. 3-4.

حول دراسة للجليدية بمصطلحات هندسية، قام بها جالينوس، انظر: Schramm, Ibid., p. 199, note (1) and p. 200, note (1), and Max Simon, *Sieben Bücher Anatomie des Galen* (Leipzig: [n. pb.], 1906), book 2, pp. 35-36.

(١٠٢) ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والخامسة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقة ٧٤ر ٤ ـ ٧.

(١٠٣) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الورقتان ٧٤ر ١٠ ـ ١٣ و٧٥ظ ٦ ـ ١٠، والمقالة السابعة، الورقة ١٣٠ر.

وبالمقابل، فإن التقوس الشعاعي للسطح الخلفي للجليدية، وهو الأقصر، يشكل امتداداً للسطح الأمامي للقرنية. وبذلك تكون الكرة الصغرى مؤلفة من الجليدية والقرنية. وقد دافع ابن الهيثم كذلك عن هذا الموضوع في وصفه للسطح الداخلي المقعر للقرنية في تقاطعها مع العنبة، التي هي محدبة (هنا اعتبرت القزحية كسطح كروي)، والتي تشكل عندئذٍ امتداداً للسطح الخلفي للجليدية(١٠٤). وتتقاطع هاتان الكرتان المؤلفتان على هذا الشكل عند ملتقى الجسم الهدبي والجليدية. كما أن موقعهما النسبي هو أيضاً مبيّن باختلاف شعاعيهما، أما مركز الكرة الكبرى فهو أكثر عمقاً في المقلة من مركز الكرة الصغرى(١٠٥). إن هذا التحليل يتطابق تماماً مع تشريح ابن الهيثم الوصفي (الشكل رقم (٢٠ ـ ٢)).



الشكل رقم (٢٠ ـ ٢)

منظر بياني للعين بمقطع طولي. إن الرسم المنقط الذي يصور عين ابن الهيثم المؤلفة من كرتين، قد رُكب على الرسم الطبيعي وذلك لتوضيح ملاءمة وضعه التشريحي. غير أن العصب البصري يقع مباشرة مقابل البؤبؤ خلافاً لوضعه الصحيح، حيث هو منحرف نحو الأنف.

(١٠٤) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الورقتان ٧٦و ٨ ـ ١٣ و٧٦ظ ٨ ـ ١٠.

(١٠٥) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الورقتان ٧٥ظ ـ ٧٦و. يلفت ابن الهيثم الانتباه إلى أن السطح الخارجي للقرنية يشكل جزءاً من المقلة، كامتداد للصلبة وليس بسبب مركز نصف قطري مشترك.

يصف ابن الهيثم، إذن، التقاطع مختلف المركز لكرتين مختلفتين، إحداهما صغيرة، والأخرى كبيرة، ومنطقة التقاطع بينهما هي الجليدية. لذلك لم يعد الأمر يتعلق بعين متحدة المركز «مورّقة كبصلة». فقد تم وصف سطحَي الجليدية كأسطح كروية تتقاطع(١٠٦). وفي هذا التحليل، يكون موقع الجليدية محصوراً، دون التباس، أمام القرنية (الشكل رقم (٢٠ ـ ٢)). ويصبح مركز العين بطبيعة الحال مركز الكرة العنبية الكبرى، الواقعة وراء الجليدية في الرطوبة الزجاجية.

سمح كذلك هذا التركيب لابن الهيثم بأن يرسم محوراً للعين، بواسطة جمع المركزين المنفصلين للكرتين بواسطة خط مستقيم متعامد مع وتر تقاطع الكرتين ومقسِّم هذا الوتر إلى جزءين بزاوية قائمة (الشكل رقم (٢٠ ـ ١)). ويعدد ابن الهيثم بعناية الميزات المحدِّدة لهذا المحور. إنه يمر في مركز المقلة، وإذا مددنا طرفيه، فإنه يمر في آن معاً عبر مركز البؤبؤ وعبر مركز قمع العصب البصري(١٠٧). ويتحدد تعريفه الوظيفي من جديد بوصفه التشريحي، الذي بمقتضاه يقع العصب البصري مباشرة أمام البؤبؤ، بدل أن يكون منحرفاً قليلاً نحو الأنف. وبناءً عليه، فإن هذا الوصف يضع بشكل خاطئ على خط واحد مركز التقوس الخلفي مع مركز العصب البصري، وقد وقع ابن الهيثم، الذي حاول للمرة الأولى أن يحدد محوراً للعين بمصطلحات هندسية، تحت تأثير الفرضيات التشريحية الوافدة من التقليد الجالينوسي.

إن تحديد هذا المحور هو أساسي من أجل مقاربته الكمية لتشكل الصور على قاعدة النقاط المقابلة. فهو محور بصري، تقع عليه مراكز جميع أوساط العين الكاسرة للضوء (الوسط المائي، الرطوبة الزجاجية، الجليدية، القرنية). وبفضله، يمكن الحفاظ على تقابل الموقع الطوبولوجي لكل نقطة بين الجسم والصورة، عند الحركات الجامعة للعين (حيث يتلاقى محورا العينين على نقطة من سطح الجسم)، وعند الحركات المترافقة (حيث ينتقل محورا العينين سوية) أثناء انتقال النظر من جسم إلى آخر(١٠٨).

عندما يتعمق ابن الهيثم في تحديده لهذا المحور، فإنه غالباً ما يغير مصطلحات الإسناد، منتقلاً من الكرات إلى الأسطح، متفحصاً العين في مقطع طولي كما في مقطع جبهي (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣)). وهذا التمييز هام للغاية، ففي كل حالة ترتكز سلسلة العلاقات الموصوفة على مستويات تشريحية مختلفة. وعندما يتفحص العين في مقطع طولي، فإن مراكز أجزاء العين تكون متراصفة على امتداد المحور الطولي (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣أ)).

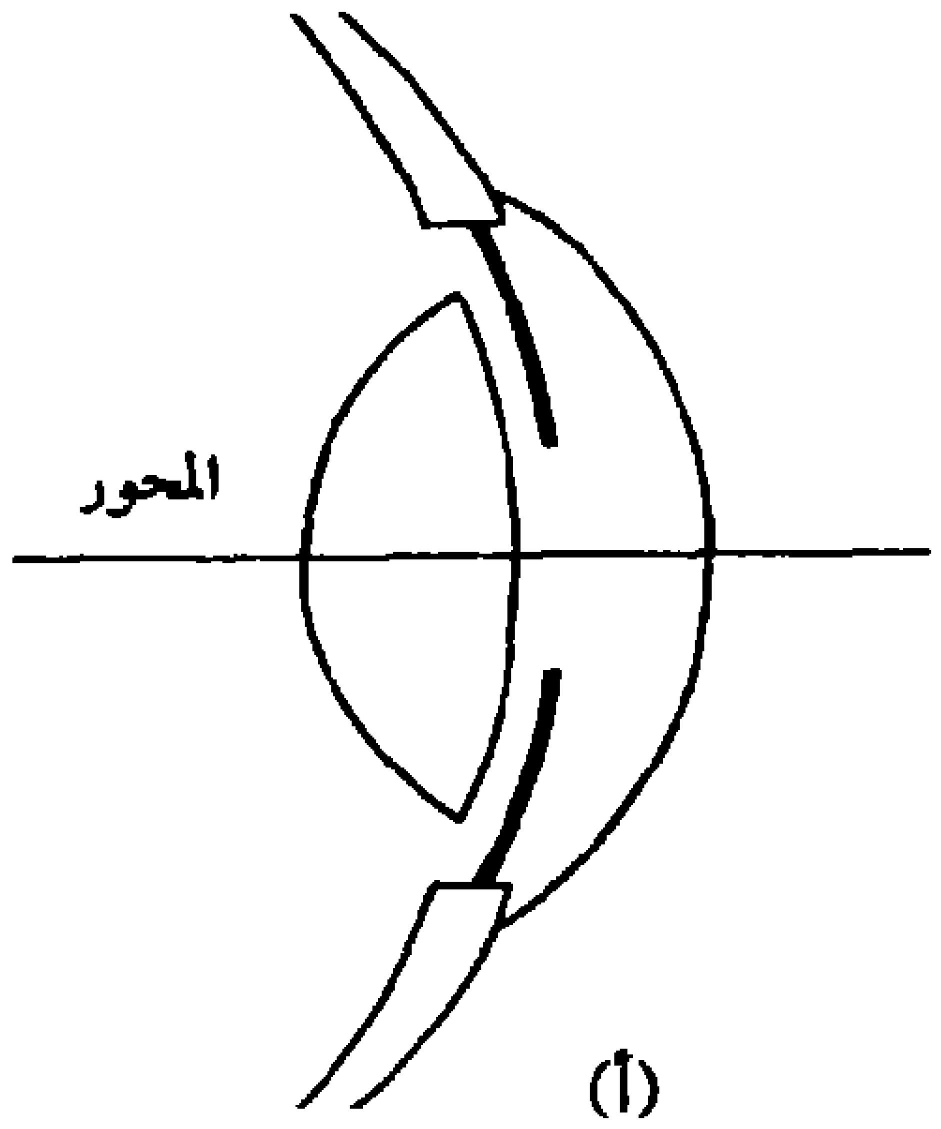
---

(١٠٦) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الورقتان ٧٦ظ ٨ ـ ١٠ و٧٨ظ ٨ ـ ١٣.

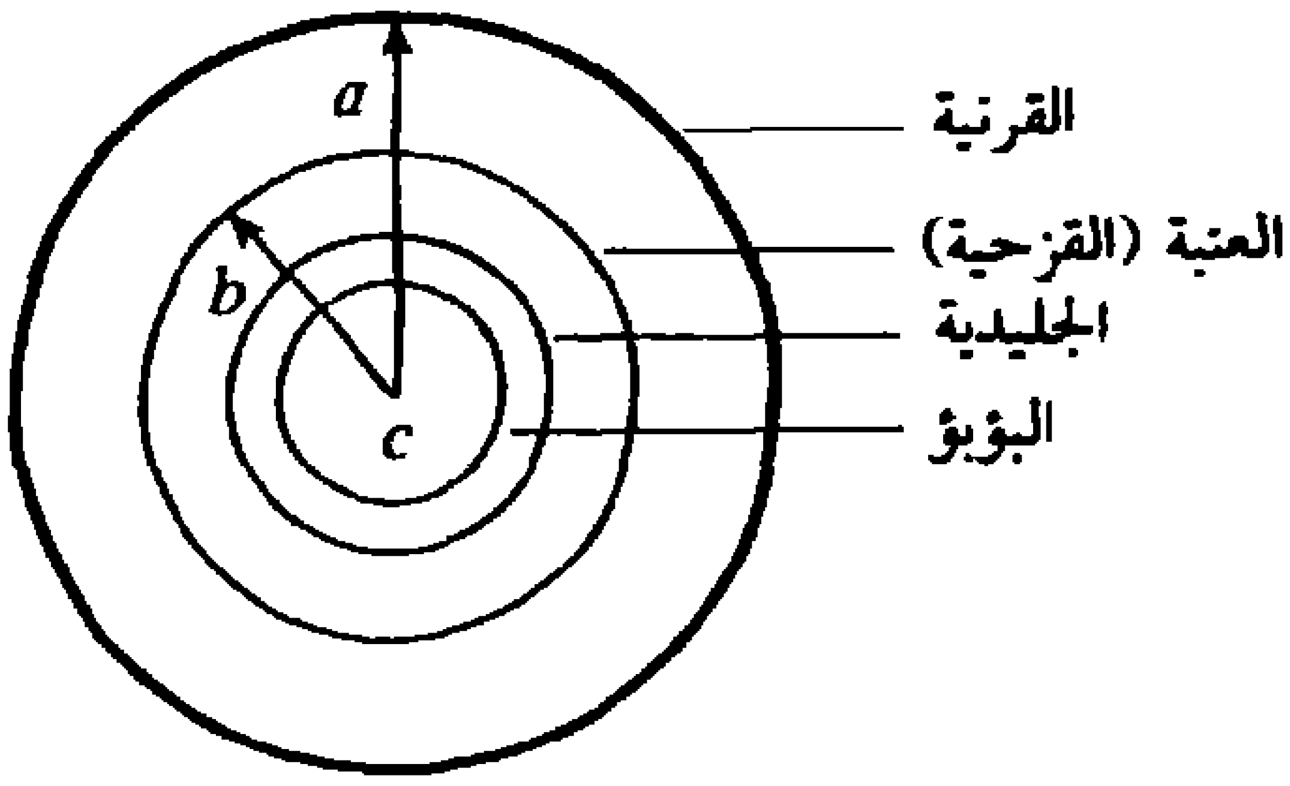
(١٠٧) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الأوراق ٧٦ظ ٥ ـ ٧٨ظ.

(١٠٨) يظهر ابن الهيثم، بالاستناد إلى حركات العين المتقاربة، ضعف حجة بطلميوس، الذي يرتكز إلى الشعاع المركزي أو المحوري لمخروط الرؤية. فيما يتعلق بالمقطع المذكور، المأخوذ من مؤلف لابن الهيثم **الشكوك على بطليموس**، انظر: Sabra, «Ibn al-Haytham's Criticisms of Ptolemy's Optics,» pp. 145-149 and especially pp. 147-148.

وعندما يقارن المواقع النسبية للقرنية وللقزحية وللبؤبؤ وللجليدية بالنسبة إلى هذا المحور ويؤكد على امتلاكها للمركز نفسه، فإنه يتفحص العين آنذاك تبعاً لمستوٍ جبهي في ذلك الموضع، حيث تبدو المراكز (على الرغم من كونها تقع واحداً وراء الآخر على طول المحور) في نقطة واحدة (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣ ب)). وعلى سبيل المثال، فمع أن شعاع القرنية أطول من شعاع القزحية، فإن مركزهما يبقى هو نفسه. وهذا يعني أنهما تملكان شعاعين مختلفين، يأتيان ظاهراً من المركز نفسه الواقع على المحور الطولي للعين (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣أ))[١٠٩].



(أ)



(ب)

الشكل رقم (٢٠ ـ ٣)
منظران بيانيان للعين تبعاً لمستويين تشريحيين مختلفين.
منظر طولي (أ)، حيث المراكز فيه تتراصف على المحور، ومنظر جبهي (ب)، حيث تقع فيه كل المراكز في نقطة واحدة. (a) و(b) يعنيان الخطين الشعاعين.

(١٠٩) انظر: ابن الهيثم، المصدر نفسه، المقالتان الأولى والخامسة، الأوراق ٧٦ظ ـ ١٠ و٧٨ظ (خصوصاً ٨ ـ ١٤) ـ ٨٠ظ.

وقد أدى واقع عدم تمييز تغير المنظور في هذه الأسطح المستوية التشريحية المنفصلة إلى تفسير سيىء لإصرار ابن الهيثم على هذا المركز المشترك. إن خلط السطحين المستويين الطولي والجبهي على المستوى نفسه (أي المحور المار بنقطة واحدة والمراكز الواقعة في نقطة واحدة) هو الذي أنتج التصور المغلوط في القرون الوسطى عن «العين البصلة» متحدة المركز والتي نسب مصدرها إلى ابن الهيثم[١١٠].

وقد تميزت دراسته لتشريح العين بوصف موضوعي لأجزائها، تبعاً لتدرج منطقي منظم بدقة، كما تميزت، حسب علمنا، بأول تحليل مفصل في علم البصريات الفيزيولوجي، لعلاقات أجزاء العين في الفضاء بمصطلحات وظيفية. إن أصالة طريقته التشريحية تدشن ابتعاداً حاسماً عن المقاربة التقليدية. فهو لم يجعلها مثالية لكي تكون ملائمة لوصف بمصطلحات هندسية، كما أنه لم يُعدَّها لكي تلبي حاجات موقف نظري، مثلما كان الافتراض سابقاً[١١١]. إن التحليل الوظيفي الذي قدمه يرتكز كلياً على تشريحه الوصفي، الذي كان أكثر دقة من التشريح الوارد في النصوص الطبية (الشكل رقم (٢٠ ـ ٢)). وقد استطاع، وهو يتفحص بانتباه النسب في التركيب، أن يلاحظ بوضوح أن الجليدية هي ثنائية التحدب وأن يحدد بشكل صحيح موقعها المتقدم. كما استطاع أيضاً، وهو يصوغ وصفه بطريقة كمية أي بمصطلحات نسبية، أن يحدد محوراً بصرياً في العين. وهذا ما يظهر إلى أي مدى كانت البديهية المركزية لبصرياته الفيزيولوجية راسخة في تدقيقاته التشريحية.

٣ ـ الصورة المسقطة والعين

يمكن تفسير فرضيات ابن الهيثم عن الرؤية والعين كسلسلة محاولات هادفة إلى التوفيق بين مفهومه لإسقاط الصورة والتركيب التشريحي للعين. إن مثل هذا النموذج وضعه أمام صعوبات مهمة تصورية وتقنية، عندما طبقه على العين المزودة بفتحة كبيرة، أي البؤبؤ، وبأسطح كاسرة شفافة. كما وجد نفسه، بالإضافة إلى ذلك، في صراع مع صورتين، واحدة لكل عين، في حين أن إدراكنا للعالم هو موحد.

أ ـ المسألة الأولى: اتساع الفتحة ـ البؤبؤ

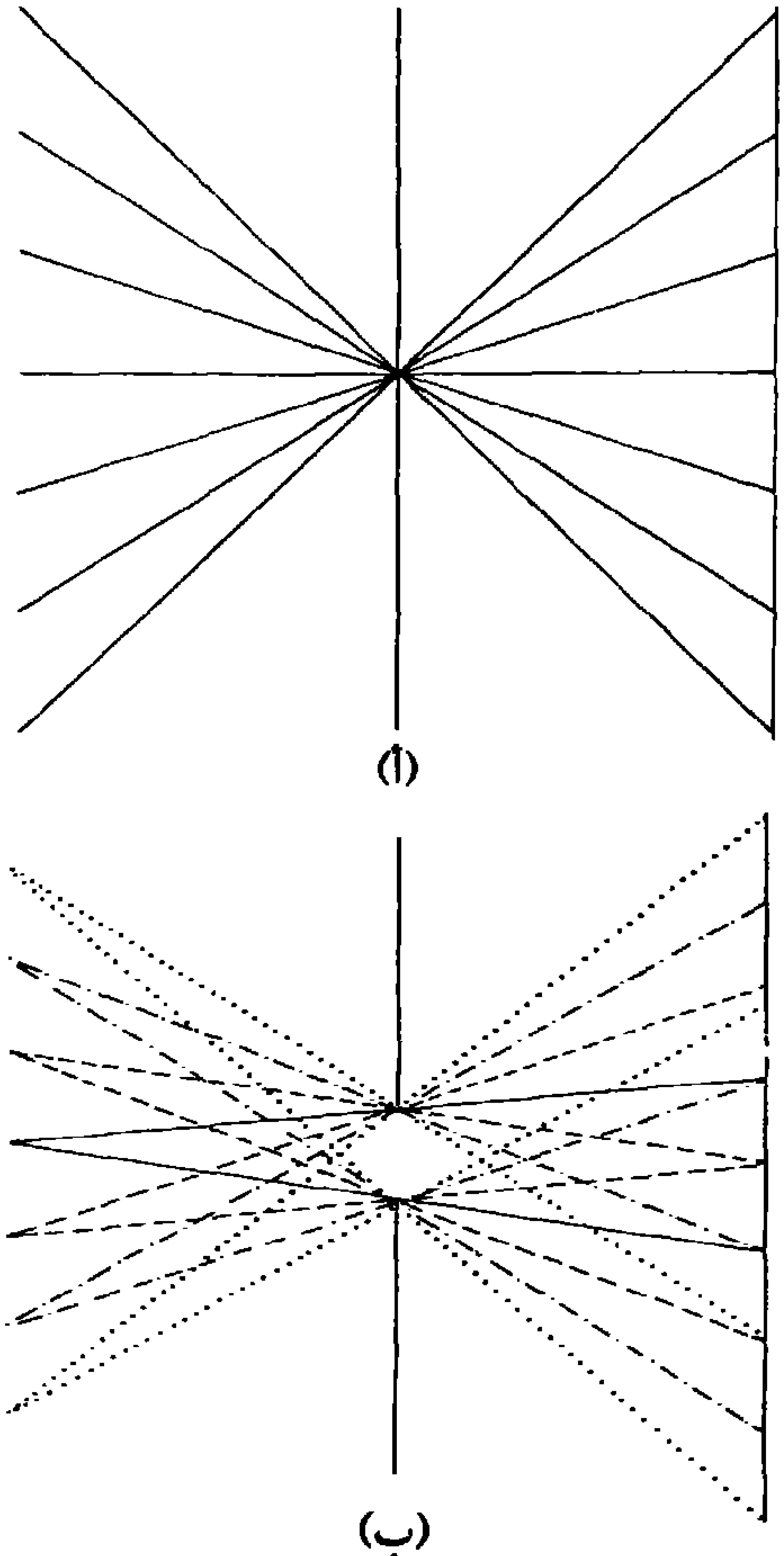
تحصن ابن الهيثم بتجاربه على الفتحات المتغيرة، لذلك كان يعرف تماماً أن الإسقاط بواسطة مصدر ضوئي في حجرة سوداء يتعلق باتساع الفتحة، وأنه لا يمكن الحصول على

---

(١١٠) نجد مثالاً على ذلك بشكل رسم بياني في النشرة المطبوعة للترجمة اللاتينية لـ كتاب المناظر، انظر: Abū ʻAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham, *Opticæ Thesaurus. Alhazeni Arabis Libri Septem... Item Vitellonis Thuringopoloni Libri X*, edited by Federico Risnero (Basel: Per Episcopios, 1572), reprinted (New York: Johnson Reprint Corporation, 1972).

(١١١) Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, p. 69.

صورة جلية إلا بواسطة فتحة يكون اتساعها في حده الأدنى[(١١٢)]. فتضييق الفتحة إلى الحد الأدنى يعمل كجهاز استبعاد يصفي الأشعة الضوئية العديدة الآتية من كل نقطة في سطح الجسم، ولا يدع سوى شعاع واحد يمر، وبذلك يسمح بإقامة تطابق نقطة بنقطة (الشكل رقم (٢٠ ـ ٤أ)). وعلى العكس من ذلك، فعندما تملك كل نقطة من الجسم تصويراً متعدداً (أي في حالة الفتحة المكبّرة)، فإن رسوم الأشعة تمتزج في بقعة غير جلية وتضيع الصورة (الشكل رقم (٢٠ ـ ٤ب)).



(أ)

(ب)

الشكل رقم (٢٠ ـ ٤)

إسقاط الضوء من خلال ثقب الإبرة (أ) ومن خلال فتحة (ب).

في (أ) تتمثل كل نقطة ـ جسم بشعاع واحد؛ بينما في (ب) تملك كل نقطة تصويراً متعدداً.

---

(١١٢) ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والسادسة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقتان ١١٥ظ ٧ ـ ١٦و ٤.

تلك هي المسألة التي كانت تطرح نفسها فيما يتعلق بالعين: إن فتحتها، أي البؤبؤ هو كبير جداً، لذلك فهو لا يستطيع أن يصفي الأشعة المتعددة التي تصل إليه في آن معاً من كل نقطة من سطح جسم مرئي. فكيف يمكن عندئذ الحفاظ على التطابق نقطة بنقطة بين الجسم والعين[113]؟ ومع أن ابن الهيثم وصف الرطوبة الجليدية كجسم كاسر ثنائي التحدب، إلا أنه لم يرَ فيها عدسة قادرة على إتمام وظيفة التركيز البؤري في العين. وبالتالي، فإن الحل الذي اقترحه كان مستلهماً من بدايات الميكانيك بدلاً من بصريات الانكسار. وقد استنتج، بالاستناد إلى ملاحظات تجريبية، أن الصدم الذي تحدثه الإسقاطات العمودية على الأسطح هو وحده قوي، بشكل كافٍ، لكي يسمح لها بالدخول، في حين إن الإسقاطات المائلة تنحرف. ولكي يشرح مثلاً ظواهر الانكسار عند انتقال الضوء من وسط خفيف إلى وسط أكثر كثافة، استخدم تشابهاً مأخوذاً من الميكانيك: تُقذف كرة معدنية على صفيحة أردواز دقيقة موضوعة على ثقب عريض تم إحداثه في صفيحة معدنية. فإذا قذفت الكرة عمودياً، فإنها تحطم الأردواز وتمر إلى الجانب الآخر. أما إذا قذفت مائلة، بقوة مماثلة ومن مسافة مساوية، فإنها لا تستطيع تحطيم الأردواز. وكان ابن الهيثم يعرف أيضاً بفضل ملاحظاته، أن ضوءاً حاداً مباشراً يجرح العين. وقد ربط بين الأضواء «القوية» والأشعة العمودية وبين الأضواء «الضعيفة» والأشعة المائلة، مطبقاً بذلك تشابهاً مأخوذاً من الميكانيك على دراسة تأثير الأشعة الضوئية على العين. وكان الجواب البدهي على مسألة وفرة الأشعة بالنسبة إلى العين هو في اختيار الشعاع العمودي، طالما أنه لا يمكن أن يكون هناك سوى شعاع واحد من هذا النوع قادر على دخول العين انطلاقاً من كل نقطة من سطح الجسم[114].

(أ) الأشعة العمودية: مبدأ المصفاة

استبعد ابن الهيثم، بتركيزه فقط على الأشعة العمودية على سطح العين، كل الأشعة المائلة أو العرضية. وهكذا، انطلاقاً من كل نقطة من جسم ما، يدخل شعاع واحد مباشر أغشية العين، وتحتفظ مجموعة من هذه الأشعة «الفردية» بالترتيب الذي كانت تملكه نقاطها المصدرية على سطح الجسم. وبهذه الطريقة يكون هناك تطابق نقطة بنقطة بين الجسم المرئي والصورة في العين. وما يقترحه ابن الهيثم هو، في الواقع، طريقة بديلة تكمن في تصفية الأشعة المتعددة القادمة من كل نقطة من الجسم، للحصول في النهاية على واحد فقط منها

---

(١١٣) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والثالثة، الورقة ٩٧ظ، والمقالة الثانية (II, ii)، الورقة ٧ظ.

(١١٤) حول مقالة استخدام ابن الهيثم لنظرية ميكانيكية للانكسار، انظر: Sabra, «Explanation of Optical Reflection and Refraction: Ibn al-Haytham, Descartes, Newton,» and Rashed, «Lumière et vision: L'Application des mathématiques dans l'optique d'Ibn al-Haytham,» pp. 28-32 et 44.

(على النقيض من ظاهرة ثقب الإبرة أو من التركيز البؤري بواسطة الجليدية).

وقد قدم ابن الهيثم العناصر الأساسية إلى هذه الفرضية في تحليله الوظيفي لتشريح العين. إن وصفه لها بكرتين، حيث تمثل الجليدية تقاطعهما، يحدد القرنية كقسم من الكرة الصغرى والسطح الأمامي للجليدية كقسم من الكرة الكبرى. إن خطاً طولياً ماراً عبر المركزين الكرويين للكرة الصغرى أي القرنية وللكرة العنبية، يسمح له بإعطاء تحديد دقيق لمحور تتراصف عليه جميع الأسطح الشفافة الكاسرة، ويكون متعامداً مع جميع أسطح العين. وبواسطة هذا المحور يمكن تحديد وإبقاء التطابق بين الموقع الطوبولوجي لكل نقطة من سطح الجسم والموقع الطوبولوجي لكل نقطة من العين.

ويقدم ابن الهيثم إثباتاً مدعماً بحجج صارمة بحيث إن مراحله الأساسية متميزة بوضوح. قبل كل شيء يعتبر أن النظر هو في استقبال ما يتلقاه من شكل (أي من ضوء ولون) الأشياء المرئية، . . . وفقط في استقبال الأشكال التي تصله وفق خطوط معينة. . . كما يعتبر أن شكل أي نقطة من الشيء المرئي يصل إلى العين الموجودة أمامه وفق عدة خطوط مستقيمة مختلفة وأن العين لا يمكنها إدراك دقائق شكل الشيء بترتيبها الموجود على سطح هذا الشيء ما لم تتلقَّ العين الأشكال بالخطوط المستقيمة العمودية على سطح العين وعلى العضو الحساس (أي الجليدية). وأخيراً يبين أن الخطوط المستقيمة لا يمكنها أن تكون عمودية على هذين السطحين ما لم يكن مركزاهما موجودين على نقطة واحدة مشتركة. هنا، يتم الإسناد إلى العين في منظورها الجبهي، حيث يتقارب المركزان الكرويان، أي مركز سطح القرنية ومركز الجليدية، في نقطة واحدة (أي على المحور)؛ وبكلمات أخرى، يصدر شعاعاهما المختلفان من المركز نفسه (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣ب)). بالتالي، فهو يعتبر أن العين لا تدرك أياً من الأشكال التي تصلها إلا بالخطوط المستقيمة الوهمية الموجودة بين الشيء المرئي ومركز العين وهي خطوط عمودية على جميع سطوح وأغشية العين (الشكل رقم (٢٠ ـ ٣أ))[115].

إن سبب هذا الاختيار لأشعة عمودية هو أيضاً مصاغ بوضوح، إذ يقول إن وقع الأضواء الواصلة بخطوط عمودية أقوى من وقع تلك التي تصل بخطوط مائلة. وبالتالي فمن العدل أن تحس الجليدية في كل نقطة من سطحها بالشكل الواصل إلى هذه النقطة على امتداد الخطوط العمودية دون أن تحس في هذه النقطة بالشكل الواصل على امتداد الخطوط المنحرفة[116]. كان همه الرئيسي، إذن، هو التطابق نقطة بنقطة. وفي استبعاد الأشعة

---

(١١٥) انظر: ابن الهيثم، المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الأوراق ٩٧ظ ـ ٩٨و و١٠٠ظ ـ ١٠٥و.

حول ترجمة كاملة لهذا المقطع، انظر: Sabra,«Ibn al-Haytham and the Visual Ray Hypothesis,» pp. 193-205.

(١١٦) ابن الهيثم، المصدر نفسه، المقالتان الأولى والرابعة، الورقة ٩٠ظ.

الساقطة الأكثر ضعفاً يكمن المبدأ الغامض عن مصفاة محدودة القوة مشتقة من مفهوم الصدم الميكانيكي.

(٢) حساسية الجليدية

إن ملاحظات ابن الهيثم، فيما يختص بتأثير ضوء حاد على العين، لم تدعم مبدأه عن مصفاة القوة فحسب، بل سمحت له أيضاً بشرح الإحساس البصري كتجربة مشابهة للألم. إن ضوءاً حاداً يسبب الألم، في حين أن أنواعاً أخرى من الضوء أقل حدة تجعل العين أقل حساسية بالنسبة لهذا الألم[١١٧].

وبالنسبة إلى ابن الهيثم، فإن الجليدية، سواء أكانت «شبيهة بالثلج» أم ذات طبيعة بلورية، هي جسم شفاف يسمح للضوء بالدخول وفقاً لمبادئ علم البصريات. لكنه في الوقت نفسه جسم كثيف، بما يكفي، لكي يحتفظ بالضوء وقتاً كافياً لتسجيل الإحساس. وبالتالي، فإنه يتميز عن الأوساط الشفافة الأخرى التي تنقل الضوء فقط دون أن تتأثر به[١١٨]. وبما أن ابن الهيثم يربط تأثير الضوء على الجليدية بسلسلة تجارب عن الحساسية، بدءاً بفقدان الإحساس ووصولاً إلى الألم الحاد تبعاً لكمية الضوء المسلط، فإن حساسية الجليدية في رأيه تملك وظيفة تقديم معلومات عن قوة / صدم الضوء. إن الاهتمام الذي يعيره إلى أهمية وظائف القزحية والعنبة يؤكد وجهة نظره هذه. ففي اعتقاده أن القزحية والعنبة تقدمان سطحاً مظلماً وأكمد داخل الكرة العنبية في العين، أي حجرة سوداء، حيث إن أضعف الأضواء يمكن تمييزه[١١٩].

ب ـ المسألة الثانية: عكس الصورة المسقطة

إن عكس الصورة الجانبية، الذي عرضه ابن الهيثم في تجربة القنديل، يقدم له نموذجاً تصورياً عن إسقاط الصور المرئية بنقاط متطابقة. فبالنسبة إليه، يثبت الاختبار تجريبياً إن إسقاطات كهذه هي بالضرورة معكوسة، آخذين بعين الاعتبار تقاطع الأشعة الضوئية المارة عبر فتحة صغيرة. وهذا يعني أنه عند تطبيق مثل هذا النموذج على الرؤية، فإنه ينبغي التوفيق بين عكس الصورة (أفقية وعمودية) وتصور حقيقي عن عالم طبيعي (في المكان).

---

(١١٧) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والرابعة، الورقة ٦٧و، والمقالة السادسة، الورقتان ١٠٧و ـ ١٠٨و.

(١١٨) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الأوراق ١٠٦ظ ـ ١٠٧و و١١٧و ـ ١١٨و.

(١١٩) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسابعة، الورقة ١٣٠ظ.

(١) محاولات للحل (ميكانيك بصريات العين)

إن وصف ابن الهيثم للعين، التي يصورها بشكل قسمين من كرتين متقاطعتين، هو أساسي لشرحه إسقاط الصور في العين. وقد ألح، بتحديده الأشعة التي تنقل نقاط التطابق، على واقع أن تكون هذا الأشعة عمودية في آن معاً على سطح القرنية وعلى سطح الجليدية. كما طابق أيضاً مسارها مع الخطوط الشعاعية الوافدة من المركز الجبهي للعين. ويظهر سبب إلحاحه هذا في تصوره عن التركيب التشريحي للعين. وبالإضافة إلى ذلك، فإن حججه التي تبرز تحديده لهذه الأشعة بالنسبة إلى الخطوط الشعاعية تصبح مفهومة، عندما نأخذ بشكل منفصل مركز كل واحدة من الكرتين المكونتين للتقاطع. ويمكن حل تشابك الاستدلال عنده بإعادة بناء المراحل التي تؤلف صياغته النظرية لإسقاط الصور في العين (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥)).

إذا راقبنا العين في مستو طولي، نستطيع أن نرى:

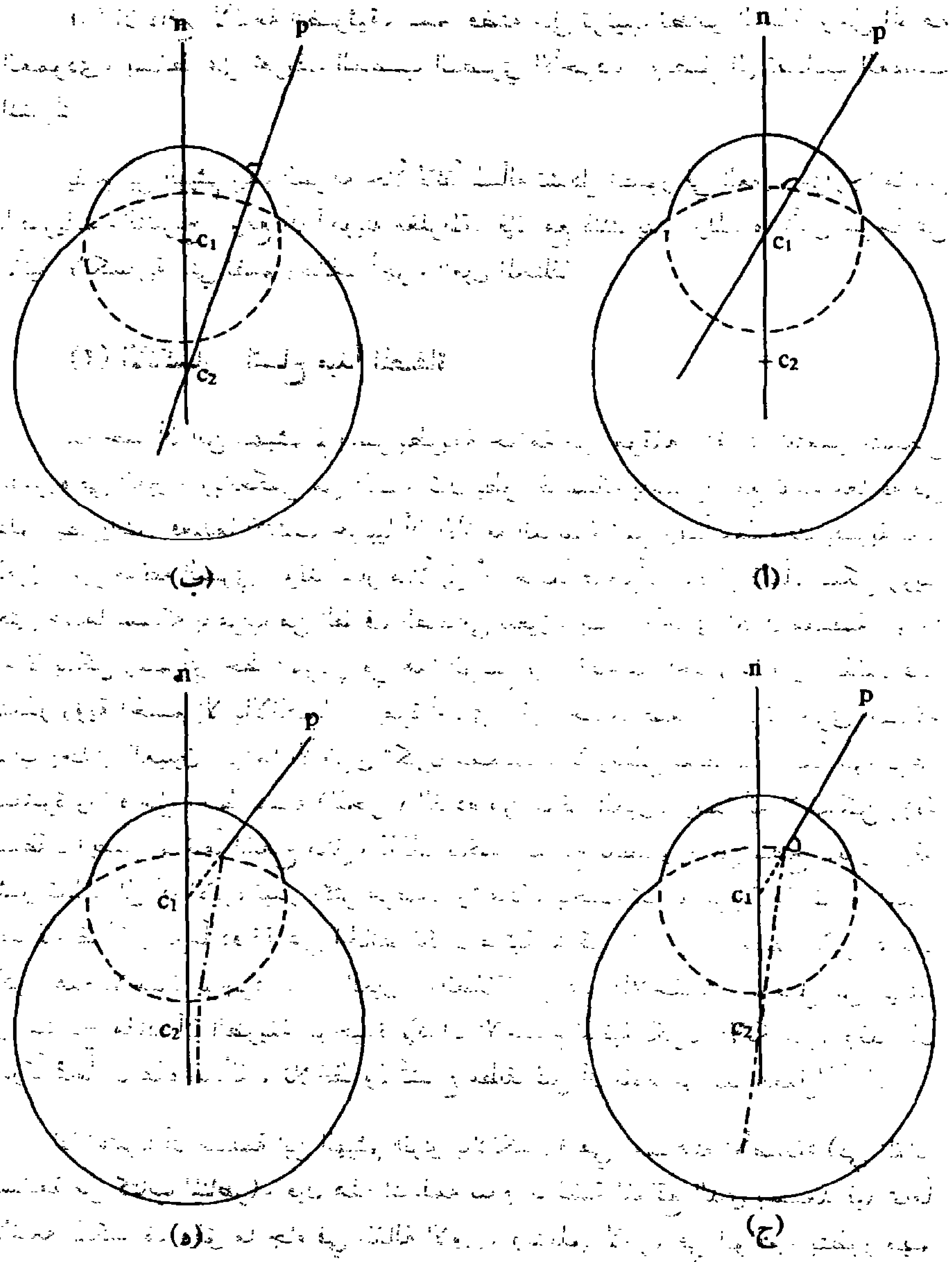
(أ) ان شعاعاً عمودياً على القرنية (أي على محور شعاعي بالنسبة إلى مركز الكرة الصغيرة، أي القرنية) سيكون عرضياً على السطح الأمامي للجليدية (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥أ)). وبصفته عرضياً، سيكون أضعف من أن يمر من خلال الجليدية لكي يشكل صورة.

(ب) وبالعكس، فإن شعاعاً عمودياً على سطح الجليدية (أي على محور شعاعي بالنسبة إلى مركز الكرة العينية الكبيرة) سيكون عرضياً على القرنية (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥ب))، وهذا يعني أنه سيكون أضعف من أن ينفذ.

(ج) ولكي يشكل شعاع ما صورة، يجب أن يكون عمودياً في آن معاً على القرنية وعلى الجليدية. وهذا لا يتم إلا بطريقة واحدة، أي بالانكسار (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥ج)). إن الشعاع العمودي على السطح القرني (وهو شعاعي في مركز الكرة الصغيرة) يتكسر عمودياً على السطح الأمامي للجليدية، ليمر بعد ذلك عبر المركز الثاني الشعاعي للكرة العينية.

(د) ومع أن الأشعة تكون عندئذ عمودية على السطحين، عندما تمر في مركز الكرة العينية للعين، فإنها ستتباعد وستكون الصورة معكوسة في مؤخر العين.

(هـ) وبما أن الصورة المعكوسة تتناقض مع إدراكنا لعالم قائم في المكان، لذلك فإنها لا يمكن أن تكون حقيقية أو مطابقة للواقع. وبالتالي، يطرح ابن الهيثم فكرة انكسار ثان على السطح الخلفي للجليدية. وإذا أخذنا بعين الاعتبار اختلاف الكثافة البصرية بين الجليدية والجسم الزجاجي، فإن الانكسار يتم خارج المحور باتجاه الناظم، كي يحافظ على تقاطع الأشعة في المركز، ويبقي بذلك على الاتجاه العمودي للصورة في مؤخر العين (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥د)).



الشكل رقم (٢٨-٥)

رسم بياني لتصورات ابن الهيثم عن تشكل الصور في العين، باستخدام مبادئ الأشعة العمودية والانكسار (انظر النص من أجل شرح مفصل).

(n) تعني الناظم و(p) تعني العمود

(و) إن دافع الأشعة الضوئية، بمحافظته على ترتيب تطابق النقاط وعلى اتجاهه العمودي، يسقط على تجويف العصب البصري الأجوف، ويصل إلى تصالب العصب المشترك.

يقدم ابن الهيثم بهذه الطريقة حلاً لائقاً لمسألة تشكل الصور في العين، مزاوجاً ما بين البصريات والتشريح. ومع أن أجوبته مغلوطة، فإنه مع ذلك يقدم وللمرة الأولى شرحاً عن الآلية الانكسارية التي تضم وظائف أجزاء العين المختلفة.

(٢) الانكسار: اتساع مبدأ المصفاة

لنلاحظ أن ابن الهيثم لم يصر بطريقة حازمة على موقفه النظري المتعلق بتشكل الصورة في العين. وبالعكس من ذلك، كان يطور فرضياته باستمرار مع تقدم معارفه في علم البصريات. فعندما اكتشف تجريبياً أن الأشعة العرضية تنقل أيضاً معلومات بصرية نحو العين، غير موقفه النظري. وقد أشار مثلاً إلى أن جسماً صغيراً، إبرة أو قلماً، يمكن رؤيته حتى عندما نمسكه بالقرب من الطرف الصدغي للعين، بينما الأخرى تكون مغمضة. وبما أنه لا يمكن رسم أي خط عمودي في هذا الوضع بين نقطة من الجسم والعين، لذلك فإنه يتعذر رؤية الجسم إلا بالانكسار. ومرة أخرى، فإن جسماً صغيراً (إبرة) جرى إمساكه قرب إحدى العينين، بينما الأخرى تكون مغمضة، لا يغطي نقطة ـ جسماً موضوعة مباشرة وراءه على الخط نفسه (المحور) القادم من مركز العين. وبما أنه لا يمكن رؤية النقطة ـ الجسم إلا تبعاً لشعاع مائل، لذلك ينكسر الشعاع بالضرورة على سطح العين. وقد أشار كذلك إلى أن الإبرة تبدو أكثر عرضاً، وشفافة، بحيث تسمح برؤية ما يقع وراءها. فقد لاحظ أن رسوماً دقيقة على الحائط تكون مرئية بشكل تام، ولا تحجبها الإبرة عندما تكون هذه الأخيرة موجودة قرب العين. وانطلاقاً من هذه الملاحظات، توصل ابن الهيثم إلى استنتاج مفاده أن الطريقة الوحيدة لإدراك الأجسام المرئية تكون بالانكسار. وقد كان مدركاً تماماً أن هذه المسألة لم تلاحَظ ولم تُشرح مطلقاً قبل أن يقوم هو بهذا العمل(١٢٠).

إذا اعتبرنا أن مسلمة ابن الهيثم «نرى بالانكسار» هي «مساهمته الأصيلة» (في المقالة السابعة من كتاب المناظر)، فإن هذه المسلمة تبدو مناقضة للواقع الذي يستبعد فيه تماماً الأشعة المنكسرة، وفق ما جاء في المقالة الأولى. ويتعلق الأمر، في الواقع، بتطور مهم لمبدئه عن التصفية على أساس الأشعة العمودية. فعندما دمج الانكسار مع فرضيته عن تشكل الصورة، لم يغب عن ذهنه مبدأ مصفاة القوة. فقد أثبت أن النظام البصري للعين لا يستطيع تصفية كثرة الأشعة الصادرة من كل نقطة من جسم ما إلا على أساس العمودية

---

(١٢٠) انظر: Sabra, Ibid., pp. 193-194, and Rashed, «Lumière et vision: L'Application des mathématiques dans l'optique d'Ibn al-Haytham,» pp. 40-41.

منها. لذلك، لكي يحافظ على التطابق نقطة بنقطة بين الجسم والصورة، فإنه لا يعتبر، مرة أخرى، الأشعة فعالة، إلا تلك التي تنكسر عمودياً. وبهذه الطريقة، استبعد كل الأشعة الأخرى العرضية. وقد تم تحديد الانكسار العمودي على السطح الأمامي للقرنية وللجليدية، بالنسبة إلى مركزيهما الكرويين (الشكل رقم (٢٠ ـ ٥ج)). وبذلك، فقد كانت الأشعة مدركة، كما لو أنها كانت تتبع خطوطاً شعاعية قادمة من المركز الجبهي للعين.

وما يقترحه ابن الهيثم في هذا المجال ليس متناقضاً على الإطلاق. إنه انتقال من موقف أولي يفترض تماثلاً مطلقاً، حيث تُعتبر الأشعة العمودية المباشرة هي الفعالة فقط، إلى موقف يفترض تماثلاً نسبياً ويدرج بعض الأشعة العرضية؛ وبشكل أكثر دقة، تلك الأشعة التي تنكسر عمودياً. وتبقى الأشعة العمودية هي القاسم المشترك لهذه الفرضيات عن النقاط المتطابقة. ومع ذلك، يشكل إدراج الانكسار عنده خطوة مهمة في الانتقال من حل ميكانيكي لمسألة الصورة المسقطة إلى حل بصري.

ج ـ المسألة الثالثة: الشفع (ازدواجية الصور ووحدة التجربة البصرية)

تحتل الحاجة إلى عرض التجربة الذاتية لوحدة الإدراك حيزاً مركزياً في كل محاولات تفسير الآلية الفيزيولوجية للرؤية. إن المسألة، وبكلمات أخرى، هي التالية: كيف يمكن تفسير امتلاكنا إدراكاً وحيداً، في حين أن استخدام العينين يفترض إنتاج رؤية مزدوجة أو شفع. وكان اليونانيون قد أحسوا بالحاجة الواضحة إلى توحيد «النسخات» النوعية النافذة إلى العين، فحددوا موقع هذا التوحيد في التصالب المسمى «العصب المشترك». وقد قدم بطلميوس تفسيرات مشابهة على أساس العلاقة التماثلية القائمة بين المخروط البصري لكل عين. كما قدم جالينوس أيضاً تفسيرات على أساس التراصف التشريحي التام للعينين (وبكلمات أخرى، يجب أن يكون البؤبؤان على المستوى نفسه، كما يجب أن تكون الأعصاب البصرية على السطح المستوي نفسه). وقد أصرا على أن الشعاع المركزي يصل إلى وسط الجسم المرئي، بحيث تكون قواعد المخروطين البصريين متحدة عند حصول التماس[(١٢١)].

غير أن الحل الذي قدمه ابن الهيثم، والناتج عن هذا الانتقال، يرتكز على تكافؤ كمي دقيق بين المعلومات الحاسية لكل عين. فكل دافع يقطع قناة العصب البصري، محتفظاً بمعلوماته (تنظيمه الفضائي)، ليندمج في العصب المشترك قبل أن يصل إلى الجزء الأمامي من الدماغ[(١٢٢)]. وعلى الرغم من أننا لا نعرف جيداً إلى أي مدى ترتكز هذه العملية على

---

(١٢١) حول مقارنة شروحات جالينوس بشروحات بطلميوس، انظر: Siegel, *Galen on Sense Perception*, pp. 103-117.

(١٢٢) ابن الهيثم، كتاب المناظر، المقالتان الأولى والسادسة، مخطوطة فاتح ٣٢١٢، الورقتان ١١٢ظ ـ ١١٣ظ.

مبادئ بصرية، إلا أن النقاش الذي يقترحه ابن الهيثم حول السرعة غير المحسوسة التي بها يصل كل واقع الإحساسات إلى التصالب، يوحي بتشابه مع انتقال الضوء في حجرة بالأشعة. فهو يقول إن الضوء يدخل تجويف العصب المشترك بالطريقة نفسها التي ينفذ فيها الضوء عبر فجوات أو فتحات، إلى الأشياء (الجدران، الشاشات) الموجودة قبالة هذه الفتحات[١٢٣]. وهنا أيضاً يصف إسقاطاً نقطة بنقطة وتراكباً لصورتين صادرتين من العينين. وبكلمات أخرى، تتحد مقاييس حاسية منفصلة في «العصب المشترك»، وإذا تراكبت بإحكام، فإنها تندمج في جوهر واحد[١٢٤].

وتلعب حركة العينين، بالنسبة إلى ابن الهيثم، دوراً أساسياً في اندماج أو تراكيب عملية التكامل ثنائي العينين. إن حركات متقاربة متساوية هي ضرورية للحفاظ على التطابق الموضعي الطوبولوجي للصورة في كل عين. كما أن حركات مترافقة للعينين، تحصل عند انتقال النظر من جزء من الجسم إلى جزء آخر أو من جسم إلى آخر، تملك الوظيفة نفسها. فعلى سبيل المثال، عندما ينظر المراقب إلى جسم مرئي، موجهاً بؤبؤه في اتجاهه، فإن محوري العينين يتقاربان في نقطة ما من سطح الجسم. وعندما يرفع هذا المراقب عينيه فوق الجسم المرئي، فإن المحورين يتجهان سوية فوق جميع أجزاء سطحه. ويستحيل توجيه عين نحو جسم مرئي وإبقاء العين الأخرى في حالة سكون إلا إذا تم إرغامها على ذلك[١٢٥].

يحصل الشفع، أو الرؤية المزدوجة، عندما لا تكون الصورتان مترافقتين في الفضاء، أي عندما ينظر المراقب إلى جسم ما بإحدى العينين ويحرف العين الأخرى. في هذه الحالة لا يكون الدافعان على السجل الطوبولوجي نفسه، بسبب تفاوت الصورتين في العين، وبذلك لا يمكن حصول أي اندماج في التصالب، مما يسبب رؤية مزدوجة. ولا يبدو هنا أن ابن الهيثم قد استخدم تباين الصور «المطابقة» في كل عين، لكي يفسر إدراك العمق[١٢٦].

الإحساس والإدراك

لو تأملنا المنطق الداخلي لتحليل ابن الهيثم، لرأينا أن ما يحدد الإحساس البصري عنده هو «الصورة» الموجودة في التصالب والمنقولة بالقناة البصرية وصولاً إلى الجزء الأمامي من الدماغ[١٢٧]. إنه لا يفسر الرؤية لا عن طريق تشكيل صورة في العين ولا بتوحيد صورتين صادرتين عن العينين بواسطة التصالب. لقد فهم تماماً أن عملية الرؤية تبقى ناقصة

---

(١٢٣) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والثانية، الورقتان ٤٤ظ ـ ٤٥و.

(١٢٤) المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الأوراق ١٠٨ظ ـ ١١٤و.

(١٢٥) انظر الهامش رقم (١٠٨) السابق.

(١٢٦) انظر: Schramm, «Zur Entwicklung der Physiologischen Optik der Arabischen Literatur,» p. 234.

(١٢٧) ابن الهيثم، المصدر نفسه، المقالتان الأولى والسادسة، الورقة ١١٣و ـ ظ.

إذا لم يشرح كيف أن رسماً من نقاط ضوء ولون يمكن إدراكه كجسم بثلاثة أبعاد، يقع على مسافة ويملك قياساً وشكلاً ووضعاً وكذلك حركة معينة. وبالتالي، فإن الصورة الموجودة في العين، بما تمثله من مادة خام للإحساس البصري، يتم تفسيرها خلال سلسلة عمليات ذهنية، تستخدم التعرف والاستدلال والمعارف السابقة والذاكرة والمقارنة.

ما نراه هو، إذن، نتيجة ملاحظة جرى التحقق منها بواسطة فعل «الكاشف النهائي» أو «القدرة التمييز». إنه تفسير بسيكولوجي معقد لما تقدمه لنا حاسة الرؤية[١٢٨].

خاتمة

لقد أظهر ابن الهيثم أن ما ينتج الإحساس ليس الجسم نفسه، بل ما ينتجه هو نقاط من الضوء لا تعد ولا تحصى، منعكسة من سطح الجسم وصولاً إلى العين، وتسمح هذه النقاط بإحساس «الصورة البصرية» المشكلة وفقاً لمبادئ البصريات. إن تعرفنا الحاسي على العالم الخارجي لا يكون، إذن، مباشراً وفورياً، بل هو غير مباشر ويتعلق بتفسيرنا لأحاسيسنا (تجميع نقاط الضوء واللون) على مستوى الإدراك. وبالنسبة إلى الإرث اليوناني، فإن مقاربة ابن الهيثم للرؤية تمثل تغييراً في المفاهيم يحيل إلى العدم صحة النظريات السابقة.

لقد ميز ابن الهيثم في الشرح الذي قدمه عن الرؤية بين: أ ـ ميكانيك الرؤية (مسار مستقيم للضوء من خلال أغشية العين) الذي لا يعالج إلا الأسباب الميكانيكية ويستبعد الأحاسيس؛ ب ـ الإحساس (بواسطة الجليدية والعصالب) الذي لا يشتمل على التعرف إلى الأجسام الخارجية؛ ج ـ تفسير الأحاسيس البصرية بالروح أو «الحاسية النهائية» التي تعالج ما تقدمه حاسة الرؤية إليها، وتسمح بإدراك العالم الخارجي.

بالإضافة إلى ذلك، وبفضل ابن الهيثم، فإن التشريح الذي كان في السابق تتمة غير فعالة أحياناً وأحياناً أخرى فعالة، بالنسبة إلى ما يدور من نقاش حول الرؤية، قد أصبح الشريك الأساسي للبصريات متساوياً معها في الأهمية؛ إذ إن فهم الرؤية يتطلب أكثر فأكثر تركيباً للتشريح (للبيولوجيا) ولفيزياء الضوء. لذلك تدين البصريات الفيزيولوجية بوجودها لهذا الاتحاد. وفي الواقع، فقد انتقلت دراسة الرؤية من المسألة الإجمالية وهي «كيف ندرك نحن العالم الخارجي بحاسة النظر» إلى سلسلة مسائل مختصة تثيرها تضمينات مفهوم الصورة البصرية المشكلة من نقاط والموجودة في العين. أما المسائل المختصة فهي: أ ـ الحفاظ على التطابق نقطة بنقطة بين الجسم والصورة؛ ب ـ عكس الصورة وإدراك حقيقي (في المكان) للجسم؛ ج ـ وحدة الإدراك أو اندماج ثنائي العينين لصورتين منفصلتين آتيتين من كل

---

(١٢٨) أعدت هذه النظرية في الكتاب الثاني. انظر: A. I. Sabra, «Sensation and Inference in Alhazen's Theory of Visual Perception,» in: Machamer and Turnbull, eds., *Studies in Perception: Interrelations in the History of Philosophy and Science,* pp. 169-185.

واحدة من العينين؛ د ـ تمييز بين الصورة كتركيب ذي بعدين في العين وإدراكها كجسم بثلاثة أبعاد بواسطة الروح/الدماغ. وقد أصبحت هذه المسائل مركزية فيما بعد، وحددت اهتمامات علم البصريات الفيزيولوجية وصولاً إلى ديكارت وما بعده.

لا يوجد حتى الآن أي إثبات يؤكد أن تضمينات نظرية ابن الهيثم عن تطابق النقاط قد استخدمت في العلوم الإسلامية، باستثناء كمال الدين الفارسي (نحو العام ١٣٢٠م)(١٢٩) الذي جمع في أبحاثه البصريات والتشريح معاً. فقد تابع في مؤلفه تنقيح المناظر، المستند إلى أعمال ابن الهيثم، الدراسات الاختبارية حول دور الأشعة الساقطة في تشكل الصورة في العين. وأثبت مثلاً، وبشكل صحيح، أن «الصورة البؤبؤية» التي كانت تنسب إلى الجليدية هي في الواقع صورة منعكسة بشكل رئيس بواسطة القرنية، ومصحوبة بصورة أخرى أكثر ضعفاً منعكسة بواسطة الجليدية. كما تفحص أيضاً الصورة [الضوئية] التي تظهر على جليدية خروف ذبح حديثاً. إن مساهماته المتعلقة بتشكل الصورة وبإدراك العمق، وكذلك بميادين أخرى من علم البصريات الفيزيولوجية، تنتظر دائماً أن تتم دراستها(١٣٠).

لا نستطيع في هذه المقالة أن نقيس كل اتساع الدور الخاص لابن الهيثم في تغيير النموذج الذي حصل بالنسبة إلى العالم القديم. وما زلنا غير قادرين على تحديد مصدر أصالته. وقد يكون من التهور استبعاد إمكانية تأثيرات مهمة على أعماله، وهي ضائعة بالنسبة إلينا. وتدل بعض الإشارات إلى أنه كانت هنالك اختلافات عميقة في فكر عصر ما قبل الإسلام مباشرة. وربما تقدم لنا أيضاً أبحاث مقبلة مفاتيح أخرى مهمة تتعلق بإبداع ابن الهيثم، وذلك بإخراجها إلى النور أعمالاً أخرى قام بها أسلافه المباشرون وكذلك معاصروه. وقد نُسب إليه التغيير النوعي لـ كتاب **المناظر**، نظراً للانقطاع الحاصل في ما وصل إلينا. ومما لا يدع أي مجال للشك هو أن كتاب **المناظر** يمثل الأثر الأكثر قدماً لهذا التغيير الحاسم الذي طرأ على الفكر المتعلق بالرؤية.

مع ابن الهيثم نشهد انتقالاً من ميكانيك التماس إلى ميكانيك الضوء. لقد أورثنا الانتقال الأساسي، أي من الميكانيك اللمسي للرؤية إلى نظرية عن تشكل الصورة بتطابق النقاط عائد إلى الضوء المنحرف. ومع أن صياغاته عن الانعكاس والانكسار مستمدة من مبادئ الميكانيك، إلا أن عمله هذا يشكل القاعدة الأساسية لكل الدراسات البصرية عن الرؤية التي حصلت فيما بعد.

---

(١٢٩) حول البصريات الفيزيائية لكمال الدين الفارسي، انظر: Roshdi Rashed, in: *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, pp. 212-219, الذي يتضمن مراجع غزيرة.

(١٣٠) انظر: Schramm, «Zur Entwicklung der Physiologischen Optik der Arabischen Literatur,» pp. 299-316.

ـ ٢١ ـ
الاستقبال الغربي لعلم المناظر العربي

دايفيد ليندبرغ(*)

إن إحدى الميزات الأكثر إثارة للاهتمام والأكثر بروزاً في تاريخ بدايات علم البصريات هي استمرارية هذا العلم بغض النظر عن الحدود الثقافية واللغوية. لكن هذا القول لا يعني أن علم البصريات قد بقي ساكناً تماماً، وأنه كان في منحى عن ضرورة التأقلم مع متغيرات الظروف، الثقافية منها واللغوية والفلسفية. لكن من الأهمية بمكان أن نفهم أنه على الرغم من تطور هذا العلم وتأقلمه، فإنه قد حافظ على تجانس كبير بدءاً بعصر اليونانيين القدماء وحتى بداية القرن السابع عشر.

وتبرز هذه الاستمرارية مدهشة بشكل خاص في الفترة ما بين زمن ابن الهيثم في القرن الحادي عشر وزمن جوهانس كبلر في القرن السابع عشر. إذ نشهد تطورات مهمة ومثيرة للاهتمام في النظرية البصرية خلال هذه الفترة، ولكننا ندهش عندما نتثبت كم كانت ضئيلة التغيرات في المسائل التي طرحتها النظرية، وفي فرضياتها الأساسية وكذلك في معايير النجاح النظري الذي كان عليها أن تحدثه. ولهذا السبب فإن مسائل الانتقال والاستيعاب كانت أموراً أساسية لدراسة تاريخ تطور علم البصريات. وهذا الفصل مخصص لدراسة استقبال علم المناظر العربي في الغرب اللاتيني في القرون الوسطى.

أولاً: الترجمات

لم يكن الغرب، قبل الترجمات في القرنين الثاني عشر والثالث عشر، مطّلعاً سوى على النزر القليل من علم المناظر. إننا نجد في موسوعات پلين (Pline) القديم (ت ٧٩م) وسولين (Solin) (حوالى القرنين الثالث أو الرابع)، وإيزودور الإشبيلي (Isodore de Séville)

(*) معهد تاريخ العلوم، جامعة ويسكونسين ـ الولايات المتحدة الأمريكية.
قام بترجمة هذا الفصل شكر الله الشالوحي.

(القرن السابع)، مناقشات أولية حول ظاهرات بصرية عديدة، لكن النظرية البصرية ذاتها بقيت في مستوى بدائي جداً. فهي تخبرنا مثلاً بأن الرؤية تتم بواسطة النور الصادر عن العين، وبأن موضع الرؤية هو البؤبؤ أو مركز العين، وبأن الضوء هو أسرع من الصوت، وبأن تيباريوس قيصر كان يستطيع الرؤية في الظلمة، وبأن قوس قزح يحصل من التقاء نور الشمس مع غيمة جوفاء. كما نجد فيها قليلاً من التشريح البدائي للعين. وإذا استثنينا عرض پلين الموجز حول شكل الظلال تبعاً لقطر الأجسام المضيئة ولقطر الأجسام التي تلقي ظلها، فإننا نجد أن التحليل الرياضي كان غائباً تماماً[١].

وللحصول على مناقشات أكثر دقة من وجهة نظر فلسفية، وهي مناقشات تعيد وضع الضوء والرؤية إلى إطار نظري أشمل، وتقدم تقديراً للخيارات الممكنة، يجب علينا التخلي عن الموسوعات والتوجه نحو أنواع أخرى من الأدب. فإننا نرى في أعمال لاهوتية متنوعة، وعلى سبيل المثال في سفر التكوين بالمعنى الحرفي *(Genèse au sens littéral)*، أن أغسطينوس أسقف هيبون (٣٥٤ ـ ٤٣٠م) يستوحي ميتافيزيقا الضوء العائدة للمدرسة الأفلاطونية المحدثة، لكي يفسر خلق العالم، وعلاقة الجسم بالروح واكتساب المعرفة. ويعالج أيضاً بإيجاز، ولكن بطريقة مقنعة، طبيعة الضوء المرئي وعملية الإدراك البصري. كما أن هنالك مصدراً آخر كان متوفراً منذ القرن الرابع وهو النصف الأول من مؤلف أفلاطون تيماوس لكن تأثيره كان ضعيفاً قبل القرن الثاني عشر. وقد ضمن أفلاطون كتابه هذا عرضاً متماسكاً حول طبيعة الضوء وكيفية انتقال الحركات انطلاقاً من جسم مرئي إلى روح المراقب، لكي يحدث الإدراك البصري[٣].

ويجب الإشارة إلى سمات عديدة لهذا الأدب اللاتيني لبدايات علم البصريات. نرى أولاً أنه لا توجد أية مقالة مخصصة كلياً لمواضيع بصرية، إذ لم يوضع لعلم البصريات حتى

---

(١) بما يخص الظلال، انظر: Pline l'Ancien, *Histoire naturelle*, établi et traduit par J. Beaujeu (Paris: Les Belles lettres, 1950), vol. 2, p. 8, لمناقشة حول العين، انظر: المصدر نفسه، مج ١١، ص ٥٢ ـ ٥٥ (نص مثبت ومترجم من قبل أ. أرنوت (A. Ernout) ور. بيبان (R. Pépin)، ص ٧٢ ـ ٧٧).

(٢) لا يوجد عرض مُرضٍ حول بدايات الفكر البصري في الغرب. لإلقاء جولة سريعة، انظر: David C. Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler* (Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1976), pp. 87-90.

(٣) انظر: Augustin d'Hippone, *La Genèse au sens littéral*, édité et traduit par P. Agaësse et A. Solignac, 2 vols. (Paris: Desclée de Brouwer, 1970), et Platon, «Timæus a Calcidio translatus commentarioque instructus,» edited by J. H. Waszink and P. J. Jensen, in: Raymund Klibanksy, ed., *Plato Latinus* (Leiden: E. J. Brill, 1962), vol. 4.

ذلك الوقت تصوّر كعلم أساسي قائم بذاته وبحاجة إلى أدب خاص متخصص؛ بل كان يمثل جزءاً من المعلومات العامة مرتبطاً بعدد من المواضيع الأخرى، ونتيجة لذلك لم يكن يستحق سوى اهتمام متواضع في مؤلفات الفيزياء والماورائيات واللاهوت وفي النصوص الموسوعية.

ومن ناحية ثانية، فإن المناقشات التي كانت تدور حول البصريات، كتلك المناقشات التي وردت في هذه المراجع، لم تكن لها مطلقاً أية سمة رياضية تقريباً. فالمسائل المطروحة كانت محصورة بطبيعة الضوء وطبيعة الإدراك البصري أكثر مما هي معنية برياضيات الانتشار والمنظور. وثالثاً كان التصور عن الضوء كجوهر مادي، يستند ربما إلى القرابة بين الضوء والنار. ورابعاً وأخيراً كان الاعتقاد العام بأن الرؤية هي نتيجة عملية إرسال، بحيث تنتشر نار الرؤية من العين إلى الجسم المرئي (وربما أيضاً في الاتجاه المعاكس). وهكذا فالبصريات لم تذهب إلا نادراً إلى أبعد من هذه المواضيع الأولية.

لقد أحدثت الترجمات في القرنين الثاني عشر والثالث عشر تحولاً جذرياً. فللمرة الأولى يجد الغرب اللاتيني في القرون الوسطى بحيازته مقالات مخصصة بكاملها لعلم البصريات. ويرجع بعض منها إلى أصل عربي، وبعضها الآخر هو عبارة عن مقالات يونانية نُقلت إليه بواسطة العرب[٣].

كانت المقالة الأولى المترجمة والمخصصة كلياً لمواضيع في علم البصريات هي مقالة حنين بن إسحق واسمها تركيب العين، وقد ترجمها إلى اللاتينية قسطنطين الأفريقي في أواخر القرن الحادي عشر (ونسبت فيما بعد إما لقسطنطين هذا وإما لجالينوس). وتقدم هذه المقالة عرضاً جالينوسياً في تشريح وفيزيولوجيا العين كما تدافع عن نظرية جالينوس في الرؤية. وبالإضافة إلى هذه المقالة هناك مقالات أخرى جاءت على أثرها بقليل تناولت تشريح وفيزيولوجيا العين وكذلك أمراضها، مثل: كتاب الكامل في الصناعة الطبية لعلي بن العباس (الذي ترجمه قسطنطين، كما ترجمه مرة أخرى إسطفان الأنطاكي في القرن التالي)، وكتاب القانون لابن رشد، وكتاب المنصوري للرازي، وكتاب الكناش الصغير ليوحنا بن سرابيون (وقد ترجم جيرار دو كريمون (Gérard de Crémone) هذه الكتب الثلاثة الأخيرة في النصف الثاني من القرن الثاني عشر).

لقد شهد القرن الثاني عشر ترجمة سلسلة من المقالات في علم البصريات، وقد كانت في أكثريتها، وليس بشكل حصري، رياضية. ومن بين المقالات الأولى نذكر ثلاثاً منها يونانية (المناظر والانعكاس المنسوبتان إلى إقليدس، والمناظر المنسوبة إلى بطلميوس)، وقد

(٣) حول خلاصة لترجمة المقالات البصرية، المحتوية على استشهادات منتقاة من الأدب المتخصص بالموضوع، انظر: Lindberg, Ibid., pp. 209-213.

جرت ترجمتها جميعها حوالى منتصف القرن الثاني عشر. وقد عرفت **مناظر** إقليدس ثلاث ترجمات على الأقل اثنتان منها عن العربية وواحدة عن اليونانية، في حين أن **مناظر** بطلميوس قد ترجمت انطلاقاً من نسخة عربية غير كاملة وتكتنفها الشوائب(٤). ثم انضمت سريعاً إلى هذه الترجمات الأولى مجموعة ترجمات لجيرار دو كريمون، أو لمدرسته، مثل: **المناظر** للكندي، و**الغسق** لابن معاذ و**المناظر** لتيديوس (Tideus)، وكتاب **الانعكاس** (المنسوب غالباً إلى إقليدس) والذي تم جمعه بالعربية انطلاقاً من مصادر يونانية، وكذلك مؤلف *De speculis comburentibus* لابن الهيثم الذي ربما ترجمه جيرار دو كريمون. أما المؤلف الذي كان له التأثير الأكبر لفترة طويلة فهو كتاب **المناظر** لابن الهيثم، وقد نقله مترجم مجهول في أواخر القرن الثاني عشر أو في بداية القرن الثالث عشر(٥).

وأخيراً، هناك صنف ثالث من الأعمال يعالج مسائل في علم البصريات وهو يجمع مؤلفات في فلسفة الطبيعة، ويتناول بخاصة الإدراك وعلم الأرصاد. ونذكر من بين هذه الأعمال تلك المؤلفات التي كان لها التأثير الأكبر: **النفس**، **الحس**، **الآثار العلوية** لأرسطوطاليس (المؤلف الأول والأخير كانا موجودين في الترجمات المنقولة عن العربية منذ القرن الثاني عشر أو الثالث عشر)، ومؤلف **النفس** لابن سينا (ترجم في النصف الثاني من القرن الثاني عشر)، وشرح ابن رشد لكتاب **النفس** لأرسطوطاليس وموجز لمقالة *Parva naturalia* لأرسطوطاليس أيضاً (يبدو أن هاتين الترجمتين قد حصلتا في بداية القرن الثالث عشر)(٦).

وعلى الرغم من أن لائحة الأعمال هذه المتعلقة بعلم البصريات غير مكتملة، فإنها تظهر تحولاً جذرياً في الكمية وفي النوعية أيضاً للأدب البصري المتوفر في الغرب، وذلك

---

(٤) لترجمات مناظر إقليدس Optica، انظر: Wilfred R. Theisen, «*Liber de visu:* The Greco-Latin Translation of Euclid's *Optics,*» *Mediaeval Studies,* vol. 41 (1979) pp. 44-105.

ترجمات ثلاث في القرون الوسطى لكتاب اقليدس **الانعكاسيات** *Catoptrique* كان قد نشرها حديثاً كنيشي تاكاهاشي. انظر: Kenichi Takahashi, *Medieval Latin Traditions of Euclid's «Catoptrica»: Toward a Critical Edition of De speculis* (Fukuoka, Japan: Kyushu University, College of General Education, 1986).

تساءل ويلبر كنور (Wilbur R. Knorr) حديثاً عن موضوع الإسناد التقليدي لكتاب المناظر إلى بطلميوس، انظر: Wilbur R. Knorr, «Archimedes and the Pseudo-Euclidean *Catoptrics:* Early Stages in the Ancient Geometric Theory of Mirrors,» *Archives internationales d'histoire des sciences,* vol. 35 (1985), pp. 96-104.

فيما يخصّنا، فإن هوية المؤلف لا أهمية لها، ودون أن أشكك في حجج كنور، سأتابع الرجوع إلى كتابي **المناظر** و*De aspectibus* وكأنهما لبطلميوس.

(٥) Lindberg, Ibid., pp. 209-211.

(٦) المصدر نفسه، ص ٢١٢ ـ ٢١٣.

انطلاقاً من اكتساب المعارف اليونانية والعربية. وقد كانت المسيحية، في أوائل القرون الوسطى، تكافح من أجل الحفاظ على بقايا الإرث القديم؛ أما بعد الترجمات فقد انصب الجهد على استيعاب مجموعة جديدة واسعة ومتنوعة من المعارف.

ثانياً: رياضيات الضوء والرؤية

إن إحدى سمات الأدب البصري الجديد التي تثير الاهتمام أكثر من غيرها كانت حلته الرياضية. وعلى الرغم من أن هذه الحلة لم تكن بالتأكيد السمة المميزة لمجمل الإسهام الجديد، فإن الصيغة الرياضية كانت مع ذلك أمراً واضحاً. فبنية بعض الرسائل المقدّمة على شكل قضايا بالإضافة إلى الشكل الهندسي للجزء الأكبر من الاستدلالات لم يكن لهما مثيل سابق في تجربة الغرب البصرية. ومناظر إقليدس (بعنوان *De visu* أو *De aspectibus* في ترجماتها اللاتينية) تركت أثرها في المجال: فانطلاقاً من مجموعة مسلمات، تتشكل المقالة من ثمانية وخمسين افتراضاً تحتوي على براهين هندسية مرفقة بأشكال. وعلى قدر المستطاع، يختصر إقليدس علم المناظر بتحليل الأشعة الهندسية الصادرة عن عين المراقب (في خط مستقيم، شرط ألا تنعكس أو تنكسر) والتي لها شكل مخروط. ويشكل مخروط الأشعة هذا قاعدة لنظرية رياضية للرؤية(٧).

وقد توسعت المقاربة الهندسية للضوء والرؤية في مؤلفات أخرى، مثل: **الانعكاس** المنسوبة إلى إقليدس، و**المناظر** لبطلميوس و**المناظر** للكندي. كما نجدها بخاصة في *De speculis comburentibus* لابن الهيثم وكذلك في مؤلفه الضخم **كتاب المناظر**. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع اعتبار أية من هذه الرسائل ذات محتوى رياضي صرف ـ ربما باستثناء اثنتين منها في المرايا ـ إلا أن الرياضيات تشغل حيزاً مهماً في كل منها. ولا يستطيع أي قارئ أن ينتقص من قيمة الاستدلال الرياضي؛ وبالإضافة إلى ذلك فإن الأشكال الهندسية فيها تكشف عن نفسها بمجرد إلقاء نظرة سطحية عليها.

ولم تكن المقاربة الهندسية الموجودة في هذه المقالات جديدة ومدهشة فحسب، بل كانت أيضاً سهلة الاستيعاب. فلم يكن هناك أي اعتراض صريح أكان لاهوتياً أم فلسفياً، أو أي عائق ثقافي مهم يمنع استعمال الرياضيات في تحليل الظواهر البصرية. حتى أن أولئك الذين كانوا يظهرون تحفظات مبدئية فيما يتعلق باتساع التطبيق المحتمل للرياضيات على الطبيعة لم يكن باستطاعتهم الطعن بالمقاربة الهندسية لعلم البصريات ـ وعلى أي حال لم

(٧) حول مناظر إقليدس، انظر: Albert Lejeune, *Euclide et Ptolémée: Deux stades de l'optique géométrique grecque*, université de Louvain, recueil de travaux d'histoire et de philologie; 3. sér., 31-fasc. (Louvain: Bibliothèque de l'université, bureaux du «Recueil», 1948).

يكونوا يفترضون أن هذه المقاربة هي الوحيدة الممكنة[٨]. لقد كانت البصريات الهلنستية اليونانية والعربية تمثل بكل بساطة إنجازاً تقنياً مؤثراً جداً بحيث لا نستطيع إهماله أو رفضه.

إن أول عالم تأثر بالمقاربة الهندسية في الغرب كان العالم روبير غروستست (Robert Grosseteste) (حوالى ١١٦٨ ـ ١٢٥٣) الذي كتب على الأرجح في أوائل السنوات ١٢٣٠[٩]. لقد جاء هذا العالم الذي كان قد قرأ إقليدس والكندي، بفكرة وضع تحديد هندسي للمنظور وإعداد برنامج هندسي لتحليل الإشعاع. ففي مؤلفه *De iride* يحدد علم الرؤية على الشكل التالي: «إنه العلم المرتكز على أشكال تتضمن خطوطاً مشعة وسطوحاً، سواء أكان هذا الإشعاع صادراً عن الشمس، أم عن النجوم، أم عن أي نوع آخر من الأجسام المشعة»[١٠]. ثم يقسم غروستست المنظور إلى أقسام رئيسة وفقاً للطرق المختلفة لانتشار الضوء: المستقيم والمنعكس والمنكسر. وفي مؤلفه *De lineis, angulis, et figuris* (الخطوط والزوايا والأشكال) يقترح غروستست بياناً لصالح الصيغة الهندسية للطبيعة من خلال الصيغة الهندسية للضوء ولأشكال أخرى من الإشعاعات حيث يقول: «من الآن وصاعداً يجب التعبير عن جميع علل الظواهر الطبيعية بواسطة خطوط وزوايا وأشكال، لأنه يستحيل تفسيرها بشكل آخر. وهذا بديهي للسبب التالي: إن عنصراً طبيعياً يضاعف قدرته انطلاقاً من ذاته إلى المتقبل، سواء مارس تأثيره على الحواس أو على المادة. وتدعى هذه القدرة أحياناً «Species» وأحياناً صورة، ومهما تكن التسمية فهي نفسها؛ ويرسل هذا العنصر نفس القدرة في الحواس وفي المادة، أو في نقيضه الخاص، كما ترسل الحرارة نفس الشيء في حاسة اللمس وفي جسم بارد»[١٢].

كان روجر بيكون (Roger Bacon) (حوالى ١٢٢٠ ـ حوالى ١٢٩٢) مطلعاً على جميع

---

(٨) ألبير الكبير (Albert le Grand) هو مثال جيد، انظر: David C. Lindberg, «Roger Bacon and the Origins of *Perspectiva* in the West,» in: Edward Grant and John E. Murdoch, eds., *Mathematics and Its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages* (Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 1987), pp. 249-268.

(٩) انظر: James McEvoy, «The Chronology of Robert Grosseteste's Writings on Nature and Natural Philosophy,» *Speculum*, vol. 58, no. 3 (July 1983), pp. 631-635.

وحول بصريات روبير غروستست، انظر: Bruce S. Eastwood, «Grosseteste's *Quantitative* Law of Refraction: A Chapter in the History of Non-Experimental Science,» *Journal of the History of Ideas*, vol. 28 (1967), pp. 403-414, reprinted in: Bruce S. Eastwood, *Astronomy and Optics from Pliny to Descartes* (London: Variorum Reprints, 1989), and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 94-102.

(١٠) انظر: Edward Grant, ed., *A Source Book in Medieval Science*, Source Books in the History of the Sciences (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1974), p. 389.

(١١) المصدر نفسه، ص ٣٨٥.

المصادر التي كانت بتصرف غروستست، لكنه كان يعرف أيضاً مناظر بطلميوس وكتاب المناظر لابن الهيثم اللذين تحققت فيهما وعود المقاربة الرياضية بشكل أوسع بكثير مما في المراجع الأخرى. لقد كان لهذين الكتابين، ولكتاب ابن الهيثم بشكل خاص، وقع جذري على المحتوى الرياضي، وعلى تدقيق كتابات بيكون في علم البصريات.

لقد أعطى بيكون عرضاً مجملاً لهندسة الإشعاع التي أخذها بشكل أساسي من ابن الهيثم. فقد حدد خمس طرق لانتشار الضوء: المستقيم، والمنعكس، والمنكسر، والعَرَضي (ويقصد بهذا النوع الأخير الإشعاع الثانوي الذي ينطلق من نقاط حزمة ضوء أولية)، والنمط «الملتوي أو الأعوج» الذي يميز بعض الأوساط الحية(١٢). ثم يعطي عرضاً كاملاً لقوانين الانعكاس، حيث يؤكد فيها ليس فقط على تساوي زوايا السقوط والانعكاس، بل يحدد أيضاً مستوي الشعاع الساقط والشعاع المنعكس بالنسبة لسطح المرآة(١٣). ثم يقدم عرضاً متقناً للمبادئ الهندسية للانكسار، محدداً مسار الشعاع المنكسر (بعبارات هندسية، لكنها غير عددية) في مختلف أشكال الأوساط خفيفة الكمدة والكمداء وللسطوح الداخلية الشفافة، المستوية منها والكروية(١٤). ثم يحدد، متبعاً دائماً المصادر اليونانية والعربية، موضع صورة الجسم المرئي بواسطة إشعاع منعكس أو منكسر، ويكون الموضع عند تلاقي الشعاع الساقط (ممدداً إلى ما وراء العين) مع الخط العمودي الممدود من الجسم إلى سطح الانعكاس أو الانكسار. كما يطبق هذه المبادئ على بعض الحالات المثيرة للاهتمام بشكل خاص كـ «المرايا المحرقة»(١٥) و«البلورات المحرقة» أيضاً(١٦).

ومهما كانت دلالات المبادئ البصرية التي استوعبها بيكون فإن أهم ما استخلصه من

---

(١٢) انظر: Roger Bacon: *Roger Bacon's Philosophy of Nature: A Critical Edition with English Translation, Introduction and Notes, of 'De multiplicatione specierum' and 'De speculis comburentibus'*, edited and translated by David C. Lindberg (Oxford: Clarendon Press, 1983), vol. 2, 2, pp. 97-105, and *The 'Opus Majus'*, edited by John Henry Bridges, 3 vols. (London: Williams Norgate, 1900), vol. 1, pp. 111-117.

الوسط النشيط الخاص الذي يفكر بيكون فيه هو «pneuma» البصرية التي تملأ العصب البصري. حول بيكون وانتشار الضوء، انظر أيضاً: David C. Lindberg, «Laying the Foundations of Geometrical Optics: Maurolico, Kepler, and the Medieval Tradition,» in: David C. Lindberg and Geoffrey Cantor, eds., *The Discourse of Light from the Middle Ages to the Enlightenment* (Los Angeles: William Andrews Clark Memorial Library, 1985), pp. 11-31.

(١٣) انظر: Bacon, *Roger Bacon's Philosophy of Nature: A Critical Edition with English Translation, Introduction and Notes, of 'De multiplicatione specierum' and 'De speculis comburentibus'*, especially: *De multiplicatione specierum*, vol. 2,6, pp. 137-147.

(١٤) المصدر نفسه، مج٢، ٣، ص ١٠٥ - ١١١.

(١٥) الحرّاقة أو المحرقة؛ استعمل ابن سهل التعبير الأول بينما استعمل ابن الهيثم التعبيرين معاً. انظر مقالة ابن سهل، «الحراقات،» ومقالة ابن الهيثم، «الكرة المحرقة بالدائرة». (المترجم).

(١٦) Bacon, Ibid, vol. 2, 4, pp. 117-119 and vol. 2, 7, pp. 147-155.

مصادره هو طريقة تصور الإشعاع المنبعث من جسم ذي امتداد معين. فقد استخلص انطلاقاً من الكندي وابن الهيثم أن الضوء يشع بشكل مستقل في كل الاتجاهات، ومن كل نقطة (أو جزء صغير) من الجسم المرئي. وهذا التصور لعملية غير متماسكة أساساً للإشعاع، كان مجهولاً في العصور اليونانية القديمة، فقد صاغه الكندي للمرة الأولى ثم طبقه ابن الهيثم لاحقاً. وقد تبيّن أن هذا التصور يمثل أحد المبادئ الأساسية لعلم المناظر الهندسي، إذ إنه لعب دوراً حاسماً في نظريات الإشعاع وفي نظريات الرؤية في آن معاً.

لم يستطع بيكون أن يجاري الدقة الرياضية لابن الهيثم، ومؤلفات هذا الأخير كانت أفضل مصادره. لكن ما نقله قد تمّ بأمانة كبيرة وبذكاء حاد. وقد استوحى آخرون على ما يبدو مثاله، فاعتمدوا مقاربة لعلم البصريات شبيهة بمقاربته[17]. نذكر منهم تيل ويتلو (Tel Witelo) (ت بعد ١٢٨١م) وهو مؤلف كتاب ضخم جداً عنوانه **المنظور** *(Perspectiva)* وهو كناية عن موسوعة لعلم المناظر، حيث يحاول فيها استعادة مجموعة الأعمال اليونانية والعربية في علم البصريات (ولكن بارتكاب خطأ في الترتيب الزمني)؛ ونذكر أيضاً جون باشام (John Pecham) (ت ١٢٩٢م) وهو راهب فرنسيسكاني يافع ومعاصر لبيكون، وقد كتب موجزاً شعبياً بعنوان *Perspectiva communis* لخص فيه، وبكفاءة، النقاط الأساسية لعلم المناظر[18]. فمن خلال هذه المصادر، وكذلك بواسطة النصوص اليونانية والعربية الأصلية (التي واصلت انتشارها في ترجماتها اللاتينية) تعلم العلماء الغربيون كيف يعالجون علم المناظر بطريقة رياضية.

ثالثاً: طبيعة الضوء

عندما دخلت هندسة الإشعاع إلى الغرب كانت تمتاز ليس فقط بالجدة والحداثة، بل بالحياد الفلسفي أيضاً[19]. بالإضافة إلى ذلك، فقد كانت تظهر كمذهب موحد نسبياً، قليل التأثر بالنزاعات الداخلية. بالمقابل، كانت طبيعة الجوهر الإشعاعي مسألة مثيرة للجدل؛ إذ

---

(١٧) انظر: David C. Lindberg, «Lines of Influence in Thirteenth - Century Optics: Bacon, Witelo, and Pecham,» *Speculum*, vol. 46, no. 4 (1971), pp. 66-83, reprinted in: David C. Lindberg, *Studies in the History of Medieval Optics* (London: Variorum Reprints, 1983).

(١٨) حول تيل ويتلو انظر الطبعات الحديثة المرفقة بالترجمة الإنكليزية من: Sabetai Unguru and A. Mark Smith, *Perspectiva*, Studia Copernicana; XV and XXIII (Wroclaw: Ossolineum, 1977; 1983), vols. 1 and 5.

الخلاصة حول الموضوع، انظر: David C. Lindberg, «Witelo,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, 18 vols. (New York: Scribner, 1970-1990), vol. 14, pp. 457-462.

حول باشام، انظر: David C. Lindberg, *John Pecham and the Science of Optics* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1970).

(١٩) لا أريد القول بهذا الشأن بأن الصيغة الهندسية للظواهر البصرية هي مجردة كلياً من التضمينات الفلسفية، لكنني ألفت النظر ببساطة إلى أن القواعد التقليدية للبصريات الهندسية متوافقة مع جميع النظريات =

كانت تثير مسائل أخرى، بحيث تتطلب خيارات حذرة وتفكيراً متيقظاً في استدلالات الباحثين.

ظهرت النظريات اليونانية في الضوء بمظاهر عديدة ومتنوعة. فكان الضوء بالنسبة إلى الذريّين إشراقاً مادياً. وكانت الرؤية تحدث، بنظرهم، بانتقال غشاء رقيق من الذرات من الجسم المرئي إلى عين المراقب، حاملاً معه الخاصيات المرئية لهذا الجسم إلى ذرات روح المراقب. أما معتقد أرسطوطاليس، الذي كان تأثيره أكثر أهمية لفترة طويلة، فكان يقول إن الضوء هو حالة للوسط الشفاف، وبواسطة هذه الحالة تكون الشفافية في أوج نشاطها؛ وكان يعتبر اللون تغيراً نوعياً تابعاً مُحَثًّا في الشفافية النشطة بواسطة جسم ملون. ويمكن نقل هذا التغير النوعي، من خلال الوسط، إلى عين المراقب الذي يرى نتيجة لذلك. وقد طور الفيثاغوريون، ظاهرياً، نظرية نار الرؤية المنبعثة من العين وهي نظرية نجد أصداء متواصلة لها خلال العصور القديمة والعصر الوسيط. كما طور أفلاطون نظرية الإشراق البصري هذه التي استعملها إقليدس وبطلميوس في نظرياتهما الرياضية للرؤية، وحوّلها جالينوس والرواقيون إلى نظرية «الروح» (Pneuma) البصرية[(٢٠)].

وكأن كل هذا لم يكن معقداً بما فيه الكفاية، فقد طور أفلوطين، مؤسس الأفلاطونية المحدثة (ت ٢٧٠م)، ميتافيزيقا إشراقية في أواخر العصور القديمة، وفيها أن كل كائن هو ثمرة «الواحد» بواسطة عملية إشراق شبيهة بإشعاع الضوء. ففي العالم الطبيعي كما في العالم الماورائي، يكون كل جسم مركز نشاطات، ويسقط صوراً عن نفسه في محيطه. وهذا الضوء المشع غير مادي على الاطلاق، فهو لا يتكون من جزئيات متحركة (كما يعتقد الذريون) وهو لا يتمثل كذلك في تغيرات نوعية ناتجة في الوسط (كما يعتقد أرسطوطاليس)؛ فالأمر يتعلق بضوء غير مادي ينبثق تواً مما فوق الوسط دون أن يتفاعل معه مطلقاً. ويميز أفلوطين أخيراً بين الضوء المشع والضوء الخاص بجسم منير، بحيث إن هذا الضوء الأخير يعمل كالشكل المادي للجسم المنير[(٢١)].

لقد نُقل هذا الإرث المعقد إلى العالم العربي حيث استعادته جمهرة من الفلاسفة الأكفاء. وقد تبنى الكندي، أحد أوائل الفلاسفة العرب (ت نحو ٨٧٣م)، ميتافيزيقا

= تقريباً حول طبيعة الضوء وأنها تتكيف مع الفرضيات الميتافيزيقية المختلفة. وبشكل مبسط، فإن دعاة التصور «المادي» ودعاة التصور «اللامادي» ينضوون تحت قوانين الانعكاس والانكسار نفسها. انظر:

David C. Lindberg, «Continuity and Discontinuity in the History of Optics: Kepler and the Medieval Tradition,» *History and Technology*, vol. 4 (1987), pp. 430-436.

(٢٠) انظر: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, chap. 1.

(٢١) انظر: David C. Lindberg, «The Genesis of Kepler's Theory of Light: Light Metaphysics from Plotinus to Kepler,» *Osiris*, vol. 2, no. 2 (1986), pp. 9-12.

الإشراق لأفلوطين، إذ زعم أن أي شيء في العالم، مادة كان أم حادثاً، ينتج أشعة على مثال النجوم... بحيث إن أي مكان في العالم يحتوي على أشعة صادرة عن أي جسم له وجود فعلي[٢٢].

إلا أن الكندي يختلف مع أفلوطين بصدد طبيعة الجوهر المشع، فهو يصر على أن الضوء هو «انطباع» يحدثه الجسم المضيء في وسط شفاف[٢٣].

كان للمدارس اليونانية الكبيرة الأخرى أنصار أيضاً في العالم العربي. فحنين بن إسحق (ت حوالى ٨٧٧م) الذي ساهم في ترجمة العلم اليوناني إلى العربية، قد تبنى ونشر النظرية الرواقية أو الجالينوسية، التي بموجبها تبرز روح بصرية عن العين وتحول الهواء إلى عضو حساس، أي إلى امتداد للعصب البصري، قادر على إدراك الأجسام التي يلامسها[٢٤]. واعتمد ابن سينا (٩٨٠ - ١٠٣٧م) موقف أرسطوطاليس واعتبر أن الضوء هو خاصية للوسط الشفاف مُحَثًا بواسطة الأجسام المضيئة. إلا أن ابن سينا يميز، ربما باستعارة من المدرسة الأفلاطونية المحدثة، بين الضوء كما هو في الأجسام المضيئة والضوء في الوسط (وقد سميا «Lux» و «Lumen» في الترجمة اللاتينية لكتابه)؛ ويعرّف أيضاً بجوهر ضوئي ثالث وهو الوهج أو الإشعاع الذي يظهر حول الأجسام... كشيء ينبعث عن هذه الأجسام[٢٥].

لم يحاول ابن الهيثم (٩٦٥ - ١٠٣٩م)، الذي تنتمي أهم مساهماته البصرية إلى حقل الهندسة، دراسة طبيعة الضوء بشكل مدعم أو منهجي. مع ذلك تُظهر أعماله بوضوح أنه اعتمد اعتقاد الطبيعيين الأساسي الذين، حسب رأيه، اعتبروا أن الضوء شكل جوهري للأجسام المضيئة بذاتها وشكل عرضي للأجسام المضاءة[٢٦]. وهكذا اقترح التمييز المهم بين الضوء الجوهري والضوء العرضي أو المستعار. وقد عالج أيضاً الضوء في وسط شفاف

---

(٢٢) انظر: Marie Thérèse d'Alverny et F. Hudry, «Al-Kindī, *De radiis*,» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge*, vol. 41 (1974), pp. 224 et 228.

(٢٣) Lindberg, Ibid., pp. 12-14.

(٢٤) Bruce S. Eastwood, «The Elements of Vision: The Micro-Cosmology of Galenic Visual Theory according to Ḥunayn Ibn Isḥaq,» *Transactions of the American Philosophical Society*, vol. 72, no. 5 (1982), pp. 1-59, reprinted in: Eastwood, *Astronomy and Optics from Pliny to Descartes*, and Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 37-41.

(٢٥) انظر: ما ورد من مصادر لابن سينا في قائمة المراجع. انظر أيضاً: Avicenna, *Liber de anima seu sextus de naturalibus, I, II, III*, edited by S. Van Riet (Louvain: E. Peeters; Leiden: E. J. Brill, 1972), pp. 170-172.

(٢٦) انظر: A. I. Sabra, «Ibn al-Haytham,» in: *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 6, pp. 190-192, and Roshdi Rashed, «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham,» *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, no. 4 (1969-1970), p. 273.

باعتباره شكلاً منقولاً من الأجسام المضيئة أو المضاءة إلى المرسل إليه. ويدعم (مع ابن سينا ضد أرسطوطاليس) الرأي القائل بأن الضوء، وكذلك اللون، هما من مواضيع الرؤية؛ فأشكال الضوء واللون تنتشر معاً عبر وسط ملائم وتؤثر في نفس الوقت على القدرة البصرية(٢٧).

وأخيراً، فإن ابن رشد (ت ١١٩٨م)، ومع أنه مناصر لنظرية أرسطوطاليس في الضوء واللون بشكل عام، قد أجهد نفسه ليوضح الظاهرة المربكة للألوان المختلفة التي تحتل ظاهراً نفس المكان دون أن يختلط بعضها ببعض أو أن تتداخل فيما بينها (كأن يدخل في نفس الوقت شكلان لجسمين أحدهما أبيض والآخر أسود في بؤبؤ عين مراقب). يستنتج ابن رشد أن الأشكال في الوسط ليس لها وجود روحي أو مادي، بل تملك حالة متوسطة بين هذين الطرفين(٢٨).

إن مهمتنا الرئيسة في هذا الفصل ليست بالتأكيد إجراء إحصاء جديد للمساهمة العربية في علم البصريات، بل تحديد تأثيرها في الغرب. لقد اطلع العلماء الغربيون على مجمل الأفكار اليونانية والعربية حول طبيعة الضوء، واستناداً إليها فقد أعدوا نظريات متنوعة. لقد مارس الكندي، من دون أدنى شك، تأثيراً كبيراً في تصوره الذي يعتبر أن كل الأجسام هي مراكز نشاط تبث قدرتها أو صورتها في جميع الاتجاهات. ويتوافق هذا التصور جيداً مع تمييز ابن سينا، بين الشكل النشيط للأجسام المضيئة، وما ينتج عنها، أي الصورة أو الشكل في الوسط. وربما نجد التعبير الأكثر منهجية عن وجهة النظر هذه في المذهب الذي طوره غروستست وبيكون والمعروف بـ «تعدد الصور» (Species) والقائل بأن الصور تشع في جميع الاتجاهات انطلاقاً من جميع الأجسام لكي تحدث مجمل التأثيرات الطبيعية(٢٩).

ومن المحتمل أن يكون المظهر الأشد بروزاً في النظريات الغربية حول طبيعة الضوء هو الرفض الإجماعي لمفهوم أفلوطين «اللامادي». فجميع العلماء الغربيين تقريباً الذين بحثوا طبيعة الضوء، وبتأثير من أرسطو والكندي وابن سينا وابن الهيثم، اعتبروا الضوء كخاصية أو تغير لوسط مادي. لقد انضم «الأفلاطونيون» الذين تبعوا غروستست وبيكون إلى

---

(٢٧) انظر: David C. Lindberg, «The Science of Optics,» in: David C. Lindberg, ed., *Science in the Middle Ages* (Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1978), pp. 356-357, reprinted in: Lindberg, *Studies in the History of Medieval Optics*.

(٢٨) انظر: Ibn Rushd, *Epitome of the Parva Naturalia*, translated by Harry Blumberg, Mediaeval Academy of America; Publication no. 54 (Cambridge, Mass.: Mediaeval Academy of America, 1961), pp. 15-16.

(٢٩) Lindberg, «The Genesis of Kepler's Theory of Light: Light Metaphysics from Plotinus to Kepler,» pp. 14-23, and Bacon, *Roger Bacon's Philosophy of Nature: A Critical Edition, with English Translation, Introduction and Notes, of 'De multiplicatione specierum' and 'De speculis comburentibus'*, pp. xlix-lxxi.

«الأرسطوطاليين» المتزمتين في اعتقادهم بأن الضوء والوسط مرتبطان بطريقة مبهمة بحيث إنه لا يمكن أن يكون هناك إشعاع ضوئي في غياب الوسط. وإذا استثنينا موقف غليوم دوكام (Guillaume d'Ockham) الذي كان مستعداً لتصور الفعل عن بعد (دون أي وسيط من أي نوع كان)، وحتى للدفاع عن هذا التصور، فقد سادت فكرة الترابط هذه بين الضوء والوسط من دون معارضة حتى أواخر القرن الخامس عشر، عندما حاول مارسيليو فيشين (Marsilio Ficin) إحياء نظرية أفلوطين(٣٠).

رابعاً: نظريات الرؤية

لم يكن تنوع نظريات الرؤية أقل إرباكاً من تعدد الأفكار حول طبيعة الضوء. ولقد بيّنا في مكان آخر أن النظريات القديمة للرؤية تشكل ثلاثة أصناف(٣١):

١ - نظرية البث لإقليدس ولبطلميوس، التي تقول بأن الإشعاع البصري ينبعث من العين. وكان لهذه النظرية غاية رياضية في الأساس: فهي تمثل، قبل كل شيء، نظرية المنظور البصري.

٢ - نظريات الإدخال عند الذريين وأرسطوطاليس، التي كانت في بادئ الأمر نظريات فيزيائية، مخصصة لعرض الاتصال بين المراقب والجسم المرئي، ولتفسير فيزياء النقل(٣٢).

٣ - نظرية جالينوس التي تتميز عن نظيراتها بالعناية بالتفاصيل التشريحية والفيزيولوجية مع أنها لا تخلو من المحتوى الرياضي والفيزيائي.

وتمزج كل واحدة من هذه النظريات بعض الميزات التفسيرية مع عيوب متنوعة على مستوى التفسير. فنظرية إقليدس الرياضية تقترح تفسيراً هندسياً لإدراك المكان، بطرحها فكرة المخروط البصري؛ لكنها تعود وتتجاهل مسألة الاتصال الفيزيائي بين المراقِب والمرئي؛ أما عند بطلميوس، فهذه النظرية نفسها تكتسب محتوى فيزيائياً مادياً(٣٣)، لكن خاصياتها وتأثيرها تبقى، في الأساس، على المستوى الرياضي. أما نظرية أرسطوطاليس الفيزيائية فإنها تحل مسألة الاتصال الفيزيائي بشكل رائع، لكنها (وبالشكل الذي عرضه أرسطوطاليس) بعيدة عن الرياضيات سواء بمحتواها أم بافتراضياتها. أما نظرية الذريين

---

(٣٠) Lindberg, Ibid., pp. 14-29.

(٣١) Lindberg: *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 85-86, and «The Science of Optics,» pp. 341-342.

(٣٢) يفضل بعض المؤرخين وصف نظرية أرسطو كنظرية «الوسط» أو «التغيير» ومعارضتها مع النظريات الإدخالية. من ناحيتي أفضل اعتبارها كصيغة إدخالية لنظرية التغيير.

(٣٣) أثيرت هذه النقطة من قبل سميث، في: A. Mark Smith, «The Psychology of Visual Perception in Ptolemy's *Optica*,» *Isis*, vol. 79 (1989), pp. 189-207.

الفيزيائية فإنها فشلت، على الأرجح، في تحليل الظواهر الفيزيائية ـ وهذا كان رأي أرسطوطاليس من دون أدنى شك ـ وبقيت خارج كل اهتمام رياضي. وأخيراً، لاقت نظرية جالينوس في البنوما (Pneuma) البصرية نجاحات لأنها بشكل أساسي عرضت علم التشريح وفيزيولوجيا الرؤية، لكنها لم تذكر إلا القليل بصدد نظرية المنظور، ونظريتها الفيزيائية تبدو غير مستحبة بالنسبة إلى فلاسفة الطبيعة. إن مدى كل واحدة من هذه النظريات كان محدوداً. فانتقاء نظرية للرؤية كان يعني إذاً، وعلى نطاق واسع، اختيار المعايير ـ الرياضية أو الفيزيائية أو الطبية ـ التي يراد تلبيتها(٣٤).

لقد تحول النقاش في العالم العربي عن طريق اعتبارين نظريين مهمين وعلى قدر كبير من العمق الفكري. قبل كل شيء لقد اقترح الكندي، وكما رأينا، اعتبار الإشعاع الصادر عن جسم مضيء هو عملية غير متماسكة، بحيث إن الجسم لا يشع في هذه العملية كوحدة، بل إن كل نقطة أو كل منطقة صغيرة منه ترسل صورة مستقلة في الوسط المحيط. وهكذا وضّح الكندي تصوراً تبيّن أنه أساسي لنظريات الرؤية اللاحقة.

اهتم الكندي بعملية الإشعاع وحدها، ولم يدمج إذاً مبدأه غير المتماسك حول الإشعاع من كل نقطة في نظريته الخاصة للرؤية بواسطة البث. إنما كان هذا من إنجاز ابن الهيثم، بعد قرن ونصف من الزمن، إذ أظهر كيفية إنشاء نظرية إدخالية مُرضية عن الرؤية انطلاقاً من مبدأ الكندي. لقد أدرك ابن الهيثم أنه إذا أرسلت كل نقطة من الحقل البصري إشعاعاً بشكل مستقل في جميع الاتجاهات، فإن كل نقطة من العين تستقبل إشعاعاً من كل نقطة من الحقل البصري؛ والخليط في كل نقطة من العين، والناتج من الأشعة الآتية من مختلف نقاط الحقل البصري، يحدث تشوشاً كاملاً. وهكذا، لتفسير رؤية واضحة ينبغي إيجاد طريقة تتأثر بموجبها كل نقطة من العين بنقطة وحيدة من الحقل البصري وبحيث تملك نقاط العين نفس الشكل الذي تملكه نقاط الحقل البصري المؤثر(٣٥).

حل ابن الهيثم هذه المعضلة مستنداً إلى مبادئ الانكسار. فقد افترض أن شعاعاً واحداً، من بين الأشعة الصادرة عن نقطة معينة من الحقل البصري، يسقط عمودياً على سطح العين، ويدخل بذلك دون انكسار. واعتبر ابن الهيثم أن هذا الشعاع وحده يحدث الإدراك البصري في حين تفقد بقية الأشعة تأثيرها بسبب الانكسار. بالإضافة إلى ذلك، يشكل مجموع الأشعة العمودية مخروطاً بصرياً يقع رأسه في مركز العين وتكون قاعدته الأجسام المختلفة التي تشكل الحقل البصري. وهكذا تم إدخال المخروط البصري لمدرسة

---

(٣٤) وُسعت هذه النقطة بتعمق أكثر في: Lindberg: *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 57-60, and «The Science of Optics,» pp. 339-342.

(٣٥) حول نظرية الرؤية لابن الهيثم، انظر: Lindberg: *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, chap. 4, and «The Science of Optics,» pp. 345-349.

إقليدس الرياضية للمرة الأولى في نظريةٍ إدخالية للرؤية؛ وبذلك تحقق للمرة الأولى المزج بين الميزات الرياضية للمخروط البصري من ناحية (والمقصود هنا نظرية متكاملة للمنظور البصري) والتفسيرات الفيزيائية أو السببية التي تعطيها تقليدياً النظريات الإدخالية من ناحية أخرى. بالإضافة إلى هذا النجاح فقد نجح ابن الهيثم في إدخال النتائج التشريحية والفيزيولوجية لجالينوس وللمدرسة الطبية إلى نظريته، مقدماً بذلك نظرية للرؤية تلبي الاهتمامات الرياضية والفيزيائية والطبية في نفس الوقت.

وقبل ترجمات القرنين الثاني عشر والثالث عشر سيطرت نظرية البث، بشكل أو بآخر من أشكالها، على التأملات الغربية في الرؤية، وربما كان ذلك بسبب تأثير أفلاطوني ورواقي. وفي **سفر التكوين بالمعنى الحرفي** يعلن أغسطينوس أسقف هيبون أن الضوء الصادر عن العين هو من نار تنشأ في الكبد، ومنه تذهب إلى الدماغ، ومن ثم إلى العينين، وذلك عبر «مسالك رقيقة»؛ ويسقط هذا الضوء على الأجسام المرئية ويكشفها لحاسة الرؤية: «إن الأشعة التي ترسلها أعيننا هي، بلا شك، بث نوع من الضوء قادر على التقلص عندما ننظر إلى ما هو قرب العينين وعلى التمدد عندما ننظر في اتجاه الأجسام البعيدة. ونشير، من ناحية أخرى، إلى أن الشعاع البصري يرى الأجسام البعيدة حتى ولو كان متقلصاً، لكنه يراها أقل وضوحاً فيما لو امتد نظرنا إليها. غير أن هذا الضوء الموجود في حاسة الناظر ضعيف لدرجة أنه من دون الضوء الخارجي لا نستطيع الرؤية أبداً»[٣٦].

وأكد إيزيدورس الإشبيلي في القرن السابع أن «الأعين هي أضواء أيضاً (Lumina). نسميها أضواء لأن الضوء (Lumen) ينبثق منها، إما لأنها تتضمن ضوءاً داخلياً أصلياً (Lucem)، أو لأنها تبث إلى الخارج ضوءاً وارداً وبذلك تحدث الرؤية»[٣٧].

إن المكانة التي ازدادت أهميتها أكثر فأكثر في القرن الثاني عشر لمؤلف أفلاطون **تيماوس** *(Timée)* دعّمت نظرية النار البصرية. لقد دافع أفلاطون في هذا المؤلف عن الرأي القائل بأن النار البصرية تفيض من العين وتمتزج مع ضوء النهار ليعطيا «جسماً متجانساً وحيداً» وممتداً من العين إلى الجسم المرئي؛ ويقوم هذا الجسم بدور وسط ناقل لحركات الجسم المرئي إلى الروح. لقد استوعب بسرعة علماء القرن الثاني عشر، مثل أدلار دو باث (Adélard de Bath) وغليوم دو كونش (Guillaume de Conches)، وجهة نظر أفلاطون هذه وحسنوها بإثارتهم بعض الأسئلة الدقيقة، ولكنهم دعموا بشكل عام الاعتقاد القائل بأن النظر ينتج عن إشراق النار من العين[٣٨].

---

(٣٦) انظر: Augustin d'Hippone, *La Genèse au sens littéral,* I.16. 31, vol. 1, p. 165.

(٣٧) انظر: Isidore de Séville, *Isidori Hispalensis Episcopi Etymologiarum sive originum libri XX,* edited by W. M. Lindsay, 2 vols. (Oxford: Clarendon Press, 1911), XI.1, pp. 36-37.

(٣٨) Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler,* pp. 5-6 and 91-94.

إن الإجماع النسبي في أوائل العصر الوسيط حول مسألة نظرية الرؤية قد تبدد بسرعة مع الترجمات، التي جلبت للغرب المجموعة الكاملة للفكر اليوناني والعربي حول هذه المسألة. آنذاك اكتسبت نظرية البث دعماً إضافياً انطلاقاً من إقليدس وبطلميوس والكندي والجالينوسيين ـ علماً بأن فحصاً دقيقاً أظهر اختلافات مهمة بين هؤلاء المؤلفين في كثير من النقاط المحددة. وقد ظهرت في تلك الفترة نفسها النظريات الإدخالية، والمدعومة من سلطات فاعلة والمثبتة بحجج مقنعة. لذلك وجد العلماء الغربيون أنفسهم في مواجهة التحدي في انتقاء وإيجاد توسط بين الخيارات.

إن أول مسعى متواضع للخروج من هذا الارتباك قد قام به غروستست: لقد كان، على الأقل، مطلعاً بشكل محدود على النظرية الإدخالية، بحيث كان يبدو مؤهلاً لاعتمادها جدياً مع بقائه أميناً للنظرية الأفلاطونية في النار البصرية[٣٩]. كان استنتاج غروستست بأن كل واحدة من هاتين النظريتين تتضمن أشياء صحيحة. فدافع عن نظرية البث ضد «أولئك الذين يأخذون الجزء وليس الكل»، مقدراً أن «بث الأشعة البصرية» ليس «وهماً وخالياً من الحقيقة»[٤٠]. كما اعتقد من ناحية أخرى أن النظرية الإدخالية غير كاملة أكثر مما هي غير صحيحة؛ ويقول عن الرؤية بأنها «ليست مكتملة باستقبال الشكل الحسي وحده من دون مادة، بل بهذا الاستقبال نفسه الممزوج مع انبثاق الإشعاع الصادر عن العين»[٤١].

وفي الجيل التالي قام ألبير الكبير (ت ١٢٨٠م) بتحليل أوسع لنظرية الرؤية. لقد دافع في مؤلفات متنوعة عن نظرية الإدخال لأرسطوطاليس ضد النظريات المنافسة لها، وبخاصة ضد نظرية الذريين الإدخالية ونظريات البث لأفلاطون وإقليدس والكندي. ومع ذلك لم يعترض على توسيع نظرية أرسطوطاليس باعتماد عناصر بصرية هندسية مأخوذة من ابن سينا وابن رشد وابن الهيثم، ومفاهيم تشريحية أيضاً مستقاة من التقليد الجالينوسي[٤٢].

---

(٣٩) حول نظرية الرؤية لغروستيست، انظر: المصدر نفسه، ص ١٠٠ ـ ١٠١. كانت مهمة غروستيست معقدة، لأنه كان يستعمل ترجمة ميشال سكوت (Michael Scott) لكتاب أرسطو *De animalibus*؛ وبسبب خطأ في الترجمة، يبدو أرسطو مدافعاً عن نظرية الانبعاث. انظر:
Sybil Douglas Wingate, *The Mediaeval Latin Versions of the Aristotelian Scientific Corpus, with Special Reference to the Biological Works* (London: Courrier Press, 1931), p. 78.

(٤٠) *De iride*، نقلاً عن: Grant, *A Source Book in Medieval Science*, p. 389.

(٤١) انظر: Grosseteste, *Commentarius in Posteriorum Analyticorum Libros, II.4*, edited by Pietro Rossi (Florence: Leo S. Olschki, 1981), p. 386.

لوحظ وترجم هذا المقطع لأول مرة بواسطة كرومبي انظر: Alistair Cameron Crombie, *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science, 1100-1700* (Oxford: Clarendon Press, 1953).

(٤٢) Lindberg: *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*, pp. 104-106, and «Roger Bacon and the Origins of *Perspectiva* in the West,» pp. 249-268.

إن ردة الفعل الغربية والتي اتضح أنها الأكثر تأثيراً كانت لروجر بيكون، معاصر ألبير الأكبر. لقد كان بيكون أول عالم غربي استوعب بشكل تام نظام ابن الهيثم البصري؛ إننا لا نعلم على وجه الدقة متى وكيف اطلع على **كتاب المناظر**، لكنه عندما ابتدأ بتأليف أعماله الرئيسة في البصريات، في السنوات ١٢٥٠ أو ١٢٦٠م، برزت فيها نظريات ابن الهيثم التي دلت بقوة على فهمه لهذا العلم. وهكذا اعتمد بيكون تصوراً واسعاً لأهداف علم المناظر، معترفاً بأنه يطال في الواقع مواضيع رياضية وفيزيائية وتشريحية وفيزيولوجية وحتى نفسية.

لقد استمد بيكون جميع الجوانب الأساسية لنظريته في الرؤية من ابن الهيثم. فإن أشكالاً (Species) تنبعث في جميع الاتجاهات من كل نقطة من الحقل البصري. والإشعاع الذي يسقط مائلاً على عين المراقب ينكسر ويضعف. في حين أن الأشعة العمودية هي الوحيدة الفاعلة في عملية الرؤية، وهي تشكل مخروطاً بصرياً يفسر الخاصيات الرياضية للإدراك البصري. وكانت فيزياء الإدراك أيضاً موضوع انتباه كبير من طرف بيكون. فقد وسعها في نظريته حول تعدد الأشكال. إن هذه الأشكال تدرَك داخل العين في عدسات الجليدية، ومن ثم تنتقل عبر «الطريق البصري»، الذي حدده جالينوس وحنين بن إسحق، إلى الدماغ(٤٣).

لكن بيكون كان يملك ميولاً توفيقية قوية. لقد وجد ابن الهيثم مقنعاً، لكنه لم يرد إنكار نفوذ أفلاطون أو إقليدس أو أرسطوطاليس أو بطلميوس أو القديس أغسطينوس أو الكندي. لذلك حاول إثبات التوافق بين جميع هذه المرجعيات الرئيسة في علم البصريات، فمفاهيم هؤلاء العلماء قد تكون جزئية، لكن أياً منها ليس خاطئاً. وهكذا انقاد إلى طرح مسائل مثيرة للاهتمام كمسألة معرفة ما إذا كان تحول الوسط الذي اقترحه أرسطوطاليس، وأشكال ابن الهيثم، وأشكال غروستست ما هي إلا الشيء نفسه (في الواقع كان هذا أيضاً هو رأي بيكون). أما معضلة التوفيق بين نظرية الإدخال لأرسطوطاليس وابن الهيثم، ونظرية البث لإقليدس وبطلميوس والقديس أغسطينوس والكندي فقد كانت أكثر صعوبة. لقد حل بيكون هذه المعضلة بطريقة بارعة، إذ أوضح أنه على الرغم من أن أرسطوطاليس وابن الهيثم كانا محقين في تأكيدهما أن إدخال الأشعة هو السبب المباشر للرؤية، إلا أن لا شيء في أعمالهما يستبعد وجود إشعاع متزامن للأشكال الصادرة عن العين ــ فالأشكال هذه تُستخدم لتحسين الضوء أو الأشكال الواردة الى العين، بتحضير هذه الصور الأخيرة للتأثير في العين وفي القدرة البصرية.

من غير المفيد هنا الدخول في تفاصيل نظرية بيكون. والشيء المهم هو أنه قدم تركيباً

---

(٤٣) حول نظرية الرؤية لبيكون، انظر: Lindberg, *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler,* pp. 107-116.

ضخماً للمعارف البصرية اليونانية والعربية، وقد أظهر هذا التركيب تأثيره الكبير لأكثر من ثلاثمئة سنة. لم تكن النسخ المخطوطة لأعمال بيكون البصرية وحدها واسعة الانتشار، بل إن أفكاره أيضاً تعممت بشكل واسع النطاق عبر الكتب الشعبية لمعاصريه الأصغر منه سناً أمثال ويتلو وجان باشام. كذلك استمرت أعمال ابن الهيثم في نفس العصر، في نشر المعارف في علم البصريات وفي توجيهها بشكل مباشر. وتابعت مدرسة المنظور (Perspectiva) مسيرتها عبر القرون الرابع عشر والخامس عشر والسادس عشر بدمج إنجازات ابن الهيثم وأعمال مؤلفين آخرين، يونانيين وعرباً. وعندما تطرق جوهانس كبلر (Johannes Kepler) إلى مسألة الرؤية في أوائل القرن السابع عشر، ابتدأ من حيث كان ابن الهيثم قد توقف[٤٤].

(٤٤) حول تأثير البصريات العربية، انظر دايفيد ليدنبرغ، «المقدمة،» لإعادة طبع:
Abū ʻAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham, *Opticæ Thesaurus. Alhazeni Arabis Libri Septem... Item Vitellonis Thuringopoloni Libri X,* edited by Federico Risnero (Basel: Per Episcopios, 1572), reprinted (New York: Johnson Reprint Corporation, 1972), pp. xxi-xxv, and Lindberg, Ibid., chaps. 6-9.

المراجع

١ ـ العربية

كتب

ابن أبي أصيبعة، أبو العباس أحمد بن القاسم. **عيون الأنباء في طبقات الأطباء**. تحقيق ونشر أ. مولر. القاهرة؛ كونغسبرغ: [د. ن.]، ١٨٨٢ ـ ١٨٨٤.

ابن البطريق، أبو الحسين يحيى بن الحسن. **في السماء والآثار العلوية**. تعريب كتاب أرسطوطاليس *Météorologiques*. نشرة عبد الرحمن بدوي. القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦١.

ابن سينا، أبو علي الحسين بن عبد الله. **جوامع علم الموسيقى**. نشر زكريا يوسف. القاهرة: دار الكتب، ١٩٥٦.

ـــــــ. **كتاب الشفاء**. نشر ف. رحمن. لندن: مطبوعات جامعة أوكسفورد، ١٩٧٠.

ـــــــ. **كتاب الشفاء ـ الطبيعيات**. نشر ج. قنواتي وس. زايد. القاهرة: [د. ن.]، ١٩٧٠.

ـــــــ. **معيار العقول** (النص الفارسي). تصحيح جلال الدين همائي. طهران: [د. ن.]، ١٣٣١هـ/ ١٩٥٢م. (سلسلة انتشارات انجمن آثارملي؛ ٢٤)

ابن شاكر، محمد بن موسى. **رسائل الطوسي**. حيدر آباد، الهند: [د. ن.]، ١٩٤٠.

ـــــــ. **كتاب الحيل**. نشرة نقدية للنص العربي من قبل أحمد يوسف الحسن بالتعاون مع محمد علي خيّاطة ومصطفى تعمري. حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١. (مصادر ودراسات في تاريخ العلوم العربية الإسلامية، سلسلة

ابن عراق، أبو نصر منصور بن علي. **رسائل أبي نصر بن عراق إلى البيروني**. حيدر آباد الدكن: مطبعة جمعية دائرة المعارف، ١٩٤٨.

ابن غازي، أبو عبد الله محمد بن أحمد. **بغية الطلاب في شرح منية الحساب**. لابن غازي المكناسي الفاسي. تحقيق ونشر محمد السويسي. حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨٣. (مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٤).

ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن. **الشكوك على بطليموس**. تحقيق عبد الحميد صبره ونبيل الشهابي؛ تصدير إبراهيم مدكور. القاهرة: مطبعة دار الكتب، ١٩٧١.

ـــــــ. **كتاب في حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه**. صورة فوتوغرافية عن مخطوطة اسطنبول. فرنكفورت ـ أم ـ مان: [د. ن.]، ١٩٨٥.

ـــــــ. **كتاب المناظر**. تحقيق ونشر علي أ. صبرا. الكويت: معهد المخطوطات العربية، ١٩٨٣.

ـــــــ. **مجموع الرسائل**. حيدر آباد: [د. ن.]، ١٩٣٨ ـ ١٩٣٩.

أبو كامل. **كتاب في الجبر والمقابلة**.

ـــــــ. **الوصايا بالجبر**.

الأصبهاني، أبو الفرج علي بن الحسين. **كتاب الأغاني**. تحقيق علي محمد البجاوي. القاهرة: دار الكتب المصرية، القسم الأدبي، ١٩٢٧ ـ ١٩٧٤. ٢٤ ج. بولاق، مصر: المطبعة المصرية، ١٢٨٥ هـ. ٢١ ج في ١٠.

الإقليدسي، أبو الحسن أحمد بن ابراهيم. **الفصول في الحساب الهندي**. تحقيق أحمد سعيد سعيدان. عمّان: اللجنة الأردنية للتعريب والنشر والترجمة، ١٩٧٣. ط ٢. حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلوم العربية، ١٩٨٦. (تاريخ علم الحساب العربي؛ ٢)

الأموي، أبو عبد الله يعيش بن إبراهيم. **مراسم الانتساب في علوم الحساب**. نشر أحمد سليم سعيدان. حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلوم العربية، ١٩٨١. (مصادر ودراسات في تاريخ الحساب العربي؛ ٢)

البغدادي، أبو منصور عبد القاهر بن طاهر. **التكملة في الحساب مع رسالة في المساحة**. تحقيق أحمد سليم سعيدان. الكويت: معهد المخطوطات العربية، ١٩٨٥.

البغدادي، صفي الدين عبد المؤمن بن أبي المفاخر الأرموي. **كتاب الأدوار في الموسيقى**. تحقيق ونشر غطاس عبد الملك خشبة؛ مراجعة وتصدير أحمد الحفني. القاهرة: الهيئة

المصرية العامة للكتاب، ١٩٨٦. (مركز تحقيق التراث)

البوزجاني، أبو الوفاء محمد بن محمد. **حساب اليد: تحقيق لكتاب المنازل السبع**. تحقيق أحمد سليم سعيدان. عمان: [د. ن.]، ١٩٧١. (تاريخ علم الحساب العربي؛ ج ١)

البيروني، أبو الريحان محمد بن أحمد. **استخراج الأوتار في الدائرة**. نشر الدمرداش. القاهرة: المؤسسة المصرية العامة للتأليف والأنباء والنشر، ١٩٦٥.

ـــــــ. **رسائل البيروني**. حيدر آباد الدكن: مطبعة جمعية دائرة المعارف، ١٩٤٨.

ـــــــ. **القانون المسعودي**. صحح عن النسخ القديمة الموجودة في المكاتب الشهيرة، تحت إعانة وزارة معارف الحكومة العالية الهندية. حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف العثمانية، ١٩٥٤ ـ ١٩٥٦. ٣ ج. ج ٣: **المقالة الثالثة من القانون المسعودي**. تحقيق إمام ابراهيم أحمد. القاهرة: [د. ن.]، ١٩٨٥. (مجموعة لجنة إحياء التراث الإسلامي)

حاجي خليفة، مصطفى بن عبد الله. **كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون**. عني بتصحيحه محمد شرف الدين يالتقايا ورفعت بيلكه الكليسي. استانبول: طبع بعناية وكالة المعارف، ١٩٤١ ـ ١٩٤٣. ٢ مج.

الخازني، أبو منصور عبد الرحمن. **كتاب ميزان الحكمة**. حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف العثمانية، ١٩٤١.

الخوارزمي، أبو عبد الله محمد بن موسى. **كتاب الجبر والمقابلة**. تحقيق ونشر علي مصطفى مشرّفة ومحمد مرسي أحمد. القاهرة: الجامعة المصرية، كلية العلوم، ١٩٣٩.

الخيام، عمر. **رسائل الخيام الجبرية**. تحقيق وتحليل رشدي راشد وأحمد جبار. حلب: جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١. (مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٣)

ديوفنطس الإسكندراني. **صناعة الجبر**. ترجمة قسطا بن لوقا؛ تحقيق وتقديم رشدي راشد. القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، ١٩٧٥. (التراث العلمي العربي؛ ١)

السموأل بن يحيى بن عباس المغربي. **الباهر في الجبر**. ملحوظات وتقديم ونشر صلاح أحمد ورشدي راشد. دمشق: جامعة دمشق، ١٩٧٣. (سلسلة الكتب العلمية؛ ١٠)

الصفدي، صلاح الدين خليل بن أيبك. **رسالة في علم الموسيقى**. تحقيق ونشر عبد المجيد ذياب وغطاس عبد الملك خشبة. القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، ١٩٩١.

الطوسي، نصير الدين محمد بن محمد. **تحرير إقليدس في علم الهندسة**. طهران: [د. ن.]، ١٢٩٢ هـ/ ١٨٨١م.

الفارابي، أبو نصر محمد بن محمد. **إحصاء العلوم**. حققها وقدم لها عثمان أمين. ط ٣. القاهرة: [د. ن.]، ١٩٦٨.

ـــــــ. **كتاب الموسيقى الكبير**. القاهرة: دار الكتاب العربي، ١٩٣٧.

الفارسي، كمال الدين أبو الحسن. **تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر**. حيدر آباد الدكن: مطبعة مجلس دائرة المعارف، ١٣٤٧ ـ ١٣٤٨هـ/ ١٩٢٨ ـ ١٩٣٠م. ٢ ج.

القفطي، أبو الحسن علي بن يوسف. **تاريخ الحكماء: وهو مختصر الزوزني المسمّى بالمنتخبات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء**. تحقيق يوليوس ليبرت. ليبزيغ: ديتريخ، ١٩٠٣.

الكاشي، غياث الدين جمشيد بن مسعود. **مفتاح الحساب**. تحقيق ونشر أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ؛ مراجعة عبد الحميد لطفي. القاهرة: دار الكتاب العربي للطباعة والنشر، ١٩٦٧.

الكرخي، أبو بكر محمد بن الحسن. **الكافي في الحساب**. شرح وتحقيق سامي شلهوب. حلب: جامعة حلب، معهد تاريخ العلم العربي، ١٩٨٦. (مصادر ودراسات في تاريخ الرياضيات العربية؛ ٥)

ـــــــ. **كتاب البديع في الحساب**. تحقيق ونشر عادل أنبوبا. بيروت: الجامعة اللبنانية، ١٩٦٤. (الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات الرياضية؛ ٢)

الكندي، أبو يوسف يعقوب بن إسحق. **رسائل الكندي الفلسفية**. تحقيق وتقديم محمد عبد الهادي أبو ريدة. القاهرة: دار الفكر العربي، ١٩٥٠ ـ ١٩٥٣. ٢ ج.

ـــــــ. **كتاب في الصناعة العظمى**. تحقيق ونشر عزمي طه السيد أحمد. قبرص: دار الشباب، ١٩٨٧.

المجوسي، أبو الحسن علي بن العباس. **الكتاب الكامل في الصناعة الطبية المعروف بالملكي**. القاهرة: بولاق، ١٢٩٤هـ/ ١٨٧٧م. ٢ ج.

نظيف، مصطفى. **الحسن بن الهيثم: بحوثه وكشوفه البصرية**. القاهرة: مطبعة نوري، ١٩٤٢ ـ ١٩٤٣. ٢ ج. (جامعة فؤاد الأول، كلية الهندسة؛ المؤلف رقم ٣)

دوريات

الطوسي، نصير الدين. «جوامع الحساب بالتخت والتراب.» تحرير أحمد سليم سعيدان. **الأبحاث**: السنة ٢٠، الجزء ٢، حزيران / يونيو ١٩٦٧، والسنة ٢٠، الجزء ٣، أيلول / سبتمبر ١٩٦٧.

٢ ـ الأجنبية

Books

Adam, Charles et Paul Tannery (eds.). *Vie et œuvres de Descartes*. Paris: Léopold Cerf, 1910.

Alfonso. *Meyashshēr 'Aqōb, Vypryamlyayushchiĭ Krivoye*. Texte hébreu, traduction russe de G. M. Gluskina; commentée par G. M. Gluskina, S. Y. Luria et B. A. Rosenfeld. Moscou: [s. n.], 1983.

Allard, André. *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwarīzmī: Le Calcul indien (algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle*. Paris/Namur: [s. n.], 1992.

———. *Maxime Planude: Le Grand calcul selon les indiens*. Louvain-la -Neuve: Publications universitaires, 1981. (Travaux de la faculté de philosophie et lettres de l'université catholique de louvain, XXVII).

Archibald, Raymond Clare. *Euclede's Book on Divisions of Figures, with a Restoration*. Based on Woepcke's text and on the Practica Geometriæ of Leonardo Pisano. Cambridge, Mass.: University Press, 1915.

Aristoteles. *Aristotelis Mechanica Problemata*. Edited by C. Tauchnitianae. Lipsiae: O. Holtze, 1868. (Half-title: Aristotelis Opera Omnia; v. XVI)

———. *Les Météorologiques*. Traduction par J. Tricot. Paris: J. Vrin, 1941; English translation by C. Petraitis. *The Arabic Version of Aristotle's Meteorology*. A critical edition with an introduction and greek - arabic glossaries. Beyrouth: Dar El-Machreq, 1967. (Université Saint Joseph, institut de lettres orientales de Beyrouth, recherches, série 1: Pensée arabe et musulmane; t. 39)

———. *The Works of Aristote*. Translated into english under the editorship of W. D. Ross. Oxford: Oxford University, 1928-1952. 12 vols.

Arnaldez, R. [et al.]. *La Science antique et médiévale des origines à 1450*. Paris: Presses universitaires de France, 1966. (Histoire générale des sciences; 1)

Arrighi, Gino. *Libro d'abaco. Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca St. di Lucca*. Lucca: [n. pb.], 1973.

———. *La Practica de geometria*. Pisa: Domus Galilaeana, 1966. (Testimonianze di storia della scienza; III)

———. *Trattato d'abaco. Dal Codice Acq. e doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze*. Pisa: Domus Galilaeana, 1974. (Testimonianze di storia della scienza; VII)

———. *Trattato d'aritmetica*. Pisa: Domus Galilaeana, 1964. (Testimonianze di storia della scienza; II)

Avicenna. *Liber de anima seu sextus de naturalibus, I-II-III*. Edited by S.Van Riet.

Louvain: E. Peeters; Leiden: E. J. Brill, 1972.

Bacon, Roger. *The 'Opus Majus'*. Edited by John Henry Bridges. London: Williams Norgate, 1900. 3 vols.

———. *Roger Bacon's Philosophy of Nature: A Critical Edition with English Translation, Introduction and Notes, of 'De multiplicatione specierum' and 'De speculis comburentibus'. Edited and translated by David C. Lindberg. Oxford: Clarendon Press, 1983.*

Badawī, 'Abd al-Rahman. *Commentaires sur Aristote perdus en grec et autres épîtres.* Beyrouth: Dar El-Machreq, 1968. (Institut de lettres orientales de Beyrouth, recherches, t. 1, nouv. série langue arabe et pensée islamique)

Bar Hebraeus, G. *Gregorii Abulpharagii sive Bar-Hebraei Chronicon Syriacum.* Noté par Paulus Iacobus Bruns; édité par Georgius Guilielmus Kirsch. Lipsiae: Apud Adamum Friedericum Boehmium, 1789. 2 vols

Barnes, Jonathan, Malcolm Schofield and Richard Sorabji (eds.). *Articles on Aristotle.* London: Duckworth, 1975-1979. 4 vols.
vol 4: *Psychology and Aesthetics.*

Becker, Oskar. *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung.* München; Freiburg: K. Alber, 1964.

Benson, Robert L. and Giles Constable (eds.). *Renaissance and Renewal in the Twelfth Century.* Oxford: Clarendon Press, 1982.

Bergsträsser, G. *Ḥunayn b. Isḥāq und seine Schule.* Leiden: [n. pb.], 1931.

———.*Neue Materialen zu Ḥunayn b. Isḥāq's Galen Bibliographie.* Lichtenstein: Neudeln, 1966.

Berlet, B. *Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu Rechnen. Die Coss von Adam Riese.* Leipzig; Frankfurt: [n. pb.], 1892.

Al-Bīrūnī, Abu al-Rayhan Muhammad Ibn Ahmad. *Ifrād al-maqāl fī 'amr al-Ẓilāl: The Exhaustive Treatise on Shadows.* Translation and comment by Edward Stewart Kennedy. Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1976. 2 vols.

———. *Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du X^e siècle.* Edition, traduction et commentaire par Marie-Thérèse Debarnot. Damas: Institut français de Damas, 1985.

———. «Maqāla fī al-nisab allatī bayna al-filizzāt wa al-jawāhir fī al-ḥajm (Le Livre sur la relation existant entre les volumes des métaux et ceux des pierres précieuses).» Traduction russe par M. M. Rozhanskaya et B. A. Rozenfeld, dans: *Nauchnoye nasledstvo.* Moskva: Nauka, 1983. vol. 6.

Blume, Friedrich, K. Lachmann and A. Rudorff. *Die Schriften Der Römischen Feldmesser.* Berlin: Reprografischer Nachdruck der Ausg., 1848-1852. 2 vols.

Boncompagni-Ludovisi, Baldassare. *Algoritmi de numero Indorum.* Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857. (Trattati d'aritmetica; I)

———.*Iohannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice.* Roma: Tipografia

delle scienze matematiche e fisiche, 1857. (Trattati d'aritmetica; II)
———.*Scritti di Leonardo Pisano. I:Il liber abbaci. II: Practica geometriæ ed opusculi.* Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857-1862.

Brahmagupta. *The Khaṇḍakhādyaka: An Astronomical Treatise of Brahmagupta.* Translated into english with an introduction, notes, illustrations and appendices by P. C. Sengupta. Calcutta: University of Calcutta, 1934.

Braunmühl, Anton elder von. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Leipzig: B. G. Teubner, 1900-1903. 2 vols.

Burnett, C. (ed.). *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century.* London: [n. pb.], 1987. (Warburg Institute, Surveys and Texts; XIV)

Busard, H. L. L. *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath.* Toronto: [n. pb.], 1983. (Pont. Institute of Mediaeval Studies, Studies and Texts; LXXIV)

———. *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona.* Leiden: Brill, 1984.

——— (ed.). *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia.* Books 1-6. Leiden: Brill, 1968. Books 7-12. Amsterdam: [n. pb.], 1977.

Carathéodory, A. Pacha. *Traité du quadrilatère.* Constantinople: [s. n.], 1891.

Clagett, Marshall. *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1959. (University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 4)

———. (ed.). *Archimedes in the Middle Ages.* Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964-1984. (University of Wisconsin Publications in Medieval Science; 6). 5 vols.

Cohen, Morris Raphael and I. E. Drabkin. *A Source Book in Greek Science.* Cambridge, Mass.: Harvard University, 1948. (Source Books in the History of Science)

Cohen, Robert S. (ed.). *Boston Studies in the Philosophy of Sciences.* Boston: Reidel Pub. Co., 1973.

Coolidge, Julian Lowell. *A History of Geometrical Methods.* Oxford: Clarendon Press, 1940. Reprinted, New York: Dover Publications, 1963.

Crombie, Alistair Cameron. *The Mechanistic Hypothesis and the Scientific Study of Vision: Some Optical Ideas as a Background to the Invention of the Microscope.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

———. *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science, 1100-1700.* Oxford: Clarendon Press, 1953.

Crosby, Henry Lamar (ed.). *Thomas of Bradwardine, His Tractatus de Proportionibus; Its Significance for the Development of Mathematical Physics.* Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1955.

Curtze, Maximilian. *Jordani Nemorarii Geometria, vel De Triangulis Libri IV*. Thorn: E. Lambeck, 1887.

———. *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius una cum Algorismo ipso*. Copenhague: [n. pb.], 1897.

Dickson, Leonard Eugene. *History of Theory of Numbers*. New York: Chelsea, 1952. (Carnegie Institution of Washington; Publication no. 256). 3 vols. Reprinted, 1966.

Dictionary of Scientific Biography. New York: Scribner, 1970-1990. 18 vols.

Diophante. *Les Arithmétiques*. Texte établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles lettres, 1984. (Collection des universités de France)

Duhem, Pierre Maurice Marie. *Les Origines de la statique*. Paris: Hermann, 1905-1906. 2 vols.

Eastwood, Bruce S. *Astronomy and Optics from Pliny to Descartes*. London: Variorum Reprints, 1989.

Ecole Nat. de chartes: Position des thèses. Paris: [s. n.], 1969.

Encyclopaedia Iranica. Edited by Ehsan Yarshater. London: Routledge and Kegan Paul, 1986-1987.

Encyclopédie de l'Islam. 2ème ed. Leiden: E. J. Brill, 1960-. 6 vols. parus. Réimprimé, Paris: Maisonneuve et Larose, 1986.

Erlanger, Rodolphe de. *La Musique arabe*. Paris: Geuthner, 1930-1959. 6 vols.

Euclide. *Les Eléments*. Traduit par F. Peyrard. Paris: [s. n.], 1819.

———. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Translated and commented by T.L. Heath. Cambridge: [n. pb.], 1926.

Al-Fārābī, Abu Naṣr Muḥammad Ibn Muḥammad. *Al-Rasā'il al-riyāḍiyya (Matematicheskie Traktaty)*. Traduction russe et édition de A. Kubesov et B. A. Rosenfeld. Alma-Ata: [s. n.], 1973.

Farmer, Henry George. *A History of Arabian Music to the XIIIth Century*. London: Luzac, 1929.

———. *The Sources of Arabian Music*. An annotated bibliography of arabic manuscripts which deal with the theory, practice, and history of arabian music from the eighth to the seventeenth century. Leiden: E. J. Brill, 1965.

Folkerts, Menso. *Anonyme Lateinische Euklidbearbeitungen aus dem 12. Jahrhundert*. Wien: [n. pb.], 1971.

———. *«Bœthius» Geometrie II: Ein Mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden: F. Steiner, 1970. (Bœthius; Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Exakten Wissenschaften; Bd. 9)

——— and U. Lindgren (eds.). *Mathemata. Festschrift für H. Gericke*. Stuttgart: [n. pb.], 1985.

Franceshi, Pietro di Benedettodei. *Trattato d'abaco. Dal Codice Ashburnhamiano (359-391) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze*. Introduction by Gino Arrighi. Pisa: Domus Galilaeana, 1970. (Testimonianze di storia della scienza; VI)

Galenus. *De Placitis Hippocratis et Platonis, (Sur les doctrines d'Hippocrate et de Platon)*. Edité et traduit par P. de Lacy. Berlin: Akademie Verlag, 1978. (Corpus Græcorum Medicorum; VII)

———. *Galen, on the Usefulness of the Parts of the Body. De usu partium*. Translated by M. T. May. Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1968. 2 vols.

———. *On Anatomical Procedures, the Later Books*. Translated by W. L. H. Duckworth. Cambridge, [Eng.]: University Press, 1962.

Gätje, Helmut. *Die Arabische Übersetzung der Schrift des Alexander von Aphrodisias über die Farbe*. Göttingen: [n. pb.], 1967.

Geymonat, Marius. *Euclidis latine facti fragmenta Veronensia*. Milano: Instituto Editoriale Cisalpino, 1964.

Graffin, F. *Patrologia Orientalis*. Belgique: Brepols, 1981.

Grant, Edward (ed.). *A Source Book in Medieval Science*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1974. (Source Books in the History of the Sciences)

——— and John E. Murdoch (eds.). *Mathematics and Its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages*. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 1987.

Grosseteste. *Commentarius in Posteriorum analyticorum libros, II.4*. Edited by Pietro Rossi. Florence: Leo S. Olschki, 1981.

Grove, George (Sir). *Grove's Dictionary of Music and Musicians*. Edited by J. A. Fuller Maitland. Philadelphia, PA.: T. Presser Co., 1916. 5 vols.

Guettat, Mahmoud. *La Musique classique du Maghreb*. Paris: Sindbad, 1980. (La Bibliothèque arabe. Collection hommes et sociétés)

Halliwell-Phillips, James Orchard. *Rara Mathematica*. London: J. W. Parker, 1841.

Haskins, Charles Homer. *Studies in the History of Mediaeval Science*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1924. Reprinted, New York: Ungar Pub. Co., 1960.

Heath, Thomas Little (Sir). *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921. Reprinted, Oxford: Clarendon Press, 1960-1965. 2 vols.

Heiberg, I. L. and Heinrich Menge (eds.) *Euclidis Opera Omnia*. Lipsiae: In aedibus B. G. Teubneri, 1899.

Hippone, Augustin de. *La Genèse au sens littéral*. Edité et traduit par P. Agaësse et A. Solignac. Paris: Desclée de Brouwer, 1970. 2 vols.

Hirschberg, J. and J. Lippert. *'Alī b. 'Īsā*. Leipzig: [n. pb.], 1904.

———, ——— and E. Mittwoch. *Die Arabischen Lehrbücher der Augenheilkunde*. Berlin: Verlag der Konigl, Akademie der Wissenschaften, 1905.

Homenaje a Millás-Vallicrosa. Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1954-1956. 2 vols.

Hughes, Barnabas B. *Jordanus de Nemore: De Numeris Datis*. Berkeley, Calif; Los Angeles: [n. pb.], 1981.

Ḥunayn Ibn Isḥāq. *Kitāb al-'ashar maqālāt fī al-'ayn al-mansūb li-Ḥunayn Ibn Isḥāq:*

The Book of the Ten Treatises on the Eye, Ascribed to Hunain Ibn Ishâq (809-877 A.D.). Edited and translated by Max Meyerhof. Cairo: Government Press, 1928.

Hunger, Herbert and Kurt Vogel. (eds.). *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts*. Wien: Kommissionsverlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 1963.

Ibn al-Haytham, Abû 'Alî al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan. *Opticæ Thesaurus. Alhazeni Arabis Libri Septem... Item Vitellonis Thuringopoloni Libri X*. Edited by Federico Risnero. Basel: Per Episcopios, 1572. Reprinted, New York: Johnson Reprint Corporation, 1972.

Ibn al-Nadîm, Muḥammad Ibn Isḥâq. *Kitâb al-Fihrist*. Mit Anmerkungen hrsg. von Gustav Flügel; nach dessen Tode von Johannes Roediger und August Mueller. Leipzig: F. C. W. Vogel, 1871-1872. 2 vols; Traduction anglaise par: Bayard Dodge (ed. and tr.) . *The Fihrist of al-Nadîm: A Tenth - Century Survey of Muslim Culture*. New York: Columbia University Press, 1970. 2 vols. (Columbia Records of Civilization, Sources and Studies; no. 83)

Ibn Rushd. *Epitome of the Parva Naturalia*. Translated by Harry Blumberg. Cambridge, Mass.: Mediaeval Academy of America, 1961. (Mediaeval Academy of America; Publication no. 54)

Ibn Shâkir, Mohammed Ibn Mûsâ. *The Banû (Sons of) Mûsâ Ibn Shâkir: The Book of Ingenious Devices (Kitâb al- ḥiyal)*. Translated by Donald Routledge Hill. Dordrecht; Boston; London: Reidel Publishing Company, 1979.

Ibn Sînâ, Abû 'Ali Husain Ibn 'Abd Allah. *A Compendium on the Soul*. Translated by Edward Abbott Van Dyck. Verona: Stamperia di N. Paderno, 1906.

———. *Kitâb al- Najât (Avicenna'a Psychology)*. translated by F. Rahman. Oxford: [n. pb.], 1952.

———. *Kitâb al-Shifâ' (Avicenna's De Anima: Being the Psychological Part of Kitâb al-Shifâ')*. Edited by F. Rahman. London; New York: Oxford University Press, 1970.

———. *Le Livre de science*. Traduit par Mohammad Achena et Henri Massé. Paris: Société d'édition «Les Belles lettres», 1955-1958.

Ibn Waḥshiyah, Ahmad Ibn 'Alî. *Ancient Alphabets and Hieroglyphic Characters Explained*. English translation by Joseph Hammer. London: W. Bulmer, 1806.

Isidore de Séville. *Isidori Hispalensis Episcopi Etymologiarum sive originum libri XX*. Edited by W. M. Lindsay. Oxford: Clarendon Press, 1911. 2 vols.

Al-Jazarî, Abû al-Izz Ismail Ibn al-Razzaz. *A Compendium on the Theory and Practice of the Mechanical Arts*. Critical edition by Ahmad Y. al-Hasan. Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1979; English translation: *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices*. Translated with notes by Donald Routledge Hill. Dordrecht; Boston: Reidel Publishing Company, 1974.

Kahn, David. *The Codebreakers: The Story of Secret Writing.* New York: Macmillan, 1967.

Kennedy, Edward Stewart [et al.]. *Studies in the Islamic Exact Sciences.* Beirut: American University of Beirut, ©1983.

Al-Khayyām, Omar. *Rasā'il (Traktaty).* Texte arabe, traduction russe de B. A. Rosenfeld, commenté par B. A. Rosenfeld et A. P. Youschkevitch. Moskva: Izd. Vostochnoi Literatury, 1961-1962.

Al-Khuwārizmī, Muḥammad Ibn Mūsā. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi.* Edited by Louis Charles Karpinski. New York: Macmillan, 1915. (Contributions to the History of Science; pt. 1)

King, David A. *Spherical Astronomy in Medieval Islam: The Ḥākimī Zīj of Ibn Yūnus.* Frankfurt.

Klibansky, Raymund (ed.). *Plato Latinus.* Leiden: E. J. Brill, 1962.

Knorr, Wilbur R. *Ancient Sources of the Medieval Tradition of Mechanics: Greek, Arabic and Latin Studies of the Balance.* Firenze: [n.pb.], 1982. (Istituto e Museo di Storia della scienza; Monografia no. 6).

Kūshyār Ibn Labbān. *Principles of Hindu Reckoning.* Translated by Martin Levey and Marvin Petruct. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1965. The Arabic text is edited by A. Saïdan, in: *Revue de l'institut de manuscrits arabes (Majalla Ma'had al-Makhtūtāt al-'Arabiyya)* (Le Caire): mai 1967.

Al-Kuwārizmī, Abū 'Abd Allāh Muhammad Ibn Ahmad. *Liber mafātīh al-olūm, explicans vocabula technica scientiarum tam arabum quam peregrinorum, auctore Abū Abdallah Mohammed Ibn Ahmed Ibn Jūsof al-Kātib al-Khowarezmi.* Edidit et indices adjecit G.Van Vloten. Lugduni - Batavorum: E. J. Brill, 1895. Réimprimé, Leiden: E. J. Brill, 1968.

Labarta, A. and C. Barceló. *Numeros y cifras en los documentos arábigohispanos.* Cordoba: [n. pb.], 1988.

Lavignac, Albert (ed.). *Encyclopédie de la musique et dictionnaire du conservatoire.* Paris: C. Delagrave, 1913-1931.

Lejeune, Albert. *Euclide et Ptolémée: Deux stades de l'optique géométrique grecque.* Louvain: Bibliothèque de l'université, bureaux du «Recueil», 1948. (Université de Louvain, recueil de travaux d'histoire et de philologie; 3. sér., 31-fasc.)

——— (ed.). *L'Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile.* Louvain: Bibliothèque de l'université, bureaux du «Recueil», 1956. (Université de Louvain, recueil de travaux d'histoire et de philologie; 4. sér., fasc. 8)

Levey, Martin. *The Algebra of Abū Kāmil: Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala.* Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966.

Libri, Guillaume. *Histoire des sciences mathématiques en Italie: Depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle.* Paris: Renouard, 1938. 2 vols.

Lindberg, David C. *John Pecham and the Science of Optics.* Madison, Wis.: University

of Wisconsin Press, 1970.
———. *Studies in the History of Medieval Optics*. London: Variorum Reprints, 1983.
———. *Theories of Vision from al-Kindī to Kepler*. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1976.
——— (ed.). *Science in the Middle Ages*. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1978.
——— and Geoffrey Cantor (eds.). *The Discourse of Light from the Middle Ages to the Enlightenment*. Los Angeles: William Andrews Clark Memorial Library, 1985.
Luckey, Paul. *Die Rechenkunsh bei Gamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī*. Wiesbaden: Steiner, 1951.
Machamer, Peter K. and Robert C. Turnbull (eds.). *Studies in Perception: Interrelations in the History of Philosophy of Science*. Columbus, Ohio: [n. pb.], 1978.
Manuel, Roland (ed.). *Histoire de la musique*. Paris: Gallimard, 1960. (Encyclopédie de la plélade; 9, 16)
Mélanges Alexandre Koyré. Paris: Hermann, 1964. 2 vols. (Histoire de la pensée; 12-13)
vol. 1: *L'Aventure de la science*.
Meyerhof, Max et Paul Sbath (eds.) *Le Livre des questions sur l'œil de Honaïn Ibn Ishāq*. Le Caire: Imprimerie de l'institut français d'archeologie orientale, 1938.
Miquel, André. *L'Islam et sa civilisation, VII^e-XX^e siècles*. Paris: Armand Colin, 1968. (Collection destins du monde)
Moody, Ernest Addison and Marshall Clagett. *The Medieval Science of Weights*. Latin version and english translation. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1952.
Mueller, I. (ed.). *Essays around the Mathematical Sciences of the Greeks*. Apeiron: [n. pb.], 1991.
Al-Nasawī, Ali Ibn Ahmad. *Nasawī Nāmih*. Edité par Abū al-Qāsim Qurbānī. Téhéran: [s. n.], 1973.
Nasr, S. H. (ed.). *The Ismaili Contributions to Islamic Culture*. Tehran: [n. pb.], 1977.
Nauchnoye nasledstvo. Moskva: Nauka, 1983-1984.
Needham, Joseph. *Science and Civilization in China*. With the research assistance of Wang Ling. Cambridge, [Eng.]: Cambridge University Press, 1954-1986. 6 vols. in 12.
Neugebauer, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1957. Traduction française par P. Souffrin. *Les Sciences exactes dans l'antiquité*. Arles: Actes Sud, 1990.
———. *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. New York: Springer-Verlag, 1975. 3 vols. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences; 1)
North, John David. *Richard of Wallingford: An Edition of His Writings*. Oxford: Clarendon Press, 1976. 3 vols.

Nutton, V. (ed.). *Galen: Problems and Prospects*. London: [n. pb.], 1981.
Pacioli, L. *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*. Venice: [n. pb.], 1494. 2 vols.
Pappus d'Alexandrie. *La Collection mathématique*. Traduit par Paul Ver Eecke. Paris: Bruges, Desclée, de Brouwer, 1933.
———. *Commentaires de Pappus et Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*. Rome: Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936. (Vatican, Biblioteca Vaticana, Studi e testi; 54, 72)
Pastore, Nicholas. *Selective History of Theories of Visual Perception, 1600-1950*. New York: [n. pb.], 1971.
Pines, Shlomo. *Beiträge zur Islamischen Atomenlehre*. Berlin: Gräfenhainichen, Gedruckt bei A. Heine, 1936.
———. *The Collected Works of Shlomo Pines: Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science*. Jerusalem: [n. pb.], 1986.
Platon. *Théététe*. Traduction française. Paris: Les Belles lettres, 1924.
———. *Timée*. Traduction française. Paris: Les Belles lettres, 1925.
Pline l'Ancien. *Histoire naturelle*. Etabli et traduit par J. Beaujeu. Paris: Les Belles lettres, 1950.
Polyak, Stephen Lucian. *The Vertebrate Visual System*. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1957. 3 vols.
Ptolemaeus, Claudius. *La Composition mathématique*. Traduction française par N. Halma. Paris: J. Hermann, 1813.
Ptolemy. *Ptolemy's Almagest*. Translated and annotated by G. J. Toomer. New York: Springer-Verlag, 1984.
Rashed, Roshdi. *Dioclès, Anthémius de Tralles, Didyme et al.: Sur les miroirs ardents*. (sous presse). (Collection G. Budé)
———. *Dioptrique et géométrie au X^e^ siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*. Paris: Les Belles lettres, 1991.
———. *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris: Les Belles lettres, 1984. (Collection sciences et philosophie arabes)
———. *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*. Paris: sous presse.
——— (ed.). *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique*. Paris: Editions du CNRS, 1991.
Al-Rāzī, Abū Bakr Muhammad Ibn Zakariyyah. *Trois traités d'anatomie arabes, par Muhammed Ibn Zakariyyā 'al-Rāzī, 'Alī Ibn al'Abbās et Abū 'Alī Ibn Sīnā*. Edité et traduit par P. de Koning. Leiden: Brill, 1903.
Rosen, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. London: [n. pb.], 1831.
Rozhanskaya, M. M. *Mechanica na Srednevokom Vostoke*. Moscow: Nauka, 1976.
—— and I. S. Levinova. *At the Sources of Machine's Mechanics: Essays on the History of Mechanics (U Istokov Mechaniki Machin Issledovanija po Istorii Mechaniki)*. Moscow: Nauka, 1983.

Al-Ruhāwī, Ayyūb. *Book of Treasures.* Edited and translated by A. Mingana. Cambridge: Heffer, 1935.

Sabra, A. I. *Theory of Light from Descartes to Newton.* London: [n. pb.], 1967.

Sambursky, Samuel. *Physics of the Stoics.* London: Routledge and Kegan Paul, 1959.

Samsó, Julio. *Estudios sobre Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alī b. 'Irāq.* Barcelona: [n. pb.], 1969.

Sarton, George. *Introduction to the History of Science.* Baltimore, Mad.: Carnegie Institution of Washington, 1927-1931. 3 vols. in 5. (Carnegie Institution of Washington; Publication no. 376)

Sayili, Aydin Mehmed. *Logical Necessity in Mixed Equations by 'Abd al-Ḥāmid Ibn Turk and the Algebra of His Time.* Ankara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1962. (Türk Tarih Yayinlarindan; ser. 7, no. 41)

Schoy, Carl. *Die Trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Abū'l Raiḥān Muḥ. Ibn Aḥmad al-Bīrūnī.* Hannover: H. Lafaire, 1927.

Schramm, Matthias. *Ibn al-Haythams Weg zur Physik.* Wiesbaden: F. Steiner, 1963. (Bœthius; Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Exakten Wissenschaften; Bd. 1)

Sédillot, Louis Pierre Eugène Amélie. *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oulough Beg.* Paris: Firmin, 1847. 2 vols. in 1.

Sezgin, Fuat. *Geschichte des Arabischen Schrifttums.* Leiden: E. J. Brill, 1967-1982. 8 vols.

Vol. 3: *Medizin*

Vol. 5: *Mathematik.*

Siegel, Rudolph E. *Galen on Sense Perception.* Basel; New York: Karger, 1970.

Simon, Max. *Sieben Bücher Anatomie des Galen.* Leipzig: [n. pb.], 1906.

Simplicius of Cilicia. *Simplicii in Aristotelis de Cælo Commentaria.* Edited by I. L. Heiberg. Berolini: G. Reimer, 1894. (Commentaria in Aristotelem Graeca; vol. VII)

Smith, David Eugene. *History of Mathematics.* Boston; New York: Ginn and Co., 1923-1925.

———. *Rara Arithmetica.* Boston; London: Ginn and Co., 1908. Reprinted, New York: [n. pb.], 1970.

——— and Louis Charles Karpinski. *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston; London: Ginn and Co., 1911.

Sorabji, Richard. *Philiponus and the Rejection of Aristotelian Science.* London: Duckworth, 1986.

———. *Time, Creation and the Continuum: Theories in Antiquity and the Early Middle Ages.* Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1983.

Sridhara. *The Pātīganita of Śrīdharācārya.* Edited with english translation by Kripa Shankar Shukla. Lucknow, India: Lucknow University, Department of Mathematics and Astronomy, 1959. (Hindu Astronomical and Mathematical Texts Series; no. 2)

Stahl, William Harris. *Roman Science: Origins, Development, and Influence to the Later Middle Ages*. Madison, Wis.: University of Wisconsin, 1962.

Suter, Heinrich. *Die Astronomischen Tafeln des Muḥammed Ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama Ibn Ahmed al-Madjrīṭī und der latein.* Übersetzung des Athelhard von Bath auf grun der vorarbeiten von A. Björnbo und R. Besthorn in Kopenhagen... hrsg und Kommentiert von H. Suter. Köbenhavn: A. F. Host and Son, 1914.

Takahashi, Kenichi. *Medieval Latin Traditions of Euclid's «Catoptrica»: Toward a Critical Edition of De speculis*. Fukuoka, Japan: Kyushu University, College of General Education, 1986.

Taton, René (ed.). *Histoire générale des sciences*. Paris: Presses universitaires de France, 1966. 3 vols.

———. *Roemer et la vitesse de la lumière*. Paris: Vrin, 1978.

Thabit Ibn Qurra. *Kitāb al-qarasṭūn*. Arabic text and french translation by Kh. Jaouiche; a critical analysis of this incorrect edition is given in: Knorr, Wilbur R. 1982. German translation in: «Die Schrift über den Qarasṭūn.» *Bibliotheca mathematica:* vol. 3, no. 12, 1912; English translation by: Moody, Ernest Addison and Marshal Clagett. 1952.

———. *Maqāla fi misāḥat al-mujassamāt al-mukāfiya (Livre sur la mesure des paraboloïdes)*. Traduction russe par B. A. Rozenfeld, dans: *Nauchnoye nasledstvo*. Moskva: Nauka, 1984.
vol. 8: *Matematicheskiye traktati.*

———. *Œuvres d'astronomie*. Texte établi et traduit par Régis Morelon. Paris: Les Belles Lettres, 1987.

Théon d'Alexandrie. *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolémée*. Traduction française par N. Halma. Paris: [s. n.], 1821.

Tropfke, Johannes. *Geschichte der Elementar-mathematik in Systematischer Darstellung*. Revised by K. Vogel, K. Reich and H. Gericke. 4th ed. Berlin: Guyter, 1980. 3 vols.
vol. 1: *Arithmetik und Algebra.*

Tummers, P. M. J. E. *Albertus (Magnus)' Commentaar op Euclides' Elementen der Geometrie*. Nijmegen: [n. pb.], 1984.

Al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn Muhammed Ibn Muhammad. *Traité du quadrilatère*. Text édité et traduit par Alexandre Pacha Carathéodory. Constantinople: Manuscrit tiré de la bibliothèque de S. A. Edhem Pacha, 1891.

Al-Ṭūsī, Sharaf al-Dīn. *Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XIIe siècle*. Texte édité et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles lettres, 1986. 2 vols.

Ullmann, Manfred. *Islamic Medicine*. Edinburgh: Edinburgh University Press, 1978. (Islamic Surveys; 11)

Unguru, Sabetai and A. Mark Smith. *Perspectiva*. Wroclaw: Ossolineum, 1977; 1983.

(Studia Copernicana; XV and XXIII)

Al-Uqlīdisī, Abu al-Hassan Ahmed Ibn Ibrahim. *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*. English translation by Ahmad S. Saīdan. Dordrecht; Boston: D. Reidel, 1978.

Vernet, Juan. *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval*. Barcelona/Bellaterra: [n. pb.], 1979.

Villuendas, M. V. *La Trigonometría europea en el siglo XI: Estudio de la obra de Ibn Mu'ādh: El-Kitāb maŷhūlāt*. Barcelona: [n. pb.], 1979.

Vogel, Kurt. *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis*. München: Beck, 1954. (Schriftenreihe zur Bayerischen Landesgeschite; Bd. 50)

———.*Ein Italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A 13)*. Munich: [n. pb.], 1977.

———. *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: Das Früheste Lehrbuch zum Rechnen mit Indischen Ziffern*. Aalen: Otto Zeller Verlagsbuchhandlung, 1963.

La Wallonie: Le Pays et les hommes: Lettres, arts, culture. Bruxelles: La Renaissance de livre, 1977.

Wiedemann, Eilhard E. *Aufsätze zur Arabischen Wissenschaftsgeschichte*. Hildesheim; New York: G. Ilms, 1970. 2 vols. (Collectanea; VI)

Willis, J. *Martianus Capella*. Leipzig: [n. pb.], 1983.

Wingate, Sybil Douglas: *The Mediaeval Latin Versions of the Aristotelian Scientific Corpus, with Special Reference to the Biological Works*. London: Courrier Press, 1931.

Woepcke, Franz. *Extrait du Fakhrī: Traité d'algèbre*. Paris: [s. n.], 1853.

Wood, Casey Albert. *Memorandum Book of a Tenth Century Oculist for the Use of Modern Ophthalmologists*. A translation of the Tadhkirat of Ali Ibn Isa of Baghdad. Evanston, Ill.: Northwestern University Press, 1936.

The World of Ibn Tufyal: Interdisciplinary Perspectives on Hayy b. Yaqzan. London: Oxford University Press, [Under Press.].

Youschkevitch, M. A. *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*. Leipzig: [n. pb.], 1964. Traduction allemande d'un ouvrage paru en russe. Moscou: [s. n.], 1961.

———. *Les Mathématiques arabes VIII^{ème} - XV^{ème} siècles*. Traduit par M. Cazenave et K. Jaouiche. Paris: Vrin, 1976.

———. *Schriftenreihe für Geschichte des Naturwissenschaftlichen Technik und Medizin*. Beiheft z. 60 Geburtstag V. G. Harig. Leipzig: [n. pb.], 1964.

Zeller, Mary Claudia. *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Ann Arbor, Mich.: Edwards Brothers Inc., 1946.

Periodicals

Aaboe, Asger. «Al-Kāshī's Iteration Method for the Determination of Sin 1°.» *Scripta Mathematica:* vol. 20, nos.1-2, March-June 1954.

Allard, André. «Le Premier traité byzantin de calcul indien: Classement des manuscrits et édition critique du texte.» *Revue d'histoire des textes:* vol. 7, 1977.

———. «Les Procédés de multiplication des nombres entiers dans le calcul indien à

Byzance.» *Bulletin de l'institut historique Belge de Rome:* vol. 43, 1973.

———. «A Propos d'un algorisme latin de Frankenthal: Une méthode de recherche.» *Janus:* vol. 45, 1978.

———. «La Tradition du texte grec des *Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie.» *Revue d'histoire des textes:* vols.12-13, 1982-1983.

Alverny, Marie-Thérèse de. «Notes sur les traductions médiévales d'Avicenne.» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge:* vol. 19, 1952.

——— et F. Hudry. «Al-Kindī, *De radiis.*» *Archives d'histoire doctrinale et littéraire du moyen âge:* vol. 41, 1974.

Anbouba, Adel. «Un Traité d'Abū Ja'far al-Khāzin sur les triangles rectangles numériques.» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 3, no. 1, Spring 1979.

Baur, L. «Dominicus Gündissalinus. *De divisione philosophiæ.*» *Beiträge zur Geschichte der Philosophie der Mittelalters:* Bd. 4, nos. 2-3, 1903.

Beaujouan, Guy. «Etude paléographique sur la «rotation» des chiffres et l'emploi des apices du X^{e} au XII^{e} siècle.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 1, 1948.

Becker, Oskar. «Zur Textgestaltung des Eudemischen Berichts über die Quadratur der Möndchen durch Hippokrates von Chios.» *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik:* Bd. 3, 1936.

Björnbo, Axel Anthon. «Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 6, 1905.

———. «Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen.» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften:* Bd. 14, 1902.

——— and Seb Vogl. «Al-Kindi, Tideus und Pseudo-Euclid: Drei Optische Werke.» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften:* Bd. 26, no. 3, 1912.

Björnbo, Axel Anton, H. Bürger and K. Kohl. «Thabits Werk über den Transversalensatz.» Mit Bemerkungen von H. Suter. *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin:* Bd. 7, 1924.

Boncompagni-Ludovisi, Baldassare. «Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese.» *Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei:* 1851.

Bond, John David. «The Development of Trigonometric Methods down to the Close of the XVth Century (with a General Account of the Methods of Constructing Tables of Natural Sines down to Our Days.» *Isis:* vol. 4, no. 11, 1921-1922.

Bosworth, C. E. «The Section on Codes and their Decipherment in Qalqashandī's *Ṣubḥ al-a'shā.*» *Journal of Semitic Studies:* vol. 8, 1963.

Boyer, Carl Benjamin. «Aristotelian References to the Law of Reflection.» *Isis:* vol. 36, no. 104, 1945-1946.

Braunmühl, A. von. «Zur Geschichte des Sphärischen Polardreieckes.» *Bibliotheca*

Mathematica: Bd. 12, 1898.

Busard, H. L. L. «L'Algèbre au moyen âge: Le *Liber mensurationum* d'Abū Bekr.» *Journal des savants:* 1968.

———. «Die Traktate *De Proportionibus* von Jordanus Nemorarius und Campanus.» *Centaurus:* vol. 15, nos. 3-4, 1971.

———. «Ein Mittelalterlicher Euklid-Kommentar, der Roger Bacon Zugeschrieben Werden Kann.» *Archives internationales d'histoire des sciences:* vol. 24, no. 95, 1974.

———. «The Practica Geometriæ of Dominicus de Clavasio.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 2, 1965.

Cantor, M. «Über einen Codex des Klosters Salem.» *Zeitschrift für Mathematik und Physik:* Bd. 10, 1865.

Carra de Vaux (Le Baron). «L'Almageste d'Abū-l-Wéfā' Albūzdjānī.» *Journal asiatique:* 8ème série, tome 19, mai-juin 1892.

Charles, M. «Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.» *Mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles:* vol. 11, 1857.

Cherniss, Harold. «Galen and Posidonius' Theory of Vision.» *American Journal of Philology:* vol. 54, 1933.

Clagett, Marshall. «King Alfred and the *Elements* of Euclid.» *Isis:* vol. 45, no. 141, September 1954.

———. «The *Liber de Motu* of Gerard of Brussels and the Origins of Kinematics in the West.» *Osiris:* vol. 12, 1956.

———. «The Medieval Latin Translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with Special Emphasis of the Versions of Adelard of Bath.» *Isis:* vol. 44, nos. 135-136, June 1953.

Creutz, R. in: *Studien und Mitteilungen zur Geschichte der Benediktiner-Ordens und seiner Zweige:* vol. 47, 1929; vol. 48, 1930, and vol. 50, 1932.

Crombie, Alistair Cameron. «Early Concepts of the Senses and the Mind.» *Scientific American:* vol. 210, no. 5, May 1964.

Curtze, Maximillian. «Ein Beiträge zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert.» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik:* Bd. 7, 1895.

———. «Über eine Algorismus-Schrift des 12. Jahrhunderts.» *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik:* Bd. 8, 1898.

Debarnot, Marie - Thérèse. «Introduction du triangle polaire par Abū Naṣr b. 'Irāq.» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 2, no. 1, May 1978.

De Young, G. «The Arabic Textual Traditions of Euclid's *Elements*.» *Historia Mathematica:* vol. 11, 1984.

«Die Schrift über den qarasṭūm.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 12, 1912.

Eastwood, Bruce S. «The Elements of Vision: The Micro-Cosmology of Galenic Visual Theory according to Ḥunayn Ibn Isḥāq.» *Transactions of the American Phi-*

losophical Society: vol. 72, no. 5, 1982.
———. «Al-Fārābī on Extramission, Intromission, and the Use of Platonic Visual Theory.» *Isis:* vol. 70, no. 253, September 1979.
———. «Grosseteste's *Quantitative* Law of Refraction: A Chapter in the History of Non-Experimental Science.» *Journal of the History of Ideas:* vol. 28, 1967.
Egmond, W. van. «The Algebra of Master Dardi of Pisa.» *Historia Mathematica:* vol. 10, 1983.
Farmer, Henry George. «The Lute Scale of Avicenna.» *Journal of the Royal Asiatic Society:* April 1937.
Fichtenau, H. Von. «Wolfger von Prüfening.» *Mitteilungen der Österreich. Institut für Geschichtsforschung:* Bd. 51, 1937.
Folkerts, Menso and A. J. E. M. Smeur. «A Treatise on the Squaring of the Circle by Franco of Liege of about 1050.» *Archives internationales d'histoire des sciences:* vol. 26, no. 98, 1976, and vol. 26, no. 99, 1976.
Francisco Rivera, Juan. «Nuevos datos sobre los traductores Gundisalvo y Juan Hispano. » *Al-Andalus:* vol. 31, Summer 1966.
Gandz, Solomon. «The Origin of the Ghubār Numerals, or the Arabian Abacus and the Articuli.» *Isis:* vol. 16, no. 49, 1931.
Hairetdinova, N. G. «Sobranie Pravil Nauki Astronomii.» *Fisikomatematičeskie Nauki b Stranah Vostoka* (Moscou): 1969.
———. «Trigonometriceskoii Isfahanskogo Anonima.» *Istoriko-Matematitcheskie Issledovaniya:* vol. 17, 1966.
Hamadanizadeh, Javad. «Interpolation Schemes in *Dustūr al-Munajjimīn.» Centaurus:* vol. 22, no. 1, 1978.
———. «The Trigonometric Tables of al-Kāshī in His *Zīj-i Khāqānī.» Historia Mathematica:* vol. 7, 1980.
Hatfield Gary C. and William Epstein. «The Sensory Core and the Medieval Foundations of Early Modern Perceptual Theory.» *Isis:* vol. 70, no. 253, September 1979.
Hughes, Barnabas B. «Johann Scheubel's Revision of Jordanus de Nemore's *De numeris datis:* An Analysis of an Unpublished Manuscript.» *Isis:* vol. 63, no. 217, June 1972.
Junge, G. «Das Fragment der Lateinischen Übersetzung des Pappus Kommentars zum 10. Buche Euklids.» *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik:* Bd. 3, no. 1, 1934.
Karpinski, Louis Charles. «The Algebra of Abū Kāmil Shoja' ben Aslam.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 12, 1911.
———. «Two Twelfth Century Algorisms.» *Isis:* vol. 3, no. 9, Summer 1921.
Kennedy, Edward Stewart. «An Early Method of Successive Approximations.» *Centaurus:* vol. 13, nos. 3-4, 1969.
———. «Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar.» *Scripta Mathematica:* vol. 27, no. 1,

June 1964.

——— and W. R. Transue. «A Medieval Iterative Algorism.» *American Mathematical Monthly:* vol. 63, no. 2, 1956.

Khanikoff, N. «Analysis and Extracts of *Kitāb mizān al-ḥikma (Book on the Balance of Wisdom)*: An Arabic Work on the Water-Balance, Written by al-Khāzinī in the Twelfth Century.» *Journal of the American Oriental society*: vol. 6, 1859.

Knorr, Wilbur R. «Archimedes and the Pseudo-Euclidean *Catoptrics:* Early Stages in the Ancient Geometric Theory of Mirrors.» *Archives internationales d'histoire des sciences:* vol. 35, 1985.

Krause, M. «Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alī. b. 'Irāq, mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern.» *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, phil.-hist. Klasse:* Bd. 3, no. 17, 1936.

L'Huillier, G. «Regiomontanus et le *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 33, no. 3, 1980.

Lemay, Richard. «Dans l'Espagne du XII^e^ siècle: Les Traductions de l'arabe au latin.» *Annales, économies, sociétés, civilisations:* vol. 18, no. 4, juillet-aout 1963.

———. «The Hispanic Origin of our Present Numeral Forms.» *Viator:* vol. 8, 1977.

Lindberg, David C. «Continuity and Discontinuity in the History of Optics: Kepler and the Medieval Tradition.» *History and Technology:* vol. 4, 1987.

——— «The Genesis of Kepler's Theory of Light: Light Metaphysics from Plotinus to Kepler.» *Osiris:* vol. 2, no. 2, 1986.

———. «Al-Kindi's Critique of Euclid's Theory of Vision.» *Isis:* vol. 62, no. 214, December 1971.

———. «Lines of Influence in Thirteenth-Century Optics: Bacon, Witelo, and Pecham.» *Speculum:* vol. 46, no. 4, 1971.

———. «The Theory of Pinhole Images from Antiquity to the Thirteenth Century.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 5, 1968.

Lorch, R. «Abū Ja'far al-Khāzin on Isoperimetry.» *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften:* 1986.

Luckey, Paul. «Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamshīd b. Mas'ūd al-Kāshī.» *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin:* Bd. 6, 1950.

———. «Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der Binomische Lehrsatz in der Islamischen Mathematik.» *Mathematische Annalen:* Bd. 120, 1948.

———. «Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung.» *Deutsche Mathematik:* Bd. 5, 1941.

McEvoy, James. «The Chronology of Robert Grosseteste's Writings on Nature and Natural Philosophy.» *Speculum:* vol. 58, no. 3, July 1983.

Marre, A. «Le Triparty en la science des nombres.» *Bulletino di bibliografica e di storia delle scienze matematiche e fisiche* (Roma): vol. 13, 1880, and vol. 14, 1881.

Menendez Pidal, Gonzalo. «Los Illamados numerales árabes en Occidente.» *Boletín de la Real Academia de la Historia:* vol. 145, 1959.

Meyerhof, Max. «Dei Optik der Araber.» *Zeitschrift fur Ophthalmalogische Optike:* Bd. 8, 1920.

———. «Eine Unbekannte Arabische Augenheilkunde des 11. Jahrunderts n. Chr.» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften:* Bd.20, 1928.

———. «New Light on Ḥunain Ibn Isḥāq and His Period.» *Isis:* vol. 8, no. 28, 1926.

Millás Vallicrosa, José Mª. «La Aportación astronómica de Petro Alfonso.» *Sefarad:* vol. 3, 1943.

Miura, N. «The Algebra in the *Liber Abaci* of Leonardo Pisano. » *Historia Scientiarum:* vol. 21, 1981.

Mogenet, J. «Les Isopérimètres chez les grecs.» *Scrinium lovaniense, mélanges historiques* (Louvain): 4ème série, tome 24, 1961.

Murdoch, John E. «Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto Unknown Medieval Latin Translation of the Elements Made Directly from the Greek.» *Harvard Studies in Classical Philology:* vol. 71, 1966.

———. «The Medieval Euclid: Salient Aspects of the Translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara.» *Revue de synthèse:* vol. 89,1968.

Nagl, A. «Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der Indisch-Arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im Christl. Abendlande.» *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch -Literarische Abteilung:* Bd. 34, 1889.

Nebbia, G. «Ibn al-Haytham nel millesimo anniversario della nascita.» *Physis:* vol. 9, no. 2, 1967.

Neugebauer, Otto. «The Astronomical Tables of al-Khwārizmī.» *Hist. Filos. Skr. Dan. Vid. Selks:* vol. 4, no. 2, 1962.

Rashed, Roshdi. «L'Analyse diophantienne au Xème siècle: L'Exemple d'al-Khāzin.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 32, no. 3, 1979.

———. «Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham (Alhazen).» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 21, 1968.

———. «L'Extraction de la racine nième et l'invention des fractions décimales -XIe-XIIe siècle.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 18, no. 3, 1978.

———. «Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde.» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 5, 1981.

———. «Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 22, no. 4, 1980.

———. «Ibn al-Haytham et les nombres parfaits.» *Historia Mathematica:* vol. 16, 1989.

———. «Al-Kindī's Commentary on Archimedes: The Measurement of the Circle.» *Arabic Sciences and Philosophy:* vol. 3, 1993.

———. «Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire.» *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 6, nos. 1-2, 1982.
———. «Le Modèle de la sphère transparente et l'explication de l'arc-en-ciel: Ibn al-Haytham, al-Fārisī.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 23, 1970.
———. «Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^{e}-XIV^{e} siècles.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 28, no. 2, 1983.
———. «Optique géométrique et doctrine optique chez Ibn al-Haytham.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 6, no. 4, 1969-1970.
———. «La Philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham: L'Analyse et la synthèse.» *Mélanges de l'institut dominicain d'études orientales:* vol. 29, 1991.
———. «A Pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses.» *Isis:* vol. 81, no. 308, September 1990.
———.«Résolution des équations numériques et algèbre: Šaraf al-Dīn al-Ṭūsī, Viète.» *Archive for History of Exact Sciences:* vol. 12, no. 3, 1974.
———. «As-Samaw'āl, al-Bīrūnī et Brahmagupta: Les Méthodes d'interpolation.» *Arabic Sciences and Philosophy:* vo. 1, 1991.
———. «Al-Sijzī et Maïmonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14, des *Coniques* d'Apollonius.» *Archives internationales d'histoire des sciences:* vol. 37, no. 119, 1987. Traduction anglaise dans: *Fundamenta Scientiæ:* vol. 8, no. 3-4, 1987.
———. «Les Travaux perdus de Diophante, I et II.» *Revue d'histoire des sciences:* vol. 27, no. 1, 1974, et vol. 28, no. 2, 1975.
Rosenthal, Franz. «Die Arabische Autobiographie.» *Studia Arabica* (Analecta Orientalia; 14): Bd. 1, 1937.
———. «On the Knowledge of Plato's Philosophy in the Islamic World.» *Islamic Culture:* vol. 14, no. 4, October 1940.
Sabra, A. I. «Ibn al-Haytham's Criticisms of Ptolemy's *Optics*.» *Journal of the History of Philosophy:* vol. 4, no. 2, April 1966.
Sambursky, Samuel. «Philoponus' Interpretation of Aristotle's Theory of Light.» *Osiris:* vol. 13, 1958.
Sánchez-Albornoz, C. «Observaciones a unas paginas de Lemay sobre los traductores toledanos.» *Cuadernos de Historia de España:* vols. 41- 42, 1965.
Schipperges, H. «Die Assimilation der Arabischen Medizin durch das Lateinische Mittelalter.» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften:* Bd. 3, 1964.
Schmidt, W. «Zur Geschichte der Isoperimetrie.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 2, 1901.
Schoy, Carl. «Beiträge zur Arabischen Trigonometrie.» *Isis:* vol. 5, no. 14, 1923.
Schramm, Matthias. «Zur Entwicklung der Physiologischen Optik der Arabischen Litteratur.» *Sudhoff's Archiv für Geschichte der Midizin und der Naturwissenschaften:* Bd. 43, 1959.

Smith, A. Mark. «The Psychology of Visual Perception in Ptolemy's *Optica.*» *Isis:* vol. 79, 1989.

Suter, Heinrich. «Das Buch von der Auffindung der Sehnen im Kreise.» *Bibliotheca Mathematica:* Bd. 3, no. 11, 1910-1911.

———. «Die Abhandlungen Thābit ben Qurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloïde.» *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät Erlangen:* Bd. 48-49.

———. «Die Astronomischen Tafeln des Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama Ibn Aḥmed al-Majrīṭī und der Lateinischen Übersetzung des Athelard von Bath.» *Danske Videnskabernes Selskab.* Skr., 7 Raekke, Hist. og Filos. Afd. (Copenhagen): Bd. 3, no. 1, 1914.

———. «Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam.» *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-litterarische Abteilung: Skr., 7 Raekke, Hist. og Filos. Afd.* (Copenhagen): Bd. 44, 1899.

———. «Über das Rechenbuch des Alī ben Ahmed el-Nasawī.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 7, 1906-1907.

Tannery, Paul. «Sur l'auteur d'un texte algorithmique du douzième siècle publié par Curtze.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 5, 1904.

———. «Sur la division du temps en instants au moyen âge.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 4, 1905.

———. «Notes sur la pseudo-géométrie de Boèce.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 1, 1900.

Theisen, Wilfred R. «*Liber de visu:* The Greco-Latin Translation of Euclid's *Optics.*» *Mediaeval Studies:* vol. 41, 1979.

Victor, S. K. «Practical Geometry in the High Middle Ages: *Artis cuiuslibet consummatio* and *the Pratike de geometrie.*» *Mémoirs of the American Philosophical Society:* vol. 134, 1979.

Wappler, H. E. «Zur Geschichte der Deutschen Algebra im 15. Jahrhundert.» *Progr. Gymn. Zwickau:* 1886-1887.

Waters, E. G. R. «A Thirteenth Century Algorism in French Verse.» *Isis:* vol. 11, no. 35, January 1928.

Weissenborn, H. «Die Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath.» *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* Historisch-Literarische Abteilung: Bd. 25, 1880.

Wertheim, G. «Über die Lösung einiger Aufgaben im *Tractatus de numeris datis* des Jordanus Nemorarius.» *Bibliotheca Mathematica:* vol. 3, no. 1, 1900.

Wiedemann, Eilhard E. «Ibn al- Haythams Schrift über die Sphärischen Hohlspiegel.» *Bibliotheca Mathematica:* 3ème série, vol. 10, 1909-1910.

———. «Über das Leben von Ibn al Haitham und al Kindī.» *Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik:* Bd. 25, 1911.

Winter, H. J. J. and W. Arafat. «A Discourse on the Concave Spherical Mirror by Ibn

al-Haytham.» *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal:* 3ème série (Science), vol. 16, 1950.

Woepcke, Franz. «Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°.» *Journal de mathématiques pures et appliquées:* vol. 19, 1854.

———. «Notice sur une théorie ajoutée par Thābit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des grecs.» *Journal asiatique:* 4ème, série, tome 20, octobre-novembre 1852.

———. «Notice sur les traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide.» *Journal asiatique:* 4ème série, tome 18, septembre-octobre 1851.

———. «Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux.» *Journal asiatique:* 5ème série, tome 15, avril-mai 1860.

Youschkevitch, M. A. «Note sur les déterminations infinitésimales chez Thābit Ibn Qurra.» *Archives internationales d'histoire des sciences:* vol. 17, no. 66, 1964.

Zotenberg, H. «Traduction arabe du *Traité des corps flottants* d'Archimède.» *Journal asiatique:* 7ème série, tome 13, mai-juin 1879.

Theses

Allard, André. «Les Plus anciennes versions latines du XIIe siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwārizmī.» (Louvain: 1975). (Non publiée).

Benedict, S. R. «Comparative Study of Early Treatises Introducing into Europe the Hindu Art of Reckoning.» (Thesis, University of Michigan, 1984).

Chabrier, Jean Claude. «Un mouvement de réhabilitation de la musique arabe et du luth oriental: L'Ecole de Bagdad de Cherif Muhieddin à Munīr Bachīr.» (Thèse dactylographiée, La Sorbonne, Paris, 1976).

Dickey, B. G. «Adelard of Bath: An Examination Based on Heretofore Unexamined Manuscripts.» (Unpublished Thesis, University of Toronto, 1982).

Al-Fārisī, Kamal al-Dīn. «Asās al-Qawā'id.» Edité par M. Mawaldi. (Thèse de doctorat, Université de Paris III, 1989).

Goldat, G. D. «The Early Medieval Tradition of Euclid's *Elements.*» (Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1954).

Irani, Rida A. K. «The *Jadwal at-Taqwīm* of Ḥabash al-Ḥāsib.» (Unpublished M. A. Dissertation, American University of Beirut, 1956).

McCue, J. F. «The Treatise *De proportionibus velocitatum in motibus* Attributed to Nicholas Oresme.» (Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1961).

Reuter, J. H. L. «Petrus Alfonsi: An Examination of His Works, Their Scientific Content and Their Background.» (Unpublished Thesis, Oxford, St. Hilda's College, 1975).

Schrader, W. R. «The Epistola de proportione et proportionalitate of Ametus Filius Josephi.» (Unpublished Thesis, University of Wisconsin, 1961).

Conferences

Actes du colloque sur la Syrie de byzance à l'Islam (Lym, 11-15 septembre 90). Damas: Institut français d'études arabes de Damas, 1991.

Actes du VII^e congrès international d'histoire des sciences, Jérusalem, 1953. Paris: [s. n.], 1986.

Actes du X^e congrès international d'histoire des sciences, Ithaca, 1962. Paris: [s. n.], 1964.

The Commemoration Volume of al-Biruni International Conference in Tehran. Tehran: [n. pb.], 1976.

Proceedings of the First International Conference on Islamic Medicine, 2. Koweit: [n. pb.], 1981.

Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science...1976. Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1978.

Proceedings of the Second International Symposium for the History of Arabic Science. Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science, 1979.

Settimane XII: L'Occidente e l'Islam nell' Alto Medioeva. Spoleto: [n. pb.], 1965.

Todd, J. A. (ed.). *Proceedings of the International Congress of Mathematics, 14-21 August 1958*. Cambridge: [n. pb.], 1960.